Ü B U N G E N   zu Mathematik 2   SS 2022

57) $\dot{x} = \dfrac{t}{x} \implies \dot{x}x = t \implies \int \dot{x}x\,dt = \int dt \implies \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{t^2}{2} + c \implies x^2 = t^2 + c$ (Hyperbelschar mit den Koordinatenachsen als Symmetrieachsen). Die einzelnen Hyperbeläste, die als Lösungen in Frage kommen, sind $x = \pm\sqrt{t^2 + c}$. Die Auswahl des Astes erfolgt durch das Vorzeichen des Anfangswertes:

$$
\begin{aligned}
x(0) = 2: &\qquad 2 = \sqrt{c} \implies c = 4 \implies x = \sqrt{t^2+4} \\
x(0) = 1: &\qquad 1 = \sqrt{c} \implies c = 1 \implies x = \sqrt{t^2+1} \\
x(0) = -1: &\qquad -1 = -\sqrt{c} \implies c = 1 \implies x = -\sqrt{t^2+1}
\end{aligned}
$$

58) $\dot{x} = -\dfrac{t}{x} \implies x\dot{x} = -t \implies \int x\dot{x}\,dt = -\int t\,dt \implies x^2/2 = -t^2/2 + c \implies x^2 + t^2 = 2c = C$ (Kreisbögen um den Ursprung). Das Vorzeichen des Anfangswertes bestimmt das Vorzeichen in $x = \pm\sqrt{c - t^2}$:

$$
\begin{aligned}
x(0) = R = 1: &\qquad 1 = \sqrt{c} \implies c = 1 \implies x = \sqrt{1-t^2},\ t \in [-1,1] \\
x(0) = R = 2: &\qquad 2 = \sqrt{c} \implies c = 4 \implies x = \sqrt{4-t^2},\ t \in [-2,2] \\
x(0) = R = -1: &\qquad -1 = -\sqrt{c} \implies c = 1 \implies x = -\sqrt{1-t^2},\ t \in [-1,1]
\end{aligned}
$$

59) $\dot{x} = 1 + x^2 \implies \dfrac{\dot{x}}{1+x^2} = 1 \implies \int \dfrac{\dot{x}}{1+x^2} = \int dt \implies \arctan(x) = t + c \implies x = \tan(t + c)$. Mit $x(0) = 0 \implies 0 = \tan(c) \implies c = k\pi$ erhält man die Lösung $x(t) = \tan(t + k\pi) = \tan(t)$ für $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, mit $x(\pi/2) = 0 = \tan(\pi/2 + c) \implies c = -\pi/2 + k\pi$ ist die Lösung $x(t) = \tan(t - \pi/2 + k\pi) = \tan(t - \pi/2) = -\cot(t)$ für $t \in (0, \pi)$.

60) Mit der Substitution $y = z'$ erhält man die Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$y' = \sqrt{1-y^2} \implies \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 1 \implies \arcsin(y) = x + c \implies y = \sin(x+c).$$

Man kann sofort den Anfangswert für y einsetzen:

$$y(0) = 0 \implies 0 = \sin(c) \implies c = 0 \implies y = \sin(x)$$

und damit weiterrechnen:

$$z = -\cos(x) + d : \qquad 0 = -1 + d \implies d = 1 \implies z = 1 - \cos(x),$$

oder sofort integrieren und dann beide Anfangswerte von z verwenden:

$$z = -\cos(x+c) + d \ \text{ und } 0 = -\cos(c) + d,\ 0 = \sin(c)\ldots$$

Ü B U N G E N zu Mathematik 2 SS 2022

61) $\dot{x} + 3x = e^t$. Die Lösung der homogenen Gleichung ist mit Trennung der Variablen:

$$\dot{x}_h + 3x_h = 0 \implies \frac{\dot{x}_h}{x_h} = -3 \implies \log(x_h) = -3t + c \implies x_h = e^c \cdot e^{-3t} = Ce^{-3t}$$

oder mit Exponentialansatz:

$$x_h = e^{\lambda t} \implies \lambda + 3 = 0 \implies \lambda = -3 \implies x = ce^{-3t}$$

1) Ansatz für partikuläre Lösung für e^t (keine Resonanz!):

$$x_p = c \cdot e^t \implies \dot{x}_p + 3x_p = (c + 3c) \cdot e^t = 1 \cdot e^t \implies 4c = 1 \implies c = \frac{1}{4}$$

Die allgemeine Lösung ist daher $x = x_h + x_p = ce^{-3t} + \frac{1}{4}e^t$.
2) Variation der Konstanten: Ansatz: $x(t) = c(t) \cdot e^{-3t}$ löse die inhomogene DG:

$$e^t = \dot{x} + 3x = (\dot{c} \cdot e^{-3t} + c \cdot (-3)e^{-3t}) + 3ce^{-3t} = \dot{c} \cdot e^{-3t}$$

daraus folgt:

$$\dot{c} = e^{4t} \implies c = \frac{1}{4}e^{4t} + C \implies x(t) = \frac{1}{4}e^t + C \cdot e^{-3t}$$

C bestimmt man aus der Anfangsbedingung:

$$0 = x(0) = C + \frac{1}{4} \implies C = -\frac{1}{4} \implies x(t) = \frac{1}{4}(e^t - e^{-3t})$$

62) Das charakteristische Polynom erhält man aus dem Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t} : \ \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Die allgemeine Lösung ist daher $x(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{2t}$. Aus den Anfangs- oder Randbedingungen bestimmt man die Konstanten:

$$\begin{array}{ll} (I) & 1 = x(0) = c_1 + c_2 \\ (II) & 0 = \dot{x}(0) = c_1 + 2c_2 \end{array}$$

mit den Lösungen $c_1 = 2$ und $c_2 = -1$.

63) a) Das charakteristische Polynom von $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 5x(t) = 0$ ist

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \implies \lambda = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i.$$

Es liefert die allgemeine komplexe Lösung

$$x(t) = c_1 \cdot e^{(-1+2i)t} + c_2 \cdot e^{(-1-2i)t} = e^{-t}(c_1 \cdot e^{2it} + c_2 \cdot e^{-2it}).$$

b) Mit $c_1 = c_2 = \dfrac{1}{2}$ erhält man die reelle Lösung $e^{-t}\dfrac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} = e^{-t}\cos(2t)$ und mit $c_1 = -c_2 = \dfrac{1}{2i}$ erhält man die reelle Lösung

$$x(t) = e^{-t}\frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i} = e^{-t}\sin(2t).$$

Die allgemeine Lösung in der reellen Form ist $x(t) = e^{-t}\cdot(d_1\cdot\cos(2t)+d_2\cdot\sin(2t))$.

c) Das Anfangswertproblem $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -1$ führt zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (I) \qquad & 1 = x(0) = d_1 \\ (II) \qquad & -1 = \dot{x}(0) = -d_1 + 2d_2 \end{aligned}$$

mit den Lösungen $d_1 = 1$ und $d_2 = 0$ und $x(t) = e^{-t}\cos(2t)$.

64)

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 0 \implies \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \implies \lambda = -1 \pm \sqrt{1+3} \implies$$
$$\lambda \in \{-3, 1\} \implies x(t) = c_1 \cdot e^{-3t} + c_2 \cdot e^t$$
$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 10x = 0 \implies \lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0 \implies \lambda = -1 \pm \sqrt{1-10} \implies$$
$$\lambda \in \{-1 \pm 3i\} \implies x(t) = e^{-t} \cdot (d_1 \cdot \cos(3t) + d_2 \cdot \sin(3t))$$
$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 \implies \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = -1 \pm \sqrt{1-1} \implies$$
$$\lambda \in \{-1\} \implies x(t) = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot te^{-t}$$
$$\ddot{x} + 2\dot{x} = 0 \implies \lambda^2 + 2\lambda = 0 \implies$$
$$\lambda \in \{-2, 0\} \implies x(t) = c_1 \cdot e^{-2t} + c_2 \cdot e^{0t} = c_1 \cdot e^{-2t} + c_2$$