Ü B U N G E N   zu Mathematik 2   SS 2022

Übungsblatt 9:

65) Plots

66) Lösung des Anfangswertproblems $\ddot{x}+9x=0,\ x(0)=2,\ \dot{x}(0)=6:$

$$\lambda^2+9=0 \implies \lambda=\pm 3i \implies x(t)=d_1\cos(3t)+d_2\sin(3t).$$

Das Anfangswertproblem $x(0)=2$, $\dot{x}(0)=6$ führt zum Gleichungssystem

$$\begin{array}{ll} (I) & 2=x(0)=d_1 \\ (II) & 6=\dot{x}(0)=3d_2 \end{array}$$

und zur Lösung $x(t)=2\cos(3t)+2\sin(3t)$. Die gesuchte Darstellung als $A\cos(\omega t-\varepsilon)$ zerlegt man per Summensatz und macht einen Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} 2\cdot\cos(3t)+2\cdot\sin(3t) &= A\cos(\omega t-\varepsilon)=A(\cos(\omega t)\cos(\varepsilon)+\sin(\omega t)\sin(\varepsilon)) \\ &= (A\cos(\varepsilon))\cdot\cos(\omega t)+(A\sin(\varepsilon))\cdot\sin(\omega t) \end{aligned}$$

und man sieht: $\omega=3$, $A\cos(\varepsilon)=2$ und $A\sin\varepsilon=2$ und ε liegt im 1. Quadranten. Um A und ε zu berechnen, quadriert und addiert man die beiden Beziehungen:

$$A^2\sin(\varepsilon)^2+A^2\cos(\varepsilon)^2=2^2+2^2=8 \implies A^2=8 \implies A=2\sqrt{2}$$

und dividiert die 2 Gleichungen:

$$\frac{A\sin(\varepsilon)}{A\cos(\varepsilon)}=\tan(\varepsilon)=\frac{2}{2}=1 \implies \varepsilon=\frac{\pi}{4}$$

67) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = \sin(3t)$. Das charakteristische Polynom ist $\chi = \lambda^2 + 2\lambda - 5$ mit den Nullstellen $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$. Bei linearen Diffentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und Inhomogenitäten der Form $\text{Polynom}(t) \cdot e^{\mu t}$ macht man einen Ansatz der Form

$$x_p = \text{ähnliches Polynom} \cdot t^{\text{algebraische Vielfachheit von } \mu} \cdot e^{\mu t}.$$

ähnliches Polynom ist ein unbestimmtes Polynom vom selben Grad wie das Polynom der Inhomogenität. $\sin(3t) = \dfrac{e^{3it} + e^{-3it}}{2i}$, sodass wir 2 Inhomogenitäten der Form $e^{\mu t}\cdot$Polynom rechts stehen haben, einmal mit $\mu = 3i$ und einmal mit $\mu = -3i$. Beides sind keine Nullstellen von χ (also keine Resonanz, die Vielfachheit ist 0). Das Polynom ist jeweils eine Konstante, sodass das ähnliche Polynom auch eine Konstante sein muss. Wir machen den Ansatz $x_p(t) = ae^{3it} + be^{-3it}$ in komplexer Form oder aber den äquivalenten rellen Ansatz $x_p(t) = c_1 \sin(3t) + c_2 \cos(3t)$, $\dot{x}_p = 3c_1 \cos(3t) - 3c_2 \sin(3t)$ und $\ddot{x}_p = -9c_1 \sin(3t) - 9c_2 \cos(3t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_p + 2\dot{x}_p + 5x_p &= [-9c_1 - 6c_2 + 5c_1] \sin(3t) + [-9c_2 + 6c_1 + 5c_2] \cos(3t) \\ &= 1 \sin(3t) + 0 \cos(3t) \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (I) \qquad & 1 = -4c_1 - 6c_2 \\ (II) \qquad & 0 = 6c_1 - 4c_2 \end{aligned}$$

mit den Lösungen $c_1 = -\dfrac{1}{13}$ und $c_2 = -\dfrac{3}{26}$.

68) Lösung des Anfangswertproblems $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = \sin(3t),\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = -1$: Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist nach dem vorigen Beispiel

$$x(t) = e^{-t}(d_1 \cos(2t) + d_2 \sin(2t)) - \frac{1}{13}\sin(3t) - \frac{3}{26}\cos(3t).$$

Das Anfangswertproblem $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -1$ führt zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= x(0) = d_1 - \frac{3}{26} \\ -1 &= \dot{x}(0) = -d_1 + 2d_2 - \frac{3}{13} \end{aligned}$$

und zur Lösung $x(t) = e^{-t}(\dfrac{29}{26}\cos(2t) + \dfrac{9}{52}\sin(2t)) - \dfrac{1}{13}\sin(3t) - \dfrac{3}{26}\cos(3t)$.

69) $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 10x(t) = 0$ hat das charakteristische Polynom $\chi = \lambda^2 + 2\lambda + 10$ mit den Nullstellen $\lambda = -1 \pm \sqrt{1-10} = -1 \pm 3i$. Die allgemeine Lösung ist daher $x_h(t) = e^{-t}(d_1 \cos(3t) + d_2 \sin(3t))$. Diese Lösungen verschwinden für $t \to \infty$, d.h. die stationäre Lösung ist die noch zu bestimmende partikuläre Lösung! Für die rechte Seite $\cos(t)$ macht man analog zu Beispiel 73) den Ansatz $x_p(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_p(t) + 2\dot{x}_p(t) + 10x_p(t) &= (-a + 2b + 10a)\cos(t) + (-b - 2a + 10b)\sin(t)\\ &= 1 \cdot \cos(2t) + 0 \cdot \sin(2t) \implies\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}9a + 2b &= 1\\ -2a + 9b &= 0 \implies a = \frac{9}{85},\ b = \frac{2}{85}.\end{aligned}$$

Aus $a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t - \varepsilon) = A\cos(t)\cos(\varepsilon) + A\sin(t)\sin(\varepsilon)$ folgt wieder $a = A\cos(\varepsilon)$ und $b = A\sin(\varepsilon)$ und ε liegt im 1. Quadranten: Die Amplitude ist $A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{81}{85^2} + \frac{4}{85^2}} = \frac{1}{\sqrt{85}}$ und die Phasenverschiebung $\tan(\varepsilon) = \frac{b}{a} = 8 \implies \varepsilon = \arctan(\frac{2}{9})$.

70) $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) - 6x(t) = 0$ hat das charakteristische Polynom $\chi = \lambda^2 + \lambda - 6$. Die Inhomogenität ist von der Form Quadratisches Polynom $\cdot e^{0t}$, weshalb der Ansatz $x_p = at^2 + bt + c$ Erfolg verspricht:

$$\ddot{x}_p + \dot{x}_p - 6x_p = 2a + (2at + b) - 6(at^2 + bt + c) = t^2 \cdot (-6a) + t \cdot (2a - 6b) + (2a + b - 6c)$$

Der Koeffizientenvergleich hat die Lösung $a = -\frac{1}{6},\ b = -\frac{7}{18},\ c = \frac{5}{108}$

71) Um eine partikuläre Lösung von $\ddot{x}(t)+4x(t) = t$ zu finden ($\chi = \lambda^2+4 \implies \lambda = \pm 2i$), kann man einen Ansatz oder die Variation der Konstanten machen:

a) Ansatz: $x_p = at + b$ (Polynom ersten Grades:

$$\ddot{x}_p(t) + 4x_p(t) = 4at + b = t \implies a = \frac{1}{4},\ b = 0,\ x_p = \frac{t}{4}.$$

b) Variation der Konstanten: Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist $x_h(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t)$. Also macht man für die Lösung der inhomogenen Gleichung den Ansatz

$$x(t) = a(t)\cos(2t) + b(t)\sin(2t).$$

Durch Differenzieren erhält man

$$\dot{x}(t) = \dot{a}(t)\cos(2t) - 2a(t)\sin(2t) + \dot{b}(t)\sin(2t) + 2b(t)\cos(2t).$$

Durch die willkürliche Wahl $\dot{a}(t)\cos(2t) + \dot{b}(t)\sin(2t) = 0$ vereinfacht sich das zu

$$\dot{x}(t) = -2a(t)\sin(2t) + 2b(t)\cos(2t).$$

Man differenziert das noch einmal:

$$\ddot{x}(t) = -2\dot{a}(t)\sin(2t) - 4a(t)\cos(2t) + 2\dot{b}(t)\cos(2t) - 4b(t)\sin(2t).$$

$$\ddot{x}(t) + 4x(t) = [-4a(t) + 2\dot{b}(t) + 4a(t)]\cos(2t) + [-2\dot{a}(t) - 4b(t) + 4b(t)]\sin(2t)]$$

Man bekommt daher folgendes Gleichungssystem für $a(t)$ und $b(t)$:

$$\dot{a}(t)\cos(2t) + \dot{b}(t)\sin(2t) = 0,\ 2\dot{b}(t)\cos(2t) - 2\dot{a}(t)\sin(2t) = t.$$

Dieses Gleichungssystem löst man nach $\dot{a}$ und $\dot{b}$ auf: Multipliziert man die 1. Gleichung mit $2\sin(2t)$, die 2. Gleichung mit $\cos(2t)$ und addiert:

$$\dot{b}(t)(2\sin(2t)^2 + 2\cos(2t)^2) = t\cos(2t) \implies b(t) = \frac{1}{2}t\cos(2t).$$

Das integriert man mittels partieller Integration:

$$b(t) = \frac{t}{4}\sin(2t) - \int \frac{1}{4}\sin(2t)\,dt = \frac{t}{4}\sin(2t) + \frac{1}{8}\cos(2t)$$

Multipliziert man die 1. Gleichung mit $2\cos(2t)$, die 2. Gleichung mit $\sin(2t)$ und subtrahiert:

$$\dot{a}(t)(2\sin(2t)^2 + 2\cos(t)^2) = -t\sin(t) \implies a(t) = -\frac{1}{2}t\sin(2t).$$

Das integriert man analog:

$$a(t) = \frac{t}{4}\cos(2t) - \int \frac{1}{4}\cos(2t)\,dt = \frac{t}{4}\cos(2t) - \frac{1}{8}\sin(2t)$$

Die partikuläre Lösung ist somit

$$x_p(t) = [\frac{t}{4}\cos(2t) - \frac{1}{8}\sin(2t)]\cos(2t) + [\frac{t}{4}\sin(2t) + \frac{1}{8}\cos(2t)]\sin(2t) = \frac{t}{4}.$$

72) Man multipliziert die Federgleichung $0 = \ddot{x}(t) + x(t) + 2c \cdot x(t)^3$ mit $\dot{x}(t)$:

$$0 = \ddot{x}(t) \cdot \dot{x}(t) + \dot{x}(t) \cdot x(t) + 2c\dot{x}(t) \cdot x(t)^3 = \frac{d}{dx}(\dot{x}(t)^2/2 + x(t)^2/2 + cx(t)^4/2)$$

und erhält daraus

$$d = \dot{x}(t)^2 + x(t)^2 + c \cdot x(t)^4 \implies \dot{x}(t)^2 = d - x(t)^2 - c \cdot x(t)^4$$

Die Anfangsbedingungen sind $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0)^2 = 1 = d - 0 - 0 \implies d = 1$.