Ü B U N G E N   zu Mathematik 2   SS 2022

Übungsblatt 4:

25) Für die Spirale $[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3: \ \vec{X}(t) = [\,t\cos(t)\ \ t\sin(t)\ \ t\,]^T$ berechnen wir

$$\dot{\vec{X}}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) - t\sin(t) \\ \sin(t) + t\cos(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \sqrt{2}\cdot \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 \end{bmatrix} /\sqrt{2} + t \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix} \implies \|\dot{\vec{X}}(t)\| = \sqrt{2+t^2}$$

$$\ddot{\vec{X}}(t) = \begin{bmatrix} -2\sin(t) - t\cos(t) \\ 2\cos(t) - t\sin(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \ \dot{\vec{X}} \times \ddot{\vec{X}} = \begin{bmatrix} -2\cos(t) + t\sin(t) \\ -2\sin(t) - t\cos(t) \\ t^2+2 \end{bmatrix},$$

denn die z-Koordinate des Kreuzprodukts ist

$$\begin{aligned} &(\cos(t) - t\sin(t))(2\cos(t) - t\sin(t)) - (\sin(t) + t\cos(t))(2\sin(t) + t\cos(t)) \\ &= 2\cos(t)^2 - t\sin(t)\cos(t) - 2t\sin(t)\cos(t) + t^2\sin(t)^2 + \\ &\quad 2\sin(t)^2 + t\sin(t)\cos(t) + 2t\sin(t)\cos(t) + t^2\cos(t)^2 \\ &= 2 + t^2 \end{aligned} \quad .$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \|\dot{\vec{X}} \times \ddot{\vec{X}}\| &= \sqrt{(-2\cos(t) + t\sin(t))^2 + (-2\sin(t) - t\cos(t))^2 + (2+t^2)^2} \\ &= \sqrt{4 + t^2 + (4 + 4t^2 + t^4)} = \sqrt{t^4 + 5t^2 + 8} \end{aligned}$$

Das 3-Bein ist somit

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{t^2+2}} \begin{bmatrix} \cos(t) - t\sin(t) \\ \sin(t) + t\cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}, \ \vec{B} = \frac{1}{\sqrt{t^4+5t^2+8}} \begin{bmatrix} -2\cos(t) + t\sin(t) \\ -2\sin(t) - t\cos(t) \\ t^2+2 \end{bmatrix}$$

und $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$. Die Krümmung ist

$$\kappa = \frac{|\dot{\vec{X}}(t) \times \ddot{\vec{X}}(t)|}{|\dot{\vec{X}}(t)|^3} = \frac{\sqrt{t^4+5t^2+8}}{\sqrt{t^2+2}^3}$$

26) Für die gegebene Raumkurve $[0,1] \to \mathbb{R}^3$ $\vec{X}(t) = [\,t\ t^2\ t^3\,]^T$ erhält man analog

$$\dot{\vec{X}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix}, \; \ddot{\vec{X}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6t \end{bmatrix}, \; \dot{\vec{X}} \times \ddot{\vec{X}} = \begin{bmatrix} 6t^2 \\ -6t \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3t^2 \\ -3t \\ 1 \end{bmatrix},$$

das 3-Bein $\vec{T} \sim \dot{\vec{X}}(t)$, $\vec{B} \sim \dot{\vec{X}} \times \ddot{\vec{X}}$, $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$ als

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix}, \; \vec{B} = \frac{1}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}} \begin{bmatrix} 3t^2 \\ -3t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4} \cdot \sqrt{1+9t^2+9t^4}} \begin{bmatrix} -2t - 9t^3 \\ 1 - 9t^4 \\ 3t + 6t^3 \end{bmatrix}$$

und die Krümmung

$$\kappa = \frac{|\dot{\vec{X}}(t) \times \ddot{\vec{X}}(t)|}{|\dot{\vec{X}}(t)|^3} = \frac{2\sqrt{1+9t^2+9t^4}}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}^3}$$

27) Die Länge der Raumkurve $t \in [0, 4\pi]$ berechnet man mittels Übung 25 als $L = \int_0^{4\pi} \sqrt{2+t^2}\, dt$. Mit der Substitution

$$t = \sqrt{2}\sinh(u), \; \sqrt{2+t^2} = \sqrt{2}\cosh(u), \; dt = \sqrt{2}\cosh(t)\, du, \; u \in [0, \operatorname{arsinh}(4\pi/\sqrt{2})]$$

erhält man

$$L = \int_0^{\operatorname{arsinh}(4\pi/\sqrt{2})} 2\cosh(u)^2\, du$$

wegen $2\cosh(u)^2 = 2[(e^u + e^{-u})/2]^2 = (e^{2u} + e^{-2u})/2 + 1 = \cosh(2u) + 1$

$$= [\sinh(2u)/2 + u]_0^{\operatorname{arsinh}(4\pi/\sqrt{2})} \approx 82.336$$

28) Für den Schwerpunkt von $\vec{x} = [\cos(t)\ \ \sin(t)\ \ t]^T$ braucht man zuerst die Länge:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}, \ ds = |\dot{\vec{x}}|\, dt = \sqrt{2}\, dt, \ L = \int_0^{2\pi} ds = 2\sqrt{2}\pi.$$

Der Schwerpunkt ergibt sich sodann als (**Achtung! das** ds **wird (von uns nicht!) gerne übersehen!**)

$$\frac{1}{L} \cdot \int \vec{x}(t)\, d\mathbf{s} = \frac{1}{L} \cdot \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix} \sqrt{2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\pi} \begin{bmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ t^2/2 \end{bmatrix} |_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4\pi^2/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \end{bmatrix}$$

29) Aus der Parametrisierung $\vec{x}(t) = [R\cos(t)\ R\sin(t)]^T$ (Kreis Γ um 0 mit Radius R) erhält man

$$d\vec{x} = \dot{\vec{x}}\, dt = \begin{bmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{bmatrix} dt$$

und man bekommt für die Wegintegrale

$$\oint_\Gamma < F, d\vec{x} >= \int_0^{2\pi} < \begin{bmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{bmatrix} dt = 0,$$

$$\oint_\Gamma < G, d\vec{x} >= \int_0^{2\pi} < \begin{bmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{bmatrix} > dt = 2\pi R^2$$

30) Die Wegintegrale des Vektorfeldes $\vec{F} = [x + y\ \ 2x]^T$ sind:

$$\int_{\Gamma_1} < \vec{F}, d\vec{x} >= \int_0^1 < \begin{bmatrix} t + t \\ 2t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} > dt >= \int_0^1 4t\, dt = 2$$

$$\int_{\Gamma_2} < \vec{F}, d\vec{x} >= \int_0^1 < \begin{bmatrix} t + t^2 \\ 2t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix} > dt = \int_0^1 (t + 5t^2)\, dt = \frac{13}{6}$$

<u>Ü B U N G E N zu Mathematik 2 SS 2022</u>

31) Die Raumkurve

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos(t) \\ e^{-t}\sin(t) \\ 1-e^{-t} \end{bmatrix}, \ \dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} e^{-t}(-\cos(t)-\sin(t)) \\ e^{-t}(-\sin(t)+\cos(t)) \\ e^{-t} \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} -\cos(t)-\sin(t) \\ -\sin(t)+\cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

liegt am Kegel, denn

$$1-\sqrt{x^2+y^2} = 1-\sqrt{(e^{-t}\cos(t))^2+(e^{-t}\sin(t))^2} = 1-e^{-t} = z.$$

Sie durchschneidet die xy-Ebene bei $t=0$ mit dem Tangenvektor $[-1\ 1\ 1]^T$ und dem Winkel

$$\arcsin\phi = \frac{< \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} >}{1\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Die Kurvenlänge ist

$$L = \int_0^{2\pi} e^{-t}\sqrt{(-\cos(t)-\sin(t))^2+(-\sin(t)+\cos(t))^2+1^2} = \sqrt{3}\int_0^{2\pi} e^{-t}dt$$
$$= -\sqrt{3}e^{-t}|_0^{2\pi} = -\sqrt{3}(e^{-2\pi}-1) = \sqrt{3}(1-e^{-2\pi})$$

32) Für das Arbeitsintegral längs $\Gamma = [x(t)\ y(t)\ z(t)]^T$ erhält man

$$W = \int_\Gamma < \vec{F}, d\vec{x} >= \int_a^b < \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} dt >= \int_a^b -mg\dot{z}(t)\,dt = -mg(z(b)-z(a))$$
$$= \Phi(\Gamma(b)) - \Phi(\Gamma(a)),$$

wenn man das Potential $\Phi(x,y,z) = -mgz$ nimmt (es gilt $\nabla\Phi = \vec{F}$).