**Übungsblatt 6:**

41) Für $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2xy \\ x^2+y^2 \end{bmatrix}$ gilt $\operatorname{div}(\vec{v}) = 2y + 2y = 4y$ :

$$\iint_B \operatorname{div}(\vec{v})\, d(x,y) = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} 4y\, dy\, dx = 2\int_{-1}^{1}(1-x^4)\, dx = 2(2-\frac{2}{5}) = \frac{16}{5}.$$

Der Rand $\Gamma$ von $B$ besteht aus $\Gamma_1 :\ \vec{x} = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}$, $d\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix} dt$, $d\vec{n} = \begin{bmatrix} 2t \\ -1 \end{bmatrix} dt$, $t \in [-1,1]$ und $\Gamma_2 :\ \vec{x} = \begin{bmatrix} -t \\ 1 \end{bmatrix}$, $d\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} dt$, $d\vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt$, $t \in [-1,1]$ :

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma < \vec{v}, d\vec{n} > &= \int_{\Gamma_1} < \vec{v}, d\vec{n} > + \int_{\Gamma_2} < \vec{v}, d\vec{n} > \\
&= \int_{-1}^{1} < \begin{bmatrix} 2\cdot t\cdot t^2 \\ t^2+(t^2)^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2t \\ -1 \end{bmatrix} dt > + \int_{-1}^{1} < \begin{bmatrix} 2\cdot(-t)\cdot 1 \\ (-t)^2+1^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt > \\
&= \int_{-1}^{1} (4t^4 - t^2 - t^4 + t^2 + 1)\, dt = \int_{-1}^{1} (3t^4+1)\, dt = [\frac{3}{5}t^5 + t]_{-1}^{1} = \frac{6}{5} + 2 \\
&= \frac{16}{5}.
\end{aligned}$$

42) Es gilt $\operatorname{rot}(\vec{v}) = 2x - 2x = 0$ und das Integral darüber ist auch 0.

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma < \vec{v}, d\vec{x} > &= \int_{\Gamma_1} < \vec{v}, d\vec{x} > + \int_{\Gamma_2} < \vec{v}, d\vec{x} > \\
&= \int_{-1}^{1} < \begin{bmatrix} 2\cdot t\cdot t^2 \\ t^2+(t^2)^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix} dt > + \int_{-1}^{1} < \begin{bmatrix} 2\cdot(-t)\cdot 1 \\ (-t)^2+1^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} dt > \\
&= \int_{-1}^{1} (2t^3 + 2t^3 + 2t^5 + 2t)\, dt = 0.
\end{aligned}$$

43) Gegeben sind das Vektorfeld $\vec{v} = \begin{bmatrix} \sin(x) \\ y \end{bmatrix}$ und das Gebiet $B = \{(x, y) : 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \sin(x)\}$ . Der Rand von $B$ besteht aus den 2 Kurven

$$\Gamma_1 :\ \vec{x} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix},\ d\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt,\ d\vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} dt,\ t \in [0, \pi],$$

$$\Gamma_2 :\ \vec{x} = \begin{bmatrix} \pi - t \\ \sin(t) \end{bmatrix},\ d\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ \cos(t) \end{bmatrix} dt,\ d\vec{n} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix} dt,\ t \in [0, \pi].$$

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma < \vec{v}, d\vec{n} > &= \int_{\Gamma_1} < \vec{v}, d\vec{n} > + \int_{\Gamma_2} < \vec{v}, d\vec{n} > \\
&= \int_0^\pi < \begin{bmatrix} \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} dt > + \int_0^\pi < \begin{bmatrix} \sin(\pi - t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix} dt > \\
&= 0 + \int_0^\pi (-\sin(t)\cos(t) + \sin(t))\, dt \\
&= [-\sin(t)^2/2 - \cos(t)]_0^\pi = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma < \vec{v}, d\vec{x} > &= \int_{\Gamma_1} < \vec{v}, d\vec{x} > + \int_{\Gamma_2} < \vec{v}, d\vec{x} > \\
&= \int_0^\pi < \begin{bmatrix} \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt > + \int_0^\pi < \begin{bmatrix} \sin(\pi - t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ \cos(t) \end{bmatrix} dt > \\
&= \int_0^\pi (\sin(t) + [-\sin(t) + \sin(t)\cos(t)])\, dt = [\sin(t)^2/2] - 0^\pi \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Für $\vec{v}$ gilt $\mathrm{div}(\vec{v}) = \cos(x) + 1$ :

$$\begin{aligned}
\iint_B \mathrm{div}\vec{v}\, d(x, y) &= \int_0^\pi \int_0^{\sin(x)} (\cos(x) + 1)\, dy\, dx = \int_0^\pi (\cos(x) + 1)\sin(x)\, dx \\
&= [\sin(x)^2/2 - \cos(x)]_0^\pi = 2
\end{aligned}$$

Ferner gilt $\mathrm{rot}\vec{v} = 0 \implies \iint_B \mathrm{rot}\vec{v}\, d(x, y) = 0\,!$

44) Sei $B$ das rechtwinklige Dreieck $\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\}$ und $\vec{v}$ das Vektorfeld $\vec{v}(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \mathrm{div}\vec{v} = 2,\ \mathrm{rot}\vec{v} = 0\,.$

$$\iint_B \mathrm{div}\,\vec{v}\,d(x,y) = 2 \cdot \mathrm{Area(B)} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} 2\,dydx = 2\int_0^1 (1-x)\,dx = 2[x - \frac{x^2}{2}]_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{2}$$

45) Den Dreiecksrand parametrisieren wir im Gegenuhrzeigersinn durch die 3 Strecken:

$$\vec{x}_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix},\ \vec{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-t \end{bmatrix},\ \vec{x}_3(t) = \begin{bmatrix} 1-t \\ 1-(1-t) \end{bmatrix} \qquad t \in [0,1]$$

Es folgt:

$$d\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt,\ d\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} dt,\ d\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} dt$$

und die äußeren Normalen sind

$$d\vec{n}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} dt,\ d\vec{n}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} dt,\ d\vec{n}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dt.$$

$$\int_{\partial B} < \vec{v},\, d\vec{x} >$$

$$= \int_0^1 (< \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} > + < \begin{bmatrix} 0 \\ 1-t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} > + < \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} >)\,dt$$

$$= \int_0^1 (t-1+t-1+t+t)\,dt = \int_0^1 (4t-2)\,dt = [2t^2 - 2t]_0^1 = 0$$

$$\int_{\partial B} < \vec{v}, d\vec{n} >$$

$$= \int_0^1 (< \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} > + < \begin{bmatrix} 0 \\ 1-t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} > + < \begin{bmatrix} 1-t \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} >)\,dt$$

$$= \int_0^1 (0+0+1-t+t)\,dt = 1$$

46) Sei $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ und

$$\Psi(x,y) = \log(\frac{1}{|\vec{x}|}) = \log(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) = \log([x^2+y^2]^{-1/2}) = -\frac{1}{2}\log(x^2+y^2).$$

Dann ist

$$\Psi_x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

analog erhält man $\Psi_y = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ und

$$\nabla\Psi = -\frac{1}{x^2+y^2} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Weiters gilt

$$\mathrm{div}(\nabla\Psi) = \frac{\partial}{\partial x}\,\Psi_x + \frac{\partial}{\partial y}\,\Psi_y = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})\Psi = \Delta\Psi.$$

Die 2. Ableitungen sind mit der Quotientenregel:

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\Psi_x = -\frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\,\Psi_y = -\frac{1\cdot(x^2+y^2) - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Man addiert alle 2 Gleichungen zu $\Delta\Psi = 0$ . Für jede 2x stetig differenzierbare skalare Funktion $\phi(x,y)$ gilt

$$\mathrm{rot}(\nabla\phi) = \nabla\times(\nabla\phi) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} = \phi_{yx} - \phi_{xy} = 0$$

Eine rein verbale Begründung: $\Phi$ ist ein Potential für $\nabla\Phi$ und daher sind alle Wegintegrale über $\nabla\Phi$ wegunabhängig. Also erfüllt $\nabla\Phi$ die Integrabilitätsbdingung (d.h. $\mathrm{rot} = 0$ ).

**Bemerkung:** Ist $u \mapsto \begin{bmatrix} x(u) \\ z(u) \end{bmatrix}$ eine parametrische Kurve in der $xz$-Ebene, so ist durch $(u,v) \mapsto \begin{bmatrix} x(u)\cos(v) \\ x(u)\sin(v) \\ z(u) \end{bmatrix}$, $0 \le v \le 2\pi$ jene Drehfläche parametrisiert, die entsteht, wenn man obige Kurve um die $z$-Achse rotiert!

47) Für die durch $u \mapsto \begin{bmatrix} e^u \\ u \end{bmatrix}$, $-1 \le u \le 1$ (Teil der Exponentialfunktion) entstandene Drefläche $\vec{X}(u,v)$ gilt:

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} e^u\cos(v) \\ e^u\sin(v) \\ u \end{bmatrix}, \vec{X}_u = \begin{bmatrix} e^u\cos(v) \\ e^u\sin(v) \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{X}_v = \begin{bmatrix} -e^u\sin(v) \\ e^u\cos(v) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v = \begin{bmatrix} -e^u\cos(v) \\ -e^u\sin(v) \\ e^{2u} \end{bmatrix} = e^u \begin{bmatrix} -\cos(v) \\ -\sin(v) \\ e^u \end{bmatrix}, \vec{\nu} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2u}}} \begin{bmatrix} -\cos(v) \\ -\sin(v) \\ e^u \end{bmatrix}$$

Der Punkt $(1,0,0)$ entspricht den Parameterwerten $(u,v)$ aus dem Gleichungssystem

$$e^u\cos(v) = 1,\ e^u\sin(v) = 0,\ u = 0 \implies u = 0,\ v = 0$$

und hat deshalb den Normalvektor

$$\vec{N}(0,0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies -x + z = -1 + 0 = -1$$

Der Punkt $(0,1,0)$ entspricht analog den Parameterwerten $u = 0, v = \pi/2$ und hat deshalb den Normalvektor

$$\vec{N}(0,\pi/2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies -y + z = -1 + 0 = -1$$

,

48) Gegeben Sei die Fläche $\vec{X}(u,v) = [u+v, u-v, 2uv]^T$. Gesucht: Tangentialebene im Ursprung $\vec{0} = \vec{X}(0,0)$:

$$\vec{X}_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2v \end{bmatrix}, \vec{X}_v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2u \end{bmatrix}, \vec{N} = \vec{X}_u \times \vec{X}_v = \begin{bmatrix} 2u+2v \\ -2u+2v \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{N}(0,0) \sim \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Tangentialebene ist daher $z = 0$. Die $u$-Linien sind

$$u \mapsto \begin{bmatrix} u+v \\ u-v \\ 2uv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -v \\ 0 \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2v \end{bmatrix},$$

also Gerade, ebenso die $v$-Linien.