DIPLOMARBEIT

Die Homologie von

Modulräumen

Riemannscher Flächen

- Berechnungen für $g\leq 2$

Angefertigt am Mathematischen Institut

Vorgelegt der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Januar 2005

von

Jochen Abhau

aus

Mülheim an der Ruhr

Inhaltsverzeichnis

0	Einl	eitung	2
1	Gru	ndlagen	6
	1.1	Der Raum der Parallelschlitzgebiete	6
	1.2	Die Zellenzerlegung	10
	1.3	Alternative Beschreibung von Zellen	14
2	Bise	emisimpliziale Mengen, Homologie mit lokalen Koeffizientensy-	
	sten	nen	18
	2.1	Simpliziale, semisimpliziale und bisemisimpliziale Objekte	18
	2.2	Lokale Koeffizientensysteme	22
	2.3	Homologie von bisemisimplizialen Mengen	24
	2.4	Einige Resultate zu den Spektralsequenzen	27
3	Ein	Orientierungssystem für ${\mathbb B}$	29
	3.1	Das Konzept	29
	3.2	Die top-Funktion	36
	3.3	Eine Normalform für höchstdimensionale Zellen	39
4	Smi	th-Normalform und LLL	47
	4.1	Die Smith-Normalform	47
	4.2	Algorithmen zur Smith-Normalform	48
	4.3	LLL-reduzierte Gitter	51
	4.4	Der ganzzahlige LLL-Algorithmus für beliebige Erzeugendensysteme	54
	4.5	Einsatz von LLL	58
5	\mathbf{Res}	ultate	59
\mathbf{Li}	terat	urverzeichnis	72

Kapitel 0 Einleitung

In dieser Diplomarbeit wird der Modulraum $\mathfrak{M}_{g,1}^c$ Riemannscher Flächen mit genau einer Randkurve und c Punktierungen betrachtet. Der Raum $\mathfrak{M}_{g,1}^c$ ist homotopieäquivalent zu einem Konfigurationsraum $\mathfrak{Par}(h,c)$ welcher aus Rechtecken in der komplexen Ebene besteht, die auf bestimmte Art und Weise miteinander verklebt werden. Dabei ist $g = \frac{h-c}{2}$. Der Raum $\mathfrak{Par}(h,c)$ besitzt eine naheliegende Kompaktifizierung Par(h,c), die zusammen mit der Peripherie W(h,c) eine relative Mannigfaltigkeit (Par(h,c), W(h,c)) bildet. Die Räume Par(h,c) und W(h,c) sind endlichdimensionale Zellkomplexe von Dimension 3h-3 bzw. 3h-4. Details finden sich dazu in den Arbeiten von Bödigheimer, [Bö1] bis [Bö6]. Der Raum (Par(h,c), W(h,c)) ist nach [Mül] für c = 0, 1 orientierbar und für $c \geq 2$ nicht orientierbar. Mittels Poincaré-Lefschetz-Dualität läßt sich darüber die Homologie von $\mathfrak{M}_{g,1}^c$ berechnen. Dies wurde in [Eh1] und [Eh2] für die Räume $\mathfrak{M}_{0,1}^2, \mathfrak{M}_{0,1}^3, \mathfrak{M}_{0,1}^4, \mathfrak{M}_{1,1}^1$ und $\mathfrak{M}_{2,1}^0$ getan, je nach Wert von c mit Koeffizienten in \mathbb{Z} oder \mathbb{Z}_2 .

In der vorliegenden Arbeit wird nun ein anderer Zugang als in [Eh1] zum Raum $\mathfrak{Par}(h,c)$ über Permutationen, wie in [Bö7] beschrieben, aufgegriffen. Das Problem der Nichtorientierbarkeit von $(\operatorname{Par}(h,c), W(h,c))$ wird durch Rechnung mit Werten in einem lokalen Koeffizientensystem gelöst. Dadurch läßt sich die Homologie von $\mathfrak{M}_{g,1}^c$ ganzzahlig berechnen. Die Homologieberechnungen mit einem Computerprogramm sind für h = 5 ohne spezielle Hilfsmittel undurchführbar, da bei ganzzahligen Berechnungen der Smith-Normalform der auftretenden Matrizen eine Koeffizienten-explosion eintritt. Daher benutzen wir ein Gitterreduktionsverfahren, welches nur mit ganzen Zahlen arbeitet und die Homologieberechnungen für den Fall h = 5 ermöglicht. Diese Ideen wurden in einem Computerprogramm realisiert, welches sich auf der beiliegenden CD befindet und in kommentierter Form im Anhang abgedruckt ist. Damit läßt sich der Hauptsatz der vorliegenden Arbeit beweisen:

Satz. Für die ganzzahlige Homologie der Modulräume $\mathfrak{M}_{0,1}^2, \mathfrak{M}_{0,1}^3, \mathfrak{M}_{0,1}^4, \mathfrak{M}_{0,1}^5, \mathfrak{M}_{1,1}^0, \mathfrak{M}_{1,1}^1, \mathfrak{M}_{1,1}^2, \mathfrak{M}_{1,1}^3, \mathfrak{M}_{2,1}^0$ und $\mathfrak{M}_{2,1}^1$ gilt:

$$\begin{split} H_n\left(\mathfrak{M}_{0,1}^2;\mathbb{Z}\right) &= \begin{cases} \mathbb{Z} \quad n = 0, 1\\ 0 \quad n \geq 2 \end{cases} \qquad H_n\left(\mathfrak{M}_{0,1}^3;\mathbb{Z}\right) = \begin{cases} \mathbb{Z} \quad n = 0, 1\\ 0 \quad n \geq 2 \end{cases} \\ H_n\left(\mathfrak{M}_{0,1}^4;\mathbb{Z}\right) &= \begin{cases} \mathbb{Z} \quad n = 0, 1\\ \mathbb{Z}_2 \quad n = 2\\ 0 \quad n \geq 3 \end{cases} \qquad H_n\left(\mathfrak{M}_{0,1}^5;\mathbb{Z}\right) = \begin{cases} \mathbb{Z} \quad n = 0, 1\\ \mathbb{Z}_2 \quad n = 2\\ 0 \quad n \geq 3 \end{cases} \\ H_n\left(\mathfrak{M}_{1,1}^0;\mathbb{Z}\right) &= \begin{cases} \mathbb{Z} \quad n = 0, 1\\ 0 \quad n \geq 2 \end{cases} \qquad H_n\left(\mathfrak{M}_{1,1}^1;\mathbb{Z}\right) = \begin{cases} \mathbb{Z} \quad n = 0, 1\\ \mathbb{Z}_2 \quad n = 2\\ 0 \quad n \geq 3 \end{cases} \\ H_n\left(\mathfrak{M}_{1,1}^2;\mathbb{Z}\right) &= \begin{cases} \mathbb{Z} \quad n = 0, 1\\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \quad n = 1\\ \mathbb{Z}_2^2 \quad n = 2\\ \mathbb{Z}_2 \quad n = 3\\ 0 \quad n \geq 4 \end{cases} \qquad H_n\left(\mathfrak{M}_{1,1}^3;\mathbb{Z}\right) &= \begin{cases} \mathbb{Z} \quad n = 0\\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \quad n = 1\\ \mathbb{Z}_2^2 \quad n = 2\\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^2 \quad n = 3\\ \mathbb{Z} \quad n = 4, 5\\ 0 \quad n \geq 6 \end{cases} \\ H_n\left(\mathfrak{M}_{2,1}^0;\mathbb{Z}\right) &= \begin{cases} \mathbb{Z} \quad n = 0\\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \quad n = 3\\ \mathbb{Z}_2 \quad n = 2\\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \quad n = 3\\ \mathbb{Z}_2 \quad n = 3\\ \mathbb{Z}_2 \quad n = 4, 5\\ 0 \quad n \geq 6 \end{cases} \\ H_n\left(\mathfrak{M}_{2,1}^1;\mathbb{Z}\right) &= \begin{cases} \mathbb{Z} \quad n = 0\\ \mathbb{Z}_1 \quad n = 1\\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \quad n = 2\\ \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_2^2 \quad n = 3\\ \mathbb{Z}^2 \quad n = 4, 5\\ 0 \quad n \geq 5 \end{cases} \\ H_n\left(\mathfrak{M}_{2,1}^1;\mathbb{Z}\right) &= \begin{cases} \mathbb{Z} \quad n = 0\\ \mathbb{Z}_1 \quad n = 1\\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \quad n = 2\\ \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_2^2 \quad n = 3\\ \mathbb{Z}_2^2 \quad n = 4\\ \mathbb{Z} \quad n = 5, 6\\ 0 \quad n \geq 7 \end{cases} \end{cases}$$

Die Ergebnisse stimmen dabei mit denen aus [Eh1] und [Eh2], soweit sie dort berechnet worden sind, überein. Es ist anzunehmen, daß die Berechnungen für h = 6und beliebiges c von gleicher Parität ohne große Modifikationen des Programms auf leistungsstarken Großrechnern durchführbar sind. Das Hauptproblem numerischer Berechnungen für größeres h besteht in dem stark anwachsenden Speicherbedarf zur Abspeicherung der auftretenden Zellen und Matrizen. Um über den Fall h = 6 hinauszukommen, sind Ansätze nötig, welche die Größe der entstehenden Kettenkomplexe reduzieren. Dazu sind in Kapitel 2, Abschnitt 4 Ergebnisse über den E^0 -Term der auftretenden Spektralsequenz aus [Eh2] angegeben. Weitere Resultate zum E^1 -Term wären wünschenswert. Im folgenden soll eine **Kapitelübersicht** gegeben werden:

Im ersten Kapitel werden die grundlegenden Definitionen und Sätze angegeben. Dabei wird $\mathfrak{Par}(h,c)$, der Raum der Parallelschlitzgebiete, eingeführt als ein Tupel (a,b,σ) mit $a \in \mathbb{R}^q$, $b \in \mathbb{R}^p$ und σ ein Tupel von Permutationen, welche die Verklebung der durch a und b festgelegten Rechtecke definieren. Diese Darstellung hat gegenüber der in Abschnitt 3 angegebenen alternativen Beschreibung den Vorteil, daß man hier ohne Rauzy-Sprünge auskommt. In Abschnitt 2 geben wir eine Zellenzerlegung \mathbb{B} des Quotientenraums der Kompaktifizierung modulo der Peripherie an, welche wir zur Homologieberechnung in den weiteren Kapiteln genauer untersuchen.

Das zweite Kapitel dient zwei Aufgaben: Zum einen entwickeln wir zur Berechnung der Homologie von B eine Spektralsequenz im ersten Quadranten. Zum anderen beschreiben wir Homologie mit Werten in einem lokalen Koeffizientensystem, um später eine Form der Poincaré-Lefschetz-Dualität mit Koeffizienten in einem Orientierungssystem benutzen zu können. Beiden als Grundlage dient der Begriff einer bisemisimplizialen Menge. Wir beschließen das Kapitel mit einigen bereits bekannten Resultaten über die Spektralsequenz zu B aus [Eh2].

Das dritte Kapitel bildet den konstruktiven Hauptteil der Arbeit. Im ersten Abschnitt geben wir an, was ein Orientierungssystem ist und beschreiben ein solches für die bisemisimpliziale Menge B. Orientierungen, d.h. Vorzeichen, sollen zwischen einer Urbildzelle e und einer Bildzelle e' verteilt werden. Hierzu wird zunächst eine Funktion benötigt, welche einer Zelle eine höchstdimensionale Zelle zuordnet, deren Seite sie ist. Diese Funktion nennen wir top-Funktion und beschreiben sie im Abschnitt 2. Dann wird ein nullhomotoper Weg in der geometrischen Realisierung von $\mathbb B$ mit Aufpunkt in e' beschrieben, welcher über e zur höchstdimensionalen Zelle top(e) verläuft, dann durch benachbarte höchstdimensionale Zellen über e' zu top(e')geht und anschließend auf die Seite e' führt. Es ist dabei nicht direkt klar, wie der Teilweg von top(e) zu top(e') durch höchstdimensionale Zellen über e' zu verlaufen hat. Zu diesem Zweck beschreiben wir in Abschnitt 3 die Normalform einer höchstdimensionalen Zelle und für jede höchstdimensionale Zelle einen Weg, der von ihr zur Normalform verläuft. Entlang dieses Weges legen wir dann die Vorzeichen fest. Anschließend geben wir kurz an, wie sich Poincaré-Lefschetz-Dualität mit Werten in dem Orientierungssystem für (Par(h, c), W(h, c)) schreibt und dies ganzzahlige Berechnungen der Homologie von $\mathfrak{M}_{q,1}^c$ ermöglicht.

In Kapitel vier wenden wir uns der numerischen Behandlung der in den vorigen Kapiteln festgelegten Spektralsequenz zu. Die Randoperatoren müssen in Smith-Normalform überführt werden, um jeweils die Homologie der Komplexe ablesen zu können. Berechnungen für $h \geq 5$ führen dann aufgrund der Größe der auftretenden

Matrizen zu einer Koeffizientexplosion, da ganzzahlige Homologie bestimmt werden soll. Dem wirken wir in den Abschnitten 3 und 4 mit der Beschreibung eines Koeffizientenreduktionsalgorithmus entgegen. Dieser ganzzahlige LLL-Algorithmus für nicht notwendig linear unabhängige Erzeugendenvektoren wird angegeben und seine Korrektheit überprüft.

Die Ergebnisse der Berechnungen mit Hilfe des Computerprogramms sind in **Ka**pitel fünf aufgeführt. Dabei listen wir die Erzeugerzahlen des E^0 -Terms auf. Da der E^1 -Term sowohl bei Rechnung mit Werten im Orientierungssystem als auch ohne das Orientierungssystem ein Kettenkomplex in der höchsten Dimension q = hist, besteht auch der E^1 -Term aus freien abelschen Gruppen, deren Erzeugerzahlen wir angeben. Die Homologie der Horizontalen des E^1 -Terms bildet den E^2 -Term, den wir für die unterschiedlichen Koeffizientensysteme angeben. Ferner wird eine genauere Aufschlüsselung der Vertikalen des E^0 -Terms nach zueinander konjugierten Unterkomplexen, wie in Kapitel 2, Abschnitt 4 beschrieben, angegeben.

In **Kapitel sechs**, dem Anhang, ist das kommentierte Computerprogramm abgedruckt. Es wurde in C++ verfaßt und mit ihm wurden sämtliche Berechnungen durchgeführt. Es ist ferner auf beliebige Kettenkomplexe anwendbar, falls die Matrizen der Randoperatoren in einer bestimmten Form vorliegen, die im Anhang beschrieben wird.

An dieser Stelle freue ich mich, mich bei allen bedanken zu dürfen, die mir bei der Erstellung dieser Diplomarbeit geholfen haben. Zuvorderst ist hier Herr Prof. Bödigheimer zu nennen, der mit größtem Interesse und viel Aufmerksamkeit meine Arbeit betreut hat und mir wertvolle Hinweise gegeben hat. Ferner bedanke ich mich bei Prof. Franke für Anregungen zur numerischen Behandlung der auftretenden Kettenkomplexe. In diesem Kontext sei auch ein Dank ans Institut für Numerische Simulation um Prof. Griebel und Dr. Gerstner für die Bereitstellung der EDV ausgesprochen. Ferner möchte ich mich bei Helena Frick für Tips zum TEXen der Arbeit und fürs Korrekturlesen, und bei meinen Eltern für deren Unterstützung bedanken.

Januar 2005

Jochen Abhau

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel sollen grundlegende Definitionen und Sätze, die für die vorliegende Arbeit bedeutsam sind, vorgestellt werden. Einzelheiten finden sich in den Arbeiten von Bödigheimer [Bö1], [Bö2] und [Bö3]. Zusamenfassungen sind auch bei [Eh1] und [Mül] nachzulesen.

1.1 Der Raum der Parallelschlitzgebiete

Ist *I* eine Menge, so wollen wir unter $\mathfrak{S}(I)$ die symmetrische Gruppe auf der Menge *I* verstehen, ferner sei $\mathfrak{S}_p = \mathfrak{S}(\{1, \ldots, p\})$ und $\mathfrak{S}'_p = \{\sigma \in \mathfrak{S}(\{0, 1, \ldots, p\}) | \sigma(p) = 0\}$. Schreiben wir eine Permutation σ in der Form $\sigma = \langle a_1 \ldots a_n \rangle$, so bedeutet dies, daß σ ein Zykel ist mit $\sigma(a_1) = a_2, \ldots, \sigma(a_{n-1}) = a_n, \sigma(a_n) = a_1$. In diesem Sinne sei $\omega_p = \langle 0 \ 1 \ldots p \rangle \in \mathfrak{S}'_p$.

1.1.1 Definition. Seien $p, q \in \mathbb{N}$. Ein Parallelschlitzgebiet ist ein Tripel (a, b, σ) bestehend aus folgenden Daten:

- (i) $a = (a_q, \dots, a_1) \in \mathbb{R}^q$ mit $a_q < \dots < a_1$
- (ii) $b = (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p$ mit $b_1 < \dots < b_p$
- (iii) $\sigma = (\sigma_q, \dots, \sigma_0) \in \mathfrak{S}_p^{\prime q+1}$ mit $\sigma_0 = \omega_p$

Wir wollen diese Daten wie folgt geometrisch interpretieren:

Mit den Setzungen $a_0 = \infty, a_{q+1} = -\infty, b_0 = -\infty, b_{p+1} = \infty$ sei

$$Q_{i,j} = [a_{i+1}, a_i] \times [b_j, b_{j+1}] \subset \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{S}^2.$$

Dies skizzieren wir wie folgt:

	σ_q	σ_{q-1}		σ_1	σ_0
7	$Q_{q,p}$	$Q_{q-1,p}$		$Q_{1,p}$	$Q_{0,p}$
o_p	$Q_{q,p-1}$	$Q_{q-1,p-1}$		$Q_{1,p-1}$	$Q_{0,p-1}$
b_{p-1}					:
b_2	$Q_{q,1}$	$Q_{q-1,1}$		$Q_{1,1}$	$Q_{0,1}$
01	$Q_{q,0}$	$Q_{q-1,0}$		$Q_{1,0}$	$Q_{0,0}$
	C	a_q (a_{q-1} (a_2 (a_1

Die $Q_{i,j}$ sind also für 0 < i < q und 0 < j < p Rechtecke in \mathbb{C} , falls i = 0, q und 0 < j < p oder 0 < i < q und j = 0, p Dreiecke mit einer Ecke bei ∞ , und im Falle von i = 0, q und j = 0, p Zweiecke mit einer Ecke bei ∞ .

Die Permutationen haben dabei folgende Bedeutung:

Ist für $k, l \in \{0, \ldots, p\}$ nun $\sigma_i(k) = l$, so heißt dies, daß man $\hat{\mathbb{C}}$ entlang der abgeschlossenen Strecken von (a_{i+1}, b_{k+1}) bis (a_i, b_{k+1}) und von (a_{i+1}, b_l) bis (a_i, b_l) aufschneidet, und dann die Oberkante von $Q_{i,k}$ mit der Unterkante von $Q_{i,l}$ verklebt. Durch Hinzunahme von Punkten an den Enden wird der entstandene 2-Komplex kompaktifiziert. Auf diese Weise erhält man eine Fläche F(L). Präziser ausgedrückt bilden wir also zunächst

$$\tilde{F}(L) = \left(\coprod_{\substack{0 \leq i \leq q \\ 0 \leq j \leq p}} Q_{i,j} \right) / \text{Identifikationen}$$

mit den Identifikationen

- (1) Die abgeschlossene, horizontale Strecke von (a_{i+1}, b_{k+1}) bis (a_i, b_{k+1}) des Stückes $Q_{i,k}$ wird mit der abgeschlossenen, horizontalen Strecke von (a_{i+1}, b_l) bis (a_i, b_l) des Stückes $Q_{i,l}$ miteinander identifiziert, falls $\sigma_i(k) = l$ ist.
- (2) Die abgeschlossene, vertikale Strecke von (a_i, b_k) bis (a_i, b_{k+1}) des Stückes $Q_{i,k}$ wird mit der abgeschlossenen, vertikalen Strecke von (a_i, b_k) bis (a_i, b_{k+1}) des Stückes $Q_{i-1,k}$ miteinander identifiziert.

Anschließend bilden wir F(L) als Vereinigung von $\check{F}(L)$ und einer endlichen Menge von Punkten. Die Anzahl dieser Punkte werden wir später angeben. Wir wollen dies an einem Beispiel verdeutlichen.

1.1.2 Beispiel. Sei $a = (a_1) \in \mathbb{R}$, $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $b_1 < b_2$ und $\sigma_1 = \langle 0 \rangle$, $\sigma_0 = \omega_2 \in \mathfrak{S}'_2$ und $L = (a, b, (\sigma_1, \sigma_0))$. Aufschneiden und Verkleben im Sinne von $\sigma_0 = \omega_2$ führt nun keine Veränderung herbei. Wegen $\sigma_1(0) = 2$ muß die Oberkante von $Q_{1,0}$ mit der Unterkante von $Q_{1,2}$ verklebt werden, ebenso die Oberkante von $Q_{1,1}$ mit seiner eigenen Unterkante wegen $\sigma_1(1) = 1$.

Dieser Prozeß möge durch die beiden folgenden Diagramme verdeutlicht werden. Gleich markierte Linien werden dabei miteinander identifiziert.

L:



1.1.3 Bemerkung. Die Verklebungsdaten $\sigma_q, \ldots, \sigma_0 \in \mathfrak{S}'_p$ lassen sich auch hinreichend und notwendig durch Permutationen $\tau_q, \ldots, \tau_1 \in \mathfrak{S}_p \subset \mathfrak{S}(\{0, 1, \ldots, p\})$ beschreiben, wenn man

 $\tau_i = \sigma_i \sigma_{i-1}^{-1} \quad (i = 1, \dots, q),$ $\sigma_0 = \omega_n,$

und umgekehrt

$$\sigma_0 = \omega_p,$$

$$\sigma_i = \tau_i \sigma_{i-1} \quad (i = 1, \dots, q)$$

setzt. Dies führt zu einer alternativen Darstellung

$$L = (a, b, \tau)$$

für ein Parallelschlitzgebiet. In Anlehnung an die Bar-Auflösung einer topologischen Gruppe nennen wir $L = (a, b, \sigma)$ mit $\sigma \in \mathfrak{S}_p^{'q+1}$ die homogene Darstellung von L, und $L = (a, b, \tau)$ mit $\tau \in \mathfrak{S}_p^q$ die inhomogene Darstellung von L. Geometrisch besitzt die inhomogene Darstellung eines Parallelschlitzgebietes folgen-

de Interpretation:

	7	τ_q τ	$q-1$ τ	$\tau_2 = \tau$	1
7	$Q_{q,p}$	$Q_{q-1,p}$		$Q_{1,p}$	$Q_{0,p}$
b_p	$Q_{q,p-1}$	$Q_{q-1,p-1}$		$Q_{1,p-1}$	$Q_{0,p-1}$
b_{p-1}		:			:
b_2	$Q_{q,1}$	$Q_{q-1,1}$		$Q_{1,1}$	$Q_{0,1}$
o_1	$Q_{q,0}$	$Q_{q-1,0}$		$Q_{1,0}$	$Q_{0,0}$
	(a_q a_q	a_{q-1} d	a_2 a_2	a_1

Die Permutation τ_i kann man nun als Paarung der Punkte (a_i, b_j) , mit $j = 1, \ldots, p$ auffassen.

1.1.4 Definition. Ist $\alpha \in \mathfrak{S}_p$, so sei

$$\alpha = \langle i_1^{(1)}, \dots, i_{r_1}^{(1)} \rangle \langle i_1^{(2)}, \dots, i_{r_2}^{(2)} \rangle \dots \langle i_1^{(n)}, \dots, i_{r_n}^{(n)} \rangle$$

eine Zerlegung von α in seine disjunkten Zykel. Dann definieren wir als die Länge von α

$$l(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} r_j - n,$$

und als die Zykelzahl von α

$$\operatorname{cyc}(\alpha) = n.$$

Beide Definitionen sind unabhängig von der Wahl der Zykelzerlegung von α . Dabei ist $l(\alpha)$ also die Wortlänge von α in \mathfrak{S}_p in Bezug auf die Erzeugermenge der Transpositionen in \mathfrak{S}_p .

Ist jetzt $L = (a, b, \tau)$ ein Parallelschlitzgebiet in inhomogener Notation, mit $\tau = (\tau_q, \ldots, \tau_1)$, so definieren wir

$$\operatorname{norm}(L) = l(\tau_q) + \ldots + l(\tau_1), \text{ die Norm von } L$$

und

$$\operatorname{cyc}(L) = \operatorname{cyc}(\tau_q \cdot \ldots \cdot \tau_1) - 1$$
, die Zykelzahl von L.

1.1.5 Bemerkung. norm(L) und cyc(L) haben stets gleiche Parität, also norm(L) \equiv cyc(L) mod 2, und es ist $0 \leq$ cyc(L) \leq norm(L).

1.1.6 Bemerkung. Die Anzahl der Punkte, die man zur Konstruktion der Fläche F(L) an den Enden zur Kompaktifizierung hinzufügen muß, ist nun einfach die Zykelzahl von L.

1.1.7 Definition. Seien $h, c \in \mathbb{N}$. Damit sei

$$\mathfrak{Par}(h,c) = \mathfrak{Par}(h,c,1) =$$

 $\{L = (a, b, \sigma) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \times \mathfrak{S}_p^{'q+1} \text{ Schlitzdiagramm } | q \le h, p \le 2h, \operatorname{norm}(L) = h, \operatorname{cyc}(L) = c\}$

Dann ist $\mathfrak{Par}(h,c) \subset \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^{2h} \times \mathfrak{S}_{2h}^{\prime h+1}$, und erhält als Topologie die Relativtopologie, wobei $\mathfrak{S}_{2h}^{\prime h+1}$ diskret ist. Dieser Raum ist nicht kompakt, und wir kompaktifizieren ihn, indem wir Schlitzdiagramme hinzunehmen, für die die Einträge von a und bauch die Werte $a_q = -\infty$, $a_1 = \infty$, $b_1 = -\infty$ und $b_p = \infty$ annehmen dürfen. Wir nennen diese Kompaktifizierung $\operatorname{Par}(h, c)$. Damit ist $\operatorname{Par}(h, c)$ ein zusammenhängender und kompakter Raum, und $\mathfrak{Par}(h, c)$ ein offener, dichter Teilraum. Dessen Komplement

$$W(h,c) = Par(h,c) \setminus \mathfrak{Par}(h,c).$$

nennen wir Peripherie.

Über diese Räume stehen uns nach [Bö1] bis [Bö3] folgende Aussagen zur Verfügung:

- $\mathfrak{Par}(h, c)$ ist eine Mannigfaltigkeit.
- $\mathfrak{Par}(h,c)$ ist homotopieäquivalent zu $\mathfrak{M}_{a,1}^c$ mit $g = \frac{h-c}{2}$
- (Par(h, c), W(h, c)) ist eine relative Mannigfaltigkeit.

Ferner gilt nach [Mül], daß (Par(h, c), W(h, c)) orientierbar ist für c = 0, 1 und nicht orientierbar ist für $c \ge 2$. Dies gibt uns die Möglichkeit, mittels Poincaré-Dualität die Kohomologie der Modulräume Riemannscher Flächen vom Geschlecht g, mit einer Randkurve und c Punktierungen, über die Homologie des Paares (Par(h, c), W(h, c)) auszurechnen. Wegen nicht vorhandener Orientierbarkeit von (Par(h, c), W(h, c)) für $c \ge 2$ kann dies jedoch im Falle $c \ge 2$ nur mit Koeffizienten in \mathbb{Z}_2 erfolgen. Um dennoch ganzzahlige Homologie berechnen zu können, betrachten wir in Kapitel 2 lokale Koeffizientensysteme und führen dort und in Kapitel 3 die Details aus. Vorher jedoch wollen wir die Zellstruktur von Par(h, c)/W(h, c) beschreiben.

1.2 Die Zellenzerlegung

Par(h, c) ist ein Zellkomplex der Dimension 3h-3 und W(h, c) ein Unterkomplex von Kodimension 1. Wir wollen die Struktur des Quotientenkomplexes Par(h, c)/W(h, c) näher untersuchen.

Wir setzen

$$\sim : \mathbb{R} \to]0,1[, x \mapsto \tilde{x} = \frac{1}{\pi} arctan(x) + \frac{1}{2}$$

Diese Arcustangens-Transformation ist ein streng monoton wachsender Homöomorphismus zwischen \mathbb{R} und]0, 1[.

Seien nun p, q > 0 und

 $L = ((a_q, \ldots, a_1), (b_1, \ldots, b_p), (\sigma_q, \ldots, \sigma_0))$

ein Parallelschlitzgebiet in homogener Darstellung. Bildet man

$$s_0 = 1 - \tilde{a}_1, s_i = \tilde{a}_i - \tilde{a}_{i+1}$$
 für $1 \le i \le q-1$ und $s_q = \tilde{a}_q$

für die rellen Koordinaten von L und

$$t_0 = \tilde{b}_1, t_j = \tilde{b}_{j+1} - \tilde{b}_j$$
 für $1 \le j \le p - 1$ und $t_p = 1 - \tilde{b}_p$

für die imaginären Koordinaten von L, so gilt

$$\sum_{i=0}^{q} s_i = 1 = \sum_{j=0}^{p} t_j.$$

Daher kann man die Tupel $(s_i)_{0 \le i \le q}$ und $(t_j)_{0 \le j \le p}$ als baryzentrische Koordinaten eines Punktes im offenen Bisimplex $\mathring{\Delta}^p \times \mathring{\Delta}^q$ auffassen. Wir fixieren nun σ und setzen

$$e = \{L = (a, b, \sigma) \mid a \in \mathbb{R}^q, b \in \mathbb{R}^p, a_q < \ldots < a_1, b_1 < \ldots < b_p\} \subset \operatorname{Par}(h, c) / W(h, c),$$

für $h = \operatorname{norm}(L)$, $c = \operatorname{cyc}(L)$ unter Beachtung der Tatsache, daß diese beiden Werte nur von σ abhängen. Damit erhalten wir einen Homöomorphismus zwischen e und $\mathring{\Delta}^p \times \mathring{\Delta}^q$. Ein solches e ist dann eine Zelle von P(h, c)/W(h, c).

Da die Permutationen $\sigma_q, \ldots, \sigma_0$ die Zelle *e* eindeutig bestimmen, schreiben wir

$$e = (\sigma_q : \ldots : \sigma_0)$$

zur homogenen Darstellung von e, und

$$e = (\tau_q | \dots | \tau_1)$$

zur inhomogenen Darstellung von e, falls $\tau_i = \sigma_i \sigma_{i-1}^{-1}$. Die Zellen besitzen einen Bigrad (p,q). Offensichtlich sind Norm und Zykelzahl einer Zelle e über den Wert eines Repräsentanten wohldefiniert. Dann ist stets

$$1 \le p \le 2 \cdot \operatorname{norm}(e) \text{ und } 1 \le q \le \operatorname{norm}(e).$$

Wir halten obige Zellen fest in

$$\mathbb{B} = \mathbb{B}_{*,*} = \{ e \mid e \subset \operatorname{Par}(h,c) / W(h,c) \text{ ist eine Zelle, } h, c \ge 1 \}$$

und

$$\mathbb{B}_{p,q} = \{ e \in \mathbb{B} \mid e \text{ hat Bigrad } (p,q) \}.$$

Wir beschreiben nun die Seitenoperatoren des Zellkomplexes \mathbb{B} . Sei $e = (\sigma_q, \ldots, \sigma_0) \in \mathbb{B}_{p,q}, p, q \ge 0.$

1.2.1 Definition. Für i = 1, ..., q - 1 ist

$$\partial'_i : \mathbb{B}_{p,q} \to \mathbb{B}_{p,q-1}, \ (\sigma_q, \dots, \sigma_0) \mapsto (\sigma_q, \dots, \hat{\sigma}_i, \dots, \sigma_0)$$

der i-te vertikale Seitenoperator.

Geometrisch bewirkt er, daß der *i*-te vertikale Streifen eines Schlitzdiagramms, welches die Zelle repräsentiert, zusammengeschoben wird.

σ_q		σ_i	σ_0		σ_q		σ_{i+1}	σ_{i-1}		σ_0
$Q_{q,p}$		$Q_{i,p}$	 $Q_{0,p}$		$Q_{q,p}$		$Q_{i+1,p}$	$Q_{i-1,p}$		$Q_{0,p}$
		$\rightarrow \leftarrow$								
÷	÷			$\stackrel{\partial_{i}^{'}}{\longmapsto}$	÷	:			÷	÷
		$\rightarrow \leftarrow$								
$Q_{q,0}$		$Q_{i,0}$	 $Q_{0,0}$	•	$Q_{q,0}$		$Q_{i+1,0}$	$Q_{i-1,0}$		$Q_{0,0}$

Für den j-ten horizontalen Seitenoperator sei zunächst die geometrische Situation vorgestellt. Er soll das Zusammenschieben des j-ten horizontalen Streifens bewirken.

				σ_q		σ_0
σ_q	l	σ_0		$Q_{q,p}$		$Q_{0,p}$
$Q_{q,p}$		$Q_{0,p}$:		:
÷		÷				
Qai	↓ ↓	$Q_{0,i}$	$\partial_i^{"}$	$Q_{q,j+1}$		$Q_{0,j+1}$
- <i>vq</i> , <i>j</i>	<u>↑</u>	- 0,j	-	$Q_{q,j-1}$		$Q_{0,j-1}$
:		:		:		
$Q_{q,0}$		$Q_{0,0}$				
	1	1		$Q_{q,0}$	•••	$Q_{0,0}$

Zu seiner algebraischen Beschreibung ist eine kleine Vorbereitung nötig. Wir definieren hierzu für $j = 1, \ldots, p-1$ Abbildungen $D_j : \mathfrak{S}'_p \to \mathfrak{S}'_{p-1}$. Dazu setzen wir

$$\epsilon_i: \{0, \dots, p\} \to \{0, \dots, p-1\}, j \mapsto \begin{cases} j & \text{falls } j < i \\ j+1 & \text{falls } j \ge i \end{cases}$$

und

$$\eta_i: \{0, \dots, p-1\} \to \{0, \dots, p\}, j \mapsto \begin{cases} j & \text{falls } j \le i \\ j-1 & \text{falls } j > i \end{cases}.$$

Damit sei

$$D_j(\sigma) = \epsilon_j \circ \langle \sigma(j), j \rangle \circ \sigma \circ \eta_j$$

In Worten hat man für σ eine Zerlegung in seine disjunkten Zykel durchzuführen, den Index j zu streichen, anschließend jeden Index größer als j um eins zu verringern, und anschließend die Zykel wieder zu einer Permutation in \mathfrak{S}'_{p-1} aufzumultiplizieren.

1.2.2 Definition. Für j = 1, ..., p - 1 ist

 $\partial_j'': \mathbb{B}_{p,q} \to \mathbb{B}_{p-1,q}, \ (\sigma_q, \dots, \sigma_0) \mapsto (D_j(\sigma_q), \dots, D_j(\sigma_0))$

der j-te horizontale Seitenoperator.

Wir wollen nun den Unterkomplex der reduzierten Zellen von \mathbb{B} beschreiben. Sei $e = (\sigma_q, \ldots, \sigma_0)$ eine Zelle in homogener Notation vom Bigrad (p, q).

1.2.3 Definition. e heißt vertikal reduziert, falls es für alle $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ ein $j \in \{1, \ldots, q\}$ gibt, so daß $\sigma_j(i) \neq i+1$ gilt.

Geometrisch bedeutet dies für jedes *i* folgendes: Die horizontale Linie des Parallelschlitzgebietes durch b_{i+1} ist in dem Sinne nicht überflüssig, als daß zur Konstruktion von F(L) nach Aufschneiden entlang b_{i+1} nicht wieder $Q_{i,j}$ auf die dort beschriebene Weise mit $Q_{i+1,j}$ verklebt wird, für jedes *j*. Dies würde die Horizontale durch b_{i+1} geometrisch erübrigen.

1.2.4 Definition. *e* heißt horizontal reduziert, falls für alle $k \in \{1, \ldots, q\}$ gilt, daß $\sigma_k \neq \sigma_{k-1}$ ist.

Ist e nicht horizontal reduziert, und die obige Bedingung für k verletzt, so ist die Vertikale durch a_k bei der Konstruktion von F(L) auf analoge Weise wie bei vertikaler Reduziertheit geometrisch überflüssig.

1.2.5 Definition. *e* heißt *reduziert*, falls *e* horizontal und vertikal reduziert ist.

Für Homologieberechnungen von Bedeutung ist der folgende

1.2.6 Satz. Der Unterkomplex der nicht reduzierten Zellen von \mathbb{B} , den wir \mathbb{B}_{unred} nennen wollen, ist zusammenziehbar.

Beweis: z.B. [Wei], S.266

1.2.7 Definition. Wir setzen $\mathbb{B}' = \mathbb{B}/\mathbb{B}_{unred}$.

1.2.8 Bemerkung. Da wir in den folgenden Kapiteln ausschließlich an der Homologie von \mathbb{B} beziehungsweise \mathbb{B}' interessiert sind, und deren Homologiegruppen wegen des Satzes isomorph zueinander sind, schreiben wir im folgenden nur noch \mathbb{B} für den Komplex \mathbb{B}' und von nun an also sind alle Zellen von \mathbb{B} reduziert.

Der Komplex $\mathbb{B} = \mathbb{B}_{*,*}$ besitzt Unterkomplexe von Zellen mit fester Norm h oder fester Zykelzahl c. Solche Unterkomplexe von Zellen notieren wir durch Anfügen von zwei weiteren Indizes an $\mathbb{B}_{*,*}$, beispielsweise $\mathbb{B}_{*,*,*,c} = \{e \in \mathbb{B} \mid \operatorname{cyc}(e) = c\}$.

1.3 Alternative Beschreibung von Zellen

Es gibt eine weitere Möglichkeit, Parallelschlitzgebiete und den Zellkomplex $\mathbb{B}_{*,*}$ zu beschreiben. Darauf soll hier eingegangen werden.

1.3.1 Definition. Sei $\xi = (x_0, y_0) \in \mathbb{C}$. Ein Schlitz L ist eine Menge

$$\{(x,y) \in \mathbb{C} \mid x \le x_0, y = y_0\} \subset \mathbb{C}.$$

Ein Schlitz verläuft also parallel zur reellen Achse, vom Schlitzendpunkt ξ nach $-\infty$. x_0 heißt x-Niveau, y_0 das y-Niveau von L. Schlitze S korrespondieren offensichtlich mit den Schlitzendpunkten $\xi \in \mathbb{C}$ auf eindeutige Art und Weise. Als Paarung $\lambda \in \mathfrak{S}_{2h}$ bezeichnen wir eine fixpunktfreie Involution.

1.3.2 Definition. Sind h > 0 und Schlitze L_1, \ldots, L_{2h} mit Endpunkten $\xi_1 = (x_1, y_1), \ldots, \xi_{2h} = (x_{2h}, y_{2h})$ gegeben, mit $y_1 \leq \ldots \leq y_{2h}$, und ferner eine Paarung $\lambda \in \mathfrak{S}_{2h}$, so nennen wir das Symbol $L = (L_1, \ldots, L_{2h}; \lambda)$ eine Schlitzkonfiguration, falls $x_k = x_{\lambda(k)}$ für $k = 1, \ldots, 2h$ gilt. Hierbei ist der Fall $L_k \subset L_l$ für beliebige k, l durchaus möglich.

Wenn a_1, \ldots, a_q die q verschiedenen Werte der x-Niveaus x_1, \ldots, x_{2h} sind, mit $a_q < \ldots < a_1$, so sei

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(L) = \{a_1, \dots, a_q\} = \{x_1, \dots, x_{2h}\}$$

die Menge der x-Niveaus von L. Dementsprechend sei

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(L) = \{b_1, \dots, b_p\}$$

die *p*-elementige Menge der verschiedenen *y*-Niveaus von *L*, falls $\{b_1, \ldots, b_p\} = \{y_1, \ldots, y_{2h}\}$ und $b_1 < \ldots < b_p$.

Grafisch stellen wir Schlitzkonfigurationen wie folgt dar:



Schlitze von gleichem y-Niveau werden dabei knapp übereinander eingezeichnet. Die Paarung λ faßt dabei immer zwei Schlitze zusammen. Wir deuten dies mit den dargestellten Bögen an. Seien nun h, p, q > 0.

Wir legen im folgenden zwei Äquivalenzrelationen auf Schlitzkonfigurationen fest. Zum einen seien $L = (L_1, \ldots, L_{2h}, \lambda)$ und $L' = (L'_1, \ldots, L'_{2h}, \lambda)$ mit jeweils q verschiedenen x-Niveaus, p verschiedenen y-Niveaus und $\lambda \in \mathfrak{S}_{2h}$ äquivalent, falls für die Schlitzendpunkte $\xi_1 = (x_1, y_1), \ldots, \xi_{2h} = (x_{2h}, y_{2h})$ und $\xi'_1 = (x'_1, y'_1), \ldots, \xi'_{2h} = (x'_{2h}, y'_{2h})$ folgende Bedingungen erfüllt sind: (1) Für jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_{2h}$ mit

$$x_{\pi(1)} \leq \ldots \leq x_{\pi(2h)}$$

ist auch

$$x'_{\pi(1)} \le \ldots \le x'_{\pi(2h)}.$$

(2) Für die *y*-Niveaus und $1 \le j < 2h$ gilt: Ist $y_j = y_{j+1}$, so auch $y'_j = y'_{j+1}$ und umgekehrt.

Man beachte, daß für zwei äquivalente Schlitzkonfigurationen damit insbesondere gilt:

Ist $x_k = x_l$, so auch $x'_k = x'_l$ und umgekehrt.

Für eine Äquivalenzklasse von Schlitzkonfigurationen ist also nur die lineare Anordnung der Komponenten der Schlitzendpunkte von Bedeutung, die genauen Werte spielen keine Rolle mehr. Wir notieren eine solche Äquivalenzklasse von Schlitzkonfigurationen mit dem Symbol [L].

Nun legen wir auf Schlitzkonfigurationen die Äquivalenzrelation der Rauzy-Sprünge fest. Da wir in Kapitel 3, Abschnitt 3 darauf aus leicht verändertem Blickwinkel noch ausführlich zurückkommen werden, sei hier nur knapp die Definition angegeben. Eine ausführliche Darstellung findet sich in [Mül].

Wir wollen folgende Notation einführen: Für $a, b \in \{1, ..., 2h\}, a < b \operatorname{sei} \alpha_{a,b}^+ \in \mathfrak{S}_{2h}$ die zyklische Permutation der Untermenge $\{a, ..., b\}$, welche dort jeden Index außer *b* um eins erhöht, und *b* auf *a* herabsetzt, also $a^+ = \langle a, a + 1, ..., b \rangle$. Applag gei $a^- = \langle b, b - 1, ..., c \rangle$ die Dermutation in

also $\alpha_{a,b}^+ = \langle a, a+1, \ldots, b \rangle$. Analog sei $\alpha_{a,b}^- = \langle b, b-1, \ldots, a \rangle$ die Permutation in \mathfrak{S}_{2h} , welche jeden Index aus $\{a+1, \ldots, b\}$ außer *a* um eins herabsetzt, und *a* auf *b* erhöht.

Für eine Schlitzkonfiguration $L = (L_1, ..., L_{2h}, \lambda)$ und $i \in \{1, ..., 2h - 1\}$ betrachten wir nun vier Fälle:

- (1) Ist $L_i \subset L_{i+1}$ und $\lambda(i+1) < i$, so setzen wir $\alpha = \alpha^+_{\lambda(i+1)+1,i}$
- (2) Ist $L_i \subset L_{i+1}$ und $\lambda(i+1) > i+1$, so setzen wir $\alpha = \alpha_{i,\lambda(i+1)}^-$.
- (3) Ist $L_i \subset L_{i+1}$ und $\lambda(i) < i$, so setzen wir $\alpha = \alpha^+_{\lambda(i), i+1}$.
- (4) Ist $L_i \subset L_{i+1}$ und $\lambda(i) > i+1$, so setzen wir $\alpha = \alpha_{i+1,\lambda(i)-1}^-$.

Aus diesen Daten bilden wir eine neue Schlitzkonfiguration

$$\tilde{L} = (\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_{2h}, \lambda)$$

vermöge

$$\lambda = \alpha \lambda \alpha^{-1},$$
$$\tilde{L}_{\alpha(j)} = L_j \text{ für } j \in \{1, \dots, 2h\} \setminus \{i\},$$

ferner

$$\tilde{\xi}_{\alpha(i)} = (x_i, y_{\lambda(i+1)})$$
 in den Fällen (1) und (2)

und

 $\tilde{\xi}_{\alpha(i)} = (x_i, y_{\lambda(i)}), \text{ in den Fällen (3) und (4)}.$

Dabei sind in den unteren beiden Zeilen die Schlitzendpunkte der Schlitze von \tilde{L} und L gemeint. Wir sagen dann, daß \tilde{L} durch einen Rauzy-Sprung aus L hervorgegangen ist, und nennen L und \tilde{L} Rauzy-äquivalent.

Ein Diagramm möge die Formeln verdeutlichen.



Wie man leicht sieht, sind Rauzysprünge auch noch wohldefiniert für Klassen [L] von Schlitzkonfigurationen.

Für den folgenden Satz benötigen wir noch eine Definition.

1.3.3 Definition. Set $L = (L_1, \ldots, L_{2h}, \lambda)$ eine Schlitzkonfiguration. Wir nennen L nicht-degeneriert, falls

- (1) Ist $L_i = L_{i+1}$, so ist $\lambda(i) \neq i+1$.
- (2) Ist $\lambda(j) = j + 2$ und $L_j = L_{j+2}$, so gilt $L_j \subset L_{j+1}$.

Ist L nicht-degeneriert, so muß \tilde{L} , welches aus L durch einen Rauzy-Sprung hervorgegangen sei, nicht notwendig wieder nicht-degeneriert sein Daher nennen wir eine Äquivalenzklasse von Symbolen [L] unter Rauzy-Sprüngen *nicht-degeneriert*, falls alle Elemente [L] nicht-degeneriert sind. Unter Rauzy-Sprüngen invariant sind jedoch die Anzahl verschiedener x-Niveaus $p = |\mathcal{A}(L)|$ und die Anzahl verschiedener y-Niveaus $q = |\mathcal{B}(L)|$, und daher kann man auch bei Klassen von Symbolen [L] unter Rauzy-Sprüngen noch von der Anzahl verschiedener x-Niveaus und der Anzahl verschiedener y-Niveaus sprechen.

Damit können wir nun folgenden Satz angeben:

1.3.4 Satz. Seien p, q, h > 0. Es gibt eine Bijektion zwischen den Elementen von $\mathbb{B}_{p,q,h,*}$ und nicht-degenerierten Äquivalenzklassen von Symbolen [L] unter Rauzy-Sprüngen, welche p verschiedene x-Niveaus und q verschiedene y-Niveaus besitzen.

Beweis: [Eh1], S.21

1.3.5 Bemerkung. Wir wollen diese Bijektion für den einfachen Fall p = 2h, q = h explizit angeben. Ist $e \in \mathbb{B}_{2h,h,h,*}$ eine höchstdimensionale Zelle, so gibt es disjunkte Transpositionen $\tau_1, \ldots, \tau_h \in \mathfrak{S}_{2h}$ mit $e = (\tau_h | \ldots | \tau_1)$ in inhomogener Darstellung. Hierbei sei daran erinnert, daß \mathbb{B} nur noch reduzierte Zellen enthält. Schreiben wir die Transpositionen in Zykelschreibweise, also $\tau_1 = \langle i_1, j_1 \rangle, \ldots, \tau_h = \langle i_h, j_h \rangle$, mit $\{i_1, j_1, \ldots, i_h, j_h\} = \{1, \ldots, 2h\}$, so erhalten wir eine Paarung λ über

$$\lambda(i_1) = j_1, \lambda(j_1) = i_1, \dots, \lambda(i_h) = j_h, \lambda(j_h) = i_h.$$

Ferner wählen wir reelle Zahlen $a_1 > \ldots > a_h$ und $b_1 < \ldots < b_{2h}$ und bilden damit Schlitze mit Endpunkten ξ_1, \ldots, x_{2h} , festgelegt über

$$\xi_{i_1} = (a_1, b_{i_1}), \xi_{j_1} = (a_1, b_{j_1}), \dots, \xi_{i_h} = (a_h, b_{i_h}), \xi_{j_h} = (a_h, b_{j_h}).$$

Die mit diesen Daten festgelegte Schlitzkonfiguration repräsentiert diejenige Klasse von äquivalenten Symbolen [L] unter Rauzy-Sprüngen, die mit e unter der Bijektion korrespondiert.

Kapitel 2

Bisemisimpliziale Mengen, Homologie mit lokalen Koeffizientensystemen

In diesem Kapitel wird eine Spektralsequenz eingeführt, mit der man die Homologie von Par(h, c)/W(h, c) berechnen kann. Wie in Kapitel 1 bereits angekündigt, wollen wir für c > 1 Homologie mit Werten in einem lokalen Koeffizientensystem berechnen. Die notwendigen Definitionen und Sätze dazu sollen hier ausgeführt werden.

2.1 Simpliziale, semisimpliziale und bisemisimpliziale Objekte

Ziel dieses Abschnittes ist es, $\mathbb{B}_{*,*}$ als bisemisimpliziale Menge zu erkennen. Dazu soll der Begriff allgemein eingeführt werden. Wir starten dazu mit simplizialen Objekten und orientieren uns an den Darstellungen in [GJ], [GM] und [Wei].

2.1.1 Definition. Sei Δ die Kategorie, deren Objekte die endlichen Mengen $[n] := \{0, \ldots, n\}$ für $n \ge 0$ und deren Morphismen schwach monoton wachsende Abbildungen $[n] \to [m] \ (n, m \ge 0)$ sind. Man beachte, daß bei den Morphismen sowohl $n \ge m$ als auch $n \le m$ zugelassen sind, und sie nicht notwendig injektiv sind. Ist \mathcal{C} eine Kategorie, so heißt ein kontravarianter Funktor

$$X: \mathbf{\Delta} \to \mathcal{C}$$

simpliziales Objekt (in C).

Ist speziell C = SET, Kategorie der Mengen und Abbildungen, so ist X eine simpliziale Menge. Wir können simpliziale Objekte auch explizit auf kombinatorische Art und Weise beschreiben. Dazu dienen die folgenden Überlegungen. Unter den Morphismen in Δ gibt es welche, die alle anderen erzeugen. Hierzu setzen wir für $n \in \mathbb{N}_0, 0 \le i \le n$

$$\epsilon_i := \epsilon_i^n : [n-1] \to [n], j \mapsto \begin{cases} j & \text{falls } j < i \\ j+1 & \text{falls } j \ge i \end{cases}$$

und

$$\eta_i := \eta_i^n : [n+1] \to [n], j \mapsto \begin{cases} j & \text{falls } j \le i \\ j-1 & \text{falls } j > i \end{cases}$$

Die Abbildung ϵ_i ist also der einzige injektive Morphismus, der *i* nicht im Bild hat, er heißt *i*-te Seitenabbildung, und η_i ist der einzige surjektive Morphismus, der den Wert *i* zweimal annimmt, er heißt *i*-te Degenerationsabbildung.

Führt man Fallunterscheidungen durch, so ergeben sich leicht die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} \epsilon_j \epsilon_i &= \epsilon_i \epsilon_{j-1} \quad \text{falls} \quad i < j \\ \eta_j \eta_i &= \eta_i \eta_{j+1} \quad \text{falls} \quad i \le j \end{aligned}$$
$$\eta_j \epsilon_i &= \begin{cases} \epsilon_i \eta_{j-1} \quad \text{falls} \quad i < j \\ id \quad \text{falls} \quad i = j, j+1 \\ \epsilon_{i-1} \eta_j \quad \text{falls} \quad i > j+1 \end{cases}$$

Ferner besitzt jeder Morphismus $\alpha: [m] \to [n]$ eine eindeutige Faktorisierung

$$\alpha = \epsilon_{i_1} \dots \epsilon_{i_s} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_t}$$

mit $0 \le i_s \le \ldots \le i_1 \le m$ und $0 \le j_1 \le \ldots \le j_t \le n$. Damit ergibt sich folgende Möglichkeit, simpliziale Mengen zu beschreiben:

2.1.2 Proposition. Ein simpliziales Objekt X in C läßt sich durch Angabe einer Folge von Objekten $(X_n)_{n\geq 0}$ in C, Seitenoperatoren $\partial_i : X_n \to X_{n-1}$ und Degenerationsoperatoren $\sigma_i : X_n \to X_{n+1}$ für $n \geq 0, i = 0, ..., n$, mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_j &= \partial_{j-1} \partial_i \quad \text{falls} \quad i < j \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_{j+1} \sigma_i \quad \text{falls} \quad i \leq j \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \partial_i \sigma_j &= \begin{cases} \sigma_{j-1} \partial_i \quad \text{falls} \quad i < j \\ id \quad \text{falls} \quad i = j, j+1 \\ \sigma_j \partial_{i-1} \quad \text{falls} \quad i > j+1 \end{cases} \end{aligned}$$

hinreichend und notwendig charakterisieren.

Beweis: Ist X ein simpliziales Objekt, so setzen wir $X_n = X([n]), \partial_i = X(\epsilon_i)$ und $\sigma_i = X(\eta_i)$ und erhalten die alternative Beschreibung eines simplizialen Objekts wie in der Proposition.

Andersherum setzen wir $X([n]) = X_n$ und für $\alpha : [m] \to [n]$

$$X(\alpha) = \sigma_{j_t} \dots \sigma_{j_1} \partial_{i_s} \dots \partial_{i_1},$$

wobei

$$\alpha = \epsilon_{i_1} \dots \epsilon_{i_s} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_t}$$

die eindeutige Faktorisierung von α in Seiten- und Degenerationsabbildungen ist. \Box

Im folgenden unterscheiden wir nicht zwischen den beiden Darstellungen eines simplizialen Objekts.

2.1.3 Definition. Sei Δ_{semi} die Unterkategorie von Δ , deren Morphismen monoton wachsende *injektive* Abbildungen $[m] \rightarrow [n]$ sind. Ein *semisimpliziales Objekt in einer Kategorie* C ist dann ein kontravarianter Funktor $\Delta_{semi} \rightarrow C$.

Vergleicht man Δ_{semi} mit Δ , so stellt man fest, daß es bei semisimplizialen Objekten keine Degenerationsabbildungen mehr gibt. Ein beliebiger Morphismus $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ in Δ_{semi} besitzt eine eindeutige Faktorisierung

$$\alpha = \epsilon_{i_1} \dots \epsilon_{i_s}$$

mit $0 \leq i_s \leq \ldots \leq i_1 \leq m$ und von den Identitäten bleibt

$$\epsilon_j \epsilon_i = \epsilon_i \epsilon_{j-1}$$
 falls $i < j$

übrig. Daher kann man ein semisimpliziales Objekt alternativ beschreiben als Folge von Objekten $(X_n)_{n\geq 0}$ in \mathcal{C} zusammen mit Seitenoperatoren $\partial_i : X_n \to X_{n-1}$ für $(i = 0, \ldots, n)$, welche

$$\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i$$
 falls $i < j$

erfüllen. Nun kommen wir zur Definition eines bisemisimplizialen Objekts:

2.1.4 Definition. Ein bisemisimpliziales Objekt in einer Kategorie C ist ein kontravarianter Funktor

$$X : \mathbf{\Delta}_{\mathbf{semi}} \times \mathbf{\Delta}_{\mathbf{semi}} \to \mathcal{C}.$$

Eine explizitere Beschreibung für ein bisemisimpliziales Objekt liefert hier die Angabe einer Doppelfolge $(X_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0}$ von Objekten in \mathcal{C} , zusammen mit Seitenoperatoren $\partial_i^v: X_{p,q} \to X_{p,q-1}$ und $\partial_i^h: X_{p,q} \to X_{p-1,q}$ welche miteinander kommutieren und die Identitäten

$$\partial_i^v \partial_j^v = \partial_{j-1}^v \partial_i^v \quad \text{falls } i < j$$

sowie

$$\partial_i^h \partial_j^h = \partial_{j-1}^h \partial_i^h$$
 falls $i < j$

erfüllen. Dabei heißt ∂_i^v vertikaler und ∂_i^h horizontaler Seitenoperator. Die Bezeichnungen ergeben sich aus der Lage der Abbildungspfeile im zugehörigen Doppelkettenkomplex, auf den wir in Abschnitt 3 näher eingehen werden. Die geometrische Realisierung |X| einer bisemisimplizialen Menge X konstruieren wir wie folgt:

 Es sei

$$\Delta^{n} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} x_{i} e_{i} | \sum_{i=0}^{n} x_{i} = 1, x_{i} \ge 0 \right\}$$

das von den Einheitsvektoren $e_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ aufgespannte abgeschlossene Standard-*n*-Simplex im \mathbb{R}^{n+1} . Auf der Menge

$$\prod_{p,q=0}^{\infty} X_{p,q} \times \Delta^p \times \Delta^q$$

mit den Mengen $X_{p,q} = X([p] \times [q])$ sei R die schwächste Äquivalenzrelation, die ein $(x, (s_0, \ldots, s_p), (t_0, \ldots, t_q)) \in X_{p,q} \times \Delta^p \times \Delta^q$ mit

 $(\partial_i^v(x), (s_0, \ldots, s_p), (t_0, \ldots, \hat{t}_i, \ldots, t_q)) \in X_{p,q-1} \times \Delta^p \times \Delta^{q-1}$ äquivalent macht, falls $t_i = 0$ ist, und mit

 $(\partial_j^h(x), (s_0, \dots, \hat{s}_j, \dots, s_p), (t_0, \dots, t_q)) \in X_{p-1,q} \times \Delta^{p-1} \times \Delta^q$ äquivalent macht, falls $s_j = 0$ ist. Dann sei

$$|X| = \prod_{n=0}^{\infty} (X_{p,q} \times \Delta^p \times \Delta^q) / R$$

versehen mit der Quotiententopologie.

Die Äquivalenzrelation R sorgt also dafür, daß "vertikale Seitensimplexe" in $X_{p,q-1} \times \Delta^p \times \Delta^{q-1}$ und "horizontale Seitensimplexe" in $X_{p-1,q} \times \Delta^{p-1} \times \Delta^q$ an ihr "Muttersimplex" in $X_{p,q} \times \Delta^p \times \Delta^q$ angeheftet werden.

Die geometrische Realisierung einer simplizialen Menge geschieht auf analoge Weise, man vergleich hierzu [Wei], S.257.

2.1.5 Beispiel. Den klassifizierenden Raum einer Gruppe G erhält man wie folgt als geometrische Realisierung einer simplizialen Menge BG:

Wir setzen $BG_n = G^n$ für alle $n \ge 0$ und definieren die Seiten- und Degenerationsoperatoren über

$$\sigma_i(g_1,\ldots,g_n)=(g_1,\ldots,g_i,1,g_{i+1},\ldots,g_n)$$

und

$$\partial_i(g_1, \dots, g_n) = \begin{cases} (g_2, \dots, g_n) & \text{falls} & i = 0\\ (g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots g_n) & \text{falls} & 0 < i < n\\ (g_1, \dots, g_{n-1}) & \text{falls} & i = n \end{cases}$$

Dann ist BG eine simpliziale Menge und |BG| klassifizierender Raum von G.

2.1.6 Proposition. $\mathbb{B}_{*,*}$ ist zusammen mit den Seitenoperatoren ∂'_i und ∂''_j eine bisemisimpliziale Menge.

Beweis: Die Zellen besitzen einen horizontalen und einen vertikalen Grad. Ferner gilt für $e = [\sigma_q : \ldots : \sigma_0] \in \mathbb{B}_{*,*}$ und i < j

$$\begin{aligned} \partial'_i \partial'_j(e) &= &\partial'_i([\sigma_q : \ldots : \hat{\sigma}_j : \ldots : \sigma_0]) \\ &= & [\sigma_q : \ldots : \hat{\sigma}_j : \ldots : \hat{\sigma}_i : \ldots : \sigma_0] \\ &= & \partial'_{j-1}([\sigma_q : \ldots : \hat{\sigma}_i : \ldots : \sigma_0]) \\ &= & \partial'_{j-1} \partial'_i(e). \end{aligned}$$

Für den horizontalen Randoperator überlegen wir uns, daß für $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ und i < j

$$D_i D_j(\sigma) = D_{j-1} D_i(\sigma)$$

gilt.

Zerlegen wir nämlich σ in seine Zykel, so ergibt sich die linke Seite der Gleichung, indem man in jedem Zykel den Index j streicht, alle Indizes größer als j um 1 erniedrigt, dann den Index i streicht, alle Indizes größer als i um 1 erniedrigt und alle Zykel zum Schluß wieder zusammenmultipliziert. Dies ist aber wegen i < j dasselbe wie Streichen von i, Erniedrigen aller Indizes größer als i um 1, dann Streichen von j-1 und erniedrigen aller Indizes größer als j-1 mit anschließendem Aufmultiplizieren aller Zykel. Damit ergibt sich für i < j

$$\partial_i'' \partial_j''(e) = [D_i(D_j(\sigma_q) : \dots : D_i(D_j(\sigma_0))] \\ = [D_{j-1}(D_i(\sigma_q)) : \dots : D_{j-1}(D_i(\sigma_0))] \\ = \partial_{i-1}'' \partial_i''(e).$$

г		

2.2 Lokale Koeffizientensysteme

Wir definieren lokale Koeffizientensysteme erst für semisimpliziale Mengen.

2.2.1 Definition. Sei $X : \Delta_{\text{semi}} \to \text{SET}$ kontravariant, also eine simpliziale Menge, $X_n = X([n])$ und $\mathfrak{X} = \bigcup_{n \ge 0} X_n$.

Ein lokales Koeffizientensystem \mathcal{A} auf X ist eine Familie $(\mathcal{A}_x)_{x\in\mathfrak{X}}$ von abelschen Gruppen und eine Familie von Homomorphismen $\mathcal{A}(\alpha, x) : \mathcal{A}_x \to \mathcal{A}_{X(\alpha)(x)}$ für jeden Morphismus $\alpha : [m] \to [n]$ in Δ_{semi} und jedes $x \in X_n$, so daß gilt:

- (i) $\mathcal{A}(id, x) = id$ und
- (ii) $\mathcal{A}(\alpha \circ \beta, x) = \mathcal{A}(\beta, X(\alpha)(x)) \circ \mathcal{A}(\alpha, x)$

Die zweite Forderung ist also die Kommutativität des folgenden Diagramms:



Aus den Überlegungen des 1. Abschnitts folgt, daß man zur Konstruktion eines lokalen Koeffizientensystems die Homomorphismen $\mathcal{A}(\alpha, x)$ nur für $\alpha = \epsilon_i$ angeben muß. Mit der Kommutativität des obigen Diagramms setzt man dies dann eindeutig fort für alle monoton wachsenden, injektiven $\alpha : [m] \to [n]$.

2.2.2 Beispiel. Ist A eine abelsche Gruppe, und $\mathcal{A}_x = A$ für alle $x \in X_n$, $\mathcal{A}(\alpha, x) = id$ für alle α in Δ_{semi} , $x \in X_n$, so ist \mathcal{A} ein lokales Koeffizientensystem. Es heißt konstantes Koeffizientensystem.

2.2.3 Beispiel. Wir greifen das Beispiel zum klassifizierenden Raum einer Gruppe G des ersten Abschnitts nochmal auf. BG ist insbesondere eine semisimpliziale Menge. Für einen linken G-Modul A definieren wir:

$$\mathcal{A}_x = A$$
 für alle $x \in BG_n, n \ge 0$

und für $x = (g_1, \ldots, g_n)$

$$\mathcal{A}(\epsilon_i, x)(a) = \begin{cases} g_1^{-1}a, & \text{falls} & i = 0\\ a & \text{falls} & 0 < i < n \end{cases}$$

Dann ist \mathcal{A} ein lokales Koeffizientensystem, siehe dazu auch [GM], S.29.

Wir wollen jetzt Homologie mit Werten in einem lokalen Koeffizientensystem erklären.

2.2.4 Definition. Sei X eine semisimpliziale Menge, und \mathcal{A} ein lokales Koeffizientensystem darauf. Wir setzen

$$C_n(X,\mathcal{A}) = \left\{ \sum_{x \in X_n} a(x)x \mid a(x) \in \mathcal{A}_x, a(x) \neq 0 \text{ endlich oft} \right\}$$

Die abelsche Gruppe $C_n(X, \mathcal{A})$ heißt dann Gruppe der *n*-dimensionalen Ketten in \mathcal{A} . Als Randoperator definieren wir für $c = \sum_{x \in X_n} a(x)x \in C_n(X, \mathcal{A}), n > 0$

$$\partial(c) = \sum_{x \in X_n} \sum_{i=0}^n \mathcal{A}(\partial_i, x)(a(x))(-1)^i X(\partial_i)(x)$$

und für $c \in C_0(X, \mathcal{A})$

 $\partial(c) = 0.$

Damit wird $C_*(X, \mathcal{A})$ zu einem Kettenkomplex, wie eine einfache Rechnung zeigt, und so können wir die Homologie der semisimplizialen Menge X mit Werten in \mathcal{A} , $H_n(X, \mathcal{A})$ als Homologie dieses Kettenkomplexes definieren.

Ist \mathcal{A} das konstante Koeffizientensystem $\mathcal{A}_x = A$, so liefert obige Definition $H_n(X, \mathcal{A}) = H_n(X, A)$, wobei Homologie mit Werten in A auf übliche Weise über Ketten in A definiert ist.

2.2.5 Definition. Sei $X : \Delta_{\text{semi}} \times \Delta_{\text{semi}} \to \text{SET}$ eine bisemisimpliziale Menge, $X_{p,q} = X([p] \times [q])$ und $\mathfrak{X} = \bigcup_{p,q \geq 0} X_{p,q}$. Ein lokales Koeffizientensystem \mathcal{A} auf X ist eine Familie $(\mathcal{A}_x)_{x \in \mathfrak{X}}$ von abelschen Gruppen und eine Familie von Homomorphismen $\mathcal{A}(\alpha, x) : \mathcal{A}_x \to \mathcal{A}_{X(\alpha,\beta)(x)}$ für Morphismen $\alpha : [p'] \to [p], \beta : [q'] \to [q]$ in Δ und jedes $x \in X_{p,q}$, so daß gilt:

- (i) $\mathcal{A}(id, id, x) = id$
- (ii) $\mathcal{A}(\alpha' \circ \alpha, \beta, x) = \mathcal{A}(\alpha, \beta, X(\alpha', \beta)(x)) \circ \mathcal{A}(\alpha', \beta, x)$
- (iii) $\mathcal{A}(\alpha, \beta' \circ \beta, x) = \mathcal{A}(\alpha, \beta, X(\alpha, \beta')(x)) \circ \mathcal{A}(\alpha, \beta', x)$

In (ii) und (iii) verlangen wir also für beide Komponenten das kommutative Diagramm aus der Definition für semisimpliziale Mengen. Da jeder Morphismus aus Δ_{semi} eine Komposition von Seitenabbildungen ist, müssen wir zur Konstruktion eines lokalen Koeffizientensystems nur Homomorphismen $\mathcal{A}(\alpha, \beta, x)$ für die Fälle $\alpha = \epsilon_i, \beta = id$ und $\alpha = id, \beta = \epsilon_i$ angeben, die übrigen ergeben sich dann auf eindeutige Art und Weise.

2.3 Homologie von bisemisimplizialen Mengen

Bisemisimpliziale Mengen induzieren eine Spektralsequenz, aus der man die Homologie ihrer Realisierungen erhält. Dies wollen wir hier erläutern und dabei auch auf lokale Koeffizientensysteme eingehen. Sei X eine bisemisimpliziale Menge mit Seitenoperatoren ∂_i^v , ∂_j^h . Setzt man mit $X_{p,q} = X([p] \times [q])$

 $C_{p,q} = C_{p,q}(X) =$ freie, von $X_{p,q}$ erzeugte abelsche Gruppe,

so erhält man einen Doppelkettenkomplex $C(X) = (C_{p,q})_{p,q \ge 0}$ von abelschen Gruppen. Der horizontale Randoperator ist dabei

$$\partial^h : C_{p,q} \to C_{p-1,q}, \partial^h = \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial^h_i$$

und der vertikale

$$\partial^{v}: C_{p,q} \to C_{p,q-1}, \partial^{v} = (-1)^{p} \sum_{j=0}^{q} (-1)^{j} \partial_{j}^{h}.$$

Dies ergibt also das Diagramm



Wegen des Vorzeichentricks, das heißt Einfügen des Vorfaktors $(-1)^p$ beim vertikalen Randoperator, ist der Totalkomplex

$$\operatorname{Tot}(CX):\ldots \to \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q} \to \bigoplus_{p+q=n-1} C_{p,q} \to \ldots$$

mit totalem Randoperator $\partial = \partial^v + \partial^h$ ein Kettenkomplex. Filtriert man Tot(CX) nach Spalten, setzt man also

$$F^k \operatorname{Tot}(CX) : \ldots \to \bigoplus_{p+q=n, p \le k} C_{p,q} \to \bigoplus_{p+q=n-1, p \le k} C_{p,q} \to \ldots ,$$

so erhält man eine Spektralsequenz $\{E_{p,q}^r\}_r$ mit $E_{p,q}^0 = C_{p,q}$ und $d^0 = \partial^v : C_{p,q} \to C_{p,q-1}$. Ferner ist $E_{p,q}^1 = H_q(C_{p,*})$ und das d^1 -Differential $d^1 : E_{p,q}^1 \to E_{p-1,q}^1$ ist gerade die von ∂^h induzierte Abbildung auf den Homologieklassen. Da die Spektralsequenz sich nur im ersten Quadranten befindet, konvergiert sie, also

$$E_{p,q}^r \Longrightarrow H_{p+q}(\operatorname{Tot}(CX)).$$

Diese Konstruktion können wir auf lokale Koeffizientensysteme verallgemeinern. Hierzu sei

$$C_{p,q}(X,\mathcal{A}) = \left\{ \sum_{x \in X_{p,q}} a(x)x \mid a(x) \in \mathcal{A}_x, a(x) \neq 0 \text{ endlich oft} \right\}.$$

Der horizontale Randoperator schreibt sich jetzt als

$$\partial^{h} : C_{p,q}(x,\mathcal{A}) \to C_{p-1,q}(x,\mathcal{A}),$$
$$\sum_{x \in X_{p,q}} \sum_{i=0}^{p} \mathcal{A}(\epsilon_{i}^{p}, id, x)(a(x))(-1)^{i} \partial_{j}^{h}(x)$$

und der vertikale ist

$$\partial^{v}: C_{p,q}(x,\mathcal{A}) \to C_{p,q-1}(x,\mathcal{A}),$$
$$\sum_{x \in X_{p,q}} \sum_{j=0}^{q} \mathcal{A}(id,\epsilon_{j}^{q},x)(a(x))(-1)^{j} \partial_{j}^{v}(x).$$

Wir erhalten auf diese Art und Weise eine Spektralsequenz im 1. Quadranten, mit

$$E_{p,q}^0 = C_{p,q}(X, \mathcal{A})$$

und

$$E_{p,q}^r \Longrightarrow H_{p+q}(\operatorname{Tot}(CX), \mathcal{A})$$

Diesen Mechanismus wollen wir jetzt für die bei uns auftretenden bisemisimplizialen Mengen nutzen. Für ein $e \in \mathbb{B}_{p,q}$ haben wir die Funktionen norm und cyc in Kapitel 1 definiert. Damit setzen wir

$$\mathbb{B}_{p,q,*,c} = \{ e \in \mathbb{B}_{p,q} | c = \operatorname{cyc}(e) - 1 \}.$$

Wir erhalten eine weitere bisemisimpliziale Menge $\mathbb{B}_{*,*,*,c}$ mit denselben Seitenoperatoren wie bei $\mathbb{B}_{*,*}$, denn die Zykelzahl c ist invariant unter den Seitenoperatoren. Für das folgende definieren wir

$$\overline{Sym}_{p,q,h,c} = \{\sum_{i} a_{i}e_{i} | e_{i} \in \mathbb{B}_{p,q}, a_{i} \in \mathbb{Z}, a_{i} \neq 0 \text{ endlich oft}, c = \operatorname{cyc}(e) - 1, h = \operatorname{norm}(e)\}$$

und ein $_*$ in einer Komponente bedeutet wie üblich, daß man die direkte Summe über alle möglichen Werte in dieser Komponente zu bilden hat.

 $\mathbb{B}_{*,*}$ und $\mathbb{B}_{*,*,*,c}$ induzieren Spektralsequenzen wie oben beschrieben. Wir können jedoch den Kettenkomplex $\text{Tot}(C\mathbb{B}_{*,*,*,c})$ vor der Filtration nach Spalten zunächst nach Normen filtrieren, also

$$F_N^h(\operatorname{Tot}(C\mathbb{B}_{*,*,*,c}):\ldots\to\bigoplus_{p+q=n,p\leq h}\overline{Sym}_{p,q,*,c}\to\bigoplus_{p+q=n-1,p\leq h}\overline{Sym}_{p,q,*,c}\to\ldots$$

bilden, und aus diesen Komplexen mittels Spaltenfiltration Spektralsequenzen erhalten. Deren zugrundeliegende Doppelkettenkomplexe sind also die Komplexe $\overline{Sym}_{*,*,h,c}$. Die Seitenoperatoren in der Filtration schreiben sich hier als

$$\partial_i^{\prime h}(e) = \begin{cases} \partial_i^{\prime}(e) & \text{falls } \operatorname{norm}(\partial_i^{\prime}(e)) = h \\ 0 & \text{falls } \operatorname{norm}(\partial_i^{\prime}(e)) < h \end{cases}$$

und

$$\partial_i^{''h}(e) = \begin{cases} \partial_i^{''}(e) & \text{falls } \operatorname{norm}(\partial_i^{''}(e)) = h \\ 0 & \text{falls } \operatorname{norm}(\partial_i^{''}(e)) < h \end{cases}$$

Dies ergibt also für fixes h, c eine Spektralsequenz mit

$$E_{p,q}^0 = \overline{Sym}_{p,q,h,c}$$
, $d_0 = \partial'^h, d_1$ von ∂''^h induziert, und
 $E_{p,q}^r \Longrightarrow H_{p+q}(\operatorname{Tot}(\overline{Sym}_{*,*,h,c})).$

Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, daß wir den Seitenoperator $\partial_i^{\prime h}$ meinen, so schreiben wir einfach ∂_i^{\prime} dafür. Dieselben Konstruktionen sind auch ohne fixiertes c und mit Werten in einem lokalen Koeffizientensystem \mathcal{A} möglich.Wir schreiben dann $\overline{Sym}_{p,q,h,c}^{\mathcal{A}}$ anstelle von $\overline{Sym}_{p,q,h,c}$, wenn wir Koeffizienten in \mathcal{A} nehmen wollen, und erhalten so ähnliche Spektralsequenzen.

Wie uns diese Spektralsequenzen die Homologie der Modulräume berandeter Riemannscher Flächen liefern, beschreiben wir in Kapitel 3. Zunächst jedoch mögen einige bekannte Ergebnisse zu den Spektralsequenzen vorgestellt werden.

2.4 Einige Resultate zu den Spektralsequenzen

Im folgenden wollen wir einige Eigenschaften der Spektralsequenzen zu $\overline{Sym}_{*,*,h,*}$ und $\overline{Sym}_{*,*,h,c}$ skizzieren. Eine ausführliche Diskussion findet sich in [Eh2]. Wir notieren die Zellen e von $\mathbb{B}_{*,*}$ in inhomogener Form, also $e = [\tau_q | \dots | \tau_1]$ mit $\tau_i \in \mathfrak{S}_p$. Die symmetrische Gruppe \mathfrak{S}_p operiert auf $\mathbb{B}_{p,q,h,*}$ vermöge Konjugation: Ist $\alpha \in \mathfrak{S}_p$ und $e = [\tau_q | \dots | \tau_1] \in \mathbb{B}_{p,q,h,*}$, so sei

$$\alpha \cdot e = [\alpha \tau_q \alpha^{-1} | \dots | \alpha \tau_1 \alpha^{-1}].$$

Dementsprechend nennen wir $\operatorname{conj}(e) = \operatorname{conj}(\tau_q \dots \tau_1)$ den Konjugationstyp oder die Konjugationsklasse der Zelle e. Der Konjugationstyp einer Zelle ist invariant unter Konjugation, wie man leicht nachrechnet. Durch die Operation wird $\overline{Sym}_{p,q,h,*}$ zu einem \mathfrak{S}_p -Modul. Wegen

$$\partial'_{i}(\alpha e) = \partial'_{i}([\alpha \tau_{q} \alpha^{-1} | \dots | \alpha \tau_{q} \alpha^{-1}])$$

= $[\alpha \tau_{q} \alpha^{-1} | \dots | \alpha \tau_{i+1} \tau_{i} \alpha^{-1} | \dots | \alpha \tau_{1} \alpha^{-1}]$
= $\alpha \partial'_{i}(e)$

wird der vertikale Randoperator

$$\partial':\overline{Sym}_{p,q,h,*}\to\overline{Sym}_{p,q-1,h,*}$$

zu einem \mathfrak{S}_p -Modulhomomorphismus.

Das Lemma von Schur aus der Darstellungstheorie, welches sich in [FH] findet, liefert daher nach Zerlegung von $\overline{Sym}_{p,q,h,*}$ und $\overline{Sym}_{p,q-1,h,*}$ in irreduzible Komponenten,

daß die Einschränkung von ∂' auf eine dieser Komponenten entweder der Nullhomomorphismus oder ein Isomorphismus auf eine der irreduziblen Komponenten im Bild ist.

Durch diese Überlegungen ist also bereits garantiert, daß die Vertikalen des Doppelkomplexes $\overline{Sym}_{*,*,h,*}$ in direkte Summanden zerfallen. Wir setzen für ein $\alpha \in \mathfrak{S}_p$

$$\mathbb{B}_{p,q,h,c}(\alpha) = \{ e = [\tau_q | \dots | \tau_1] \in \mathbb{B}_{p,q,h,c} \mid \tau_q \dots \tau_1 = \alpha \}$$

und $\overline{Sym}_{p,q,h,c}(\alpha)$ sei die zugehörige Kettengruppe.

2.4.1 Theorem. Sind $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{S}_p$ konjugiert zueinander, so sind die beiden Kettenkomplexe $\overline{Sym}_{p,*,h,c}(\alpha_1)$ und $\overline{Sym}_{p,*,h,c}(\alpha_2)$ zueinander isomorph.

Beweis: [Eh2].

In Kapitel 5 findet sich eine detaillierte Aufschlüsselung der Vertikalen nach derartigen Unterkomplexen. Ein weiteres, für die Berechnung der Spektralsequenzen wichtiges Resultat ist:

2.4.2 Theorem. Die Kettenkomplexe $\overline{Sym}_{p,*,h,c}$, also die Vertikalen des Doppelkomplexes $\overline{Sym}_{*,*,h,c}$, haben nur in der Dimension q = h Homologie. Daher ist der E_1 -Term der zugehörigen Spektralsequenz ein Kettenkomplex in Dimension q = h.

Beweis: [Eh2].

Dieser Satz wird uns bei der numerischen Behandlung der Spektralsequenz sehr hilfreich sein.

Kapitel 3

Ein Orientierungssystem für \mathbb{B}

In diesem Kapitel soll ein spezielles lokales Koeffizientensystem, ein Orientierungssystem, für die bisemisimpliziale Menge B konstruiert werden. Im ersten Abschnitt geben wir das Konzept dazu an. Anschließend wird eine Poincaré-Lefschetz-Dualitätsaussage beschrieben und für unsere Situation formuliert. In den beiden folgenden Abschnitten finden sich die Einzelheiten zu zwei wichtigen Bausteinen des Konzepts.

3.1 Das Konzept

Wir beschreiben nun das Koeffizientensystem. Für $e \in \mathbb{B}$ setzen wir

$$\mathcal{A}_e = \mathbb{Z} < \! e \! > ,$$

wobe
i $\mathbb{Z}\!<\!e\!>$ die unendliche zyklische Gruppe ist, welche von
 eerzeugt wird. Ferner müssen wir Isomorphismen

$$\mathcal{A}(\epsilon_i, id, e) : \mathcal{A}_e \to \mathcal{A}_{\partial'_i(e)}$$

und

$$\mathcal{A}(id, \epsilon_i, e) : \mathcal{A}_e \to \mathcal{A}_{\partial''_i(e)}$$

angeben. Zu diesem Zweck seien zunächst ein paar Notationen eingeführt.

3.1.1 Definition. Ist $D = \{i_1, \ldots, i_n\} \subset \mathbb{N}$, mit $i_1 < \ldots < i_n$, so sei

$$\partial'_D = \partial'_{i_1} \circ \ldots \circ \partial'_{i_n}$$

und ebenso

$$\partial_D'' = \partial_{i_1}'' \circ \ldots \circ \partial_{i_n}''.$$

Ferner schreiben wir für zwei Zellen $e, e' \in \mathbb{B}$ nun $e' \leq e$, falls es Mengen D_1 und D_2 gibt, so daß $\partial''_{D_2}(\partial'_{D_1}(e)) = e'$ gilt und die dabei auftretenden Seitenoperatoren $\partial'_i, \partial''_j$ auch definiert sind.

Bei der Konstruktion des lokalen Koeffizientensystems gehen wir jetzt in mehreren Schritten vor:

Schritt 1:

Jede Zelle $e \in \mathbb{B}$ besitzt eine Orientierung o(e), welche ein Erzeuger von $\mathbb{Z} < e >$ ist. Diese Orientierung ist über den Homöomorphismus $e \to \mathring{\Delta}_q \times \mathring{\Delta}_p$ und die Anordnung der Seiten von $\mathring{\Delta}_q \times \mathring{\Delta}_p$ festgelegt. Dabei ordnen wir die Seiten des Bisimplexes $\mathring{\Delta}_q \times \mathring{\Delta}_p$ wie folgt: Jede Seite davon ist ein Produkt einer Seite von dem ersten Faktor $\mathring{\Delta}_q$ und einer Seite von dem zweiten Faktor $\mathring{\Delta}_p$. Diese einzelnen Seiten besitzen eine natürliche Ordnung. Produkte ordnen wir dann lexikographisch an.

Wir nennen diese Orientierung einer Zelle e intrinsische Orientierung. Für höchstdimensionale Zellen e von \mathbb{B} wählen wir als geometrische Orientierung o(e) die intrinsische Orientierung von e.

Sind $e, e' \in \mathbb{B}$, und ist e' Seite von e, so legen wir einen geschlossenen Weg mit Aufpunkt in e' durch e über höchstdimensionale Zellen. Dies bedeutet im einzelnen:

Schritt 2:

Für alle h, c, p, q > 0 konstruieren wir eine Funktion

 $\mathrm{top}: \mathbb{B}_{p,q,h,c} \to \mathbb{B}_{2h,h,h,c}$

mit der Eigenschaft $e \leq \text{top}(e)$ für alle e. Dies wird Aufgabe von Abschnitt 2 sein. Der dazu benötigte Algorithmus soll außerdem Mengen $D_1 = D_1(e) \subset \{1, \ldots, h-1\}$ und $D_2 = D_2(e) \subset \{1, \ldots, 2h-1\}$ mitliefern, bezüglich denen e Seite von top(e) ist, mit denen also $\partial''_{D_2}(\partial'_{D_1}(e)) = e'$ gilt.

Für die in diesem Abschnitt folgenden Überlegungen nehmen wir an, solch eine Funktion sei bereits festgelegt.

Schritt 3:

Sind $e_1, e_2 \in \mathbb{B}$, und gilt $e_2 \leq e_1$ mit Mengen D_1, D_2 , so erklären wir dazu einen Weg $w : [0, 1] \to |\mathbb{B}|$, wobei $|\mathbb{B}|$ die geometrische Realisierung der bisemisimplizialen Menge \mathbb{B} ist. Dazu notieren wir zunächst mit |e| das Bild einer Zelle e in \mathbb{B} , und unter $pr_j(|e|)$ verstehen wir die Projektion des Bisimplexes |e| auf seine j-te Komponente, für j = 1, 2.

Ist e vom Bigrad (p,q), so ist |e| homöomorph zu $\Delta^p \times \Delta^q$, und dann sei bar $_e^1$ der Baryzenter von $pr_1(|e|) \approx \Delta^p$, bar $_e^2$ der Baryzenter von $pr_2(|e|) \approx \Delta^q$ und bar $_e = (\text{bar}_e^1, \text{bar}_e^2)$. Ist zunächst speziell $D_1 = \{i\}, D_2 = \emptyset$, so definieren wir $w = w'_i : [0, 1] \to |\mathbb{B}|$ als direkten Weg von bar $_{e_1}$ nach bar $_{e_2}$. Ist $D_1 = \emptyset, D_2 = \{j\}$, so sei analog $w = w''_j$ der Weg in $|\mathbb{B}|$, der den Baryzenter von $|e_1|$ mit dem Baryzenter von $|e_2|$ auf direktem Wege verbindet.

Für den allgemeinen Fall $D_1 = \{i_1, \ldots, i_n\}, D_2 = \{j_1, \ldots, j_m\}$ mit $i_1 < \ldots < i_n$ und $j_1 < \ldots < j_m$ wählen wir sukzessive Wege $w'_{i_n}, \ldots, w'_{i_1}$, wobei w'_{i_l} der Weg für die Zellen $\partial'_{\{i_{l+1},\ldots,i_n\}}(e_1)$ und $\partial'_{\{i_l,\ldots,i_n\}}(e_1)$ zu Mengen $\{i_l\}$ und \emptyset ist, wie im Spezialfall

festgelegt. Danach wählen wir sukzessive Wege $w''_{j_m}, \ldots, w''_{j_1}$, wobei w''_{j_l} der Weg für die Zellen $\partial''_{\{i_{l+1},\ldots,i_m\}} \partial'_{D_1}(e_1)$ und $\partial''_{\{i_l,\ldots,i_m\}} \partial'_{D_1}(e_1)$ zu Mengen \emptyset und $\{i_l\}$ ist, wie im Spezialfall festgelegt.

Nun erhalten wir durch Konkatenation der Teilwege einen Weg, welcher die Baryzenter von e_1 und e_2 verbindet, also

$$w = w_{j_1}^{\prime\prime} \cdot \ldots \cdot w_{j_m}^{\prime\prime} \cdot w_{i_1}^{\prime} \cdot \ldots \cdot w_{i_n}^{\prime}.$$

Ein solcher Weg sei in der folgenden Zeichnung für den simplizialen Fall symbolisch angegeben.

Er führt von bar₁ bis bar₄, von Baryzenter zu Baryzenter.



Schritt 4: Sind h, c, p, q > 0 und $e \in \mathbb{B}_{p,q,h,c}$, so sei

$$\mathcal{H}(e) = \{ \hat{e} \in \mathbb{B}_{2h,h,h,c} \mid e \leq \hat{e} \} \subset \mathbb{B}_{2h,h,h,c}$$

die Hülle höchstdimensionaler Zellen über e. In diesem Schritt soll eine ausgezeichnete Zelle NF $(e) \in \mathcal{H}(e)$, welche wir Normalform von e nennen wollen, beschrieben werden, und ferner ein Algorithmus, welcher folgendes leistet: Ist $\hat{e} \in \mathcal{H}(e)$ gegeben, so wird ein Tupel $(\hat{e}_0, \ldots, \hat{e}_n) \in \mathcal{H}(e)^{n+1}$ errechnet, welches die folgenden Eigenschaften hat:

- (i) $\hat{e}_0 = \hat{e}$
- (ii) $\hat{e}_n = NF(e)$
- (iii) für alle $1 \le i \le n-1$ sind \hat{e}_i und \hat{e}_{i+1} benachbart, was heißen soll, daß es Indizes k = k(i), l = l(i) mit

$$\partial'_k(\hat{e}_i) = \partial'_l(\hat{e}_{i+1}) \text{ oder } \partial''_k(\hat{e}_i) = \partial''_l(\hat{e}_{i+1})$$

Diese Aufgabe erledigen wir in Abschnitt 3, nehmen aber für das folgende an, eine solche Normalform und ein dazugehöriger Algorithmus würden bereits existieren.

Schritt 5:

Das Tupel $(\hat{e}_0, \ldots, \hat{e}_n) \in \mathcal{H}(e)^{n+1}$, welches man in Schritt 4 erhält, liefert auch einen Weg vom Baryzenter von $|\hat{e}|$ zum Baryzenter von |NF(e)|, den wir jetzt beschreiben wollen. Dazu sei $1 \leq i \leq n$.

Für den Fall, daß $\partial'_k(\hat{e}_{i-1}) = \partial'_l(\hat{e}_i)$ ist, wählen wir w_i als direkten Weg von $\operatorname{bar}_{\hat{e}_{i-1}}$ über $\operatorname{bar}_{\partial'_k(\hat{e}_{i-1})} = \operatorname{bar}_{\partial'_l(\hat{e}_i)}$ nach $\operatorname{bar}_{\hat{e}_i}$.

Ist der andere Fall eingetreten, daß $\partial_k''(\hat{e}_{i-1}) = \partial_l''(\hat{e}_i)$ ist, so wählen wir auf analoge Weise den direkten Weg von Baryzenter zu Baryzenter, der die erste Komponente des Bildes unverändert läßt.

Konkatenation der einzelnen Wege liefert dann den Gesamtweg

$$w = w_n \cdot \ldots \cdot w_1.$$

Die untenstehende Zeichnung symbolisiert den Weg vom Baryzenter bar₁ einer höchstdimensionalen Zelle zum Baryzenter bar₃ einer benachbarten höchstdimensionalen Zelle über den Baryzenter der gemeinsamen Seite. Dargestellt ist jeweils nur eine Komponente der Bisimplexe.



Schritt 6:

Seien jetzt $e, e' \in \mathbb{B}$ und $e' = \partial'_i(e)$ oder $e' = \partial''_i(e)$. Wir konstruieren nun einen geschlossenen Weg durch die Baryzenter der Realisierungen von e', e und höchstdimensionalen Zellen, mit Aufpunkt im Baryzenter von |e'|. Dies geschehe im Detail wie folgt:

- (i) w_1 sei der direkte Weg von bar_e nach bar_{e'}.
- (ii) w_2 sei der Weg von $\operatorname{bar}_{\operatorname{top}(e)}$ zu bar_e , wie in Schritt 3 festgelegt.
- (iii) w_3 sei der Weg von $\operatorname{bar_{top}(e)}$ zu $\operatorname{bar_{NF}(e')}$ in $\mathcal{H}(e')$, wie in Schritt 5 festgelegt. Man beachte hierbei, daß $\operatorname{top}(e) \in \mathcal{H}(e')$ ist wegen $e' \leq e$.
- (iv) w_4 sei der Weg von $\operatorname{bar}_{e'}$ zu $\operatorname{bar}_{\operatorname{top}(e')}$, wie in Schritt 3 festgelegt.
- (v) w_5 sei der Weg von $\operatorname{bar}_{\operatorname{top}(e')}$ zu $\operatorname{bar}_{\operatorname{NF}(e')}$, wie in Schritt 5 festgelegt.

Wir wollen nun für einen Weg w unter \overline{w} den Weg $t \mapsto w(1-t)$ verstehen. Damit erhalten wir einen geschlossenen Weg

$$w = w_5 \cdot \overline{w_4} \cdot w_3 \cdot \overline{w_2} \cdot \overline{w_1}$$

mit Aufpunkt $\operatorname{bar}_{e'}$.

Dieser Weg hat eine für unsere Zwecke wichtige Eigenschschaft:

w ist nullhomotop.

Dies ist klar nach Konstruktion des Weges, denn für jede Zelle |e|, die der Weg durchläuft, gilt $e' \leq e$.

<u>Schritt 7:</u> Wir konstruieren nun die Isomorphismen

$$\mathcal{A}(\epsilon_i, id, e) : \mathcal{A}_e \to \mathcal{A}_{\partial'_i(e)}$$

und

$$\mathcal{A}(id, \epsilon_i, e) : \mathcal{A}_e \to \mathcal{A}_{\partial''_i(e)}.$$

Dazu starten wir mit einem Erzeuger $o(e) \in \mathbb{Z} < e >$, und verschieben diese Orientierung entlang des Weges $\overline{w_4} \cdot w_3 \cdot \overline{w_2} \cdot \overline{w_1}$ nach e'. Dies führt zu folgendem Vorzeichenwechsel:

(i) Sei h = norm(e). Die Zelle e ist Seite von top(e), einer nach Schritt 1 fest orientierten, höchstdimensionalen Zelle, es gilt also ∂''_{D2}(∂'_{D1}(top(e))) = e mit D₁ = {i₁,...,i_n}, 1 ≤ i₁ < ... < i_n ≤ h - 1 und D₂ = {j₁,...,j_m}, 1 ≤ j₁ < ... < j_m ≤ 2h - 1. Dies führt zu einem Vorzeichen v₀ ∈ {-1,1} für die Orientierung der Seite e über

$$v_0 = (-1)^{i_n} \dots (-1)^{i_1} (-1)^{j_m} \dots (-1)^{j_1}.$$

Dies läßt sich auch mit Hilfe von Shuffle-Abbildungen ausdrücken. Sei dazu $\{i'_1, \ldots, i'_{h-n}\} = \{1, \ldots, h\} \setminus D_1$ und $i'_1 < \ldots < i'_{h-n}$. Wir setzen $s_1 : \{1, \ldots, h\} \to \{1, \ldots, h\} \in \mathfrak{S}_h, s_1(1) = i'_1, \ldots, s_1(h-n) = i'_{h-n}, s_1(h-n+1) = i_1, \ldots, s_1(h) = i_n$. Auf analoge Weise definieren wir $s_2 \in \mathfrak{S}_{2h-1}$. Dann ist $v_0 = \operatorname{sign}(s_1)\operatorname{sign}(s_2)$.

- (ii) Seien e₀, ..., e_n die höchstdimensionalen Zellen, welche auf dem Weg w₄ ⋅ w₃ in der geometrischen Realisation von |B| besucht werden, also insbesondere e₀ = top(e) und e_n = top(e'). Sei 1 ≤ j ≤ n. Ist ∂'_k(e_{j-1}) = ∂'_l(e_j) oder ∂''_k(e_{j-1}) = ∂''_l(e_j), so setzen wir v_j = +1, falls e_{j-1} und e_j auf der gemeinsamen Seite unterschiedliche Orientierungen induzieren, also (-1)^k ≠ (-1)^l ist; anderenfalls setzen wir v_j = -1.
- (iii) Wir wählen v_{n+1} wie beim Fall (i), jetzt für e' als Seite von top(e').

(iv) Wir setzen nun für e, e' mit $e' = \partial'_i(e)$

$$\mathcal{A}(\epsilon_i, id, e) : \mathcal{A}_e \to \mathcal{A}_{e'}, e \mapsto \prod_{j=0}^{n+1} v_j \cdot e',$$

und falls $e' = \partial_i''(e)$, so

$$\mathcal{A}(id, \epsilon_i, e) : \mathcal{A}_e \to \mathcal{A}_{e'}, e \mapsto \prod_{j=0}^{n+1} v_j \cdot e'.$$

In dem beigefügten Computerprogramm werden die Wege in leicht abgewandelter Form durchlaufen, und Vorzeichen notiert. Es wird zunächst mit Start in bar_e der Weg $\overline{w_4} \cdot w_3$ durchlaufen, anschließend mit Start in bar_{e'} der Weg $w_2 \cdot w_1$ durchlaufen, mit gemeinsamem Endpunkt bar_{NF(e')}. Dabei werden die Vorzeichenwechsel notiert, wie oben beschrieben. Das Resultat ändert sich dabei nicht.

3.1.2 Satz. Die in Schritt 7, (iv) festgelegten Homomorphismen $\mathcal{A}_e \to \mathcal{A}_{e'}$ definieren ein lokales Koeffizientensystem auf \mathbb{B} .

Beweis: Wir müssen für die Homomorphismen $\mathcal{A}_e \to \mathcal{A}_{e'}$ zeigen, daß sie im folgenden Sinne miteinander kompatibel sind:

Sind e, e'_1, e'_2 und $e'' \in \mathbb{B}$ mit $e'_1 = \partial'_{i_1}(e), e'_2 = \partial'_{i_2}(e), \partial'_{i_3}(e'_1) = e'' = \partial_{i_4}(e'_2)$ (bzw. $e'_1 = \partial''_{j_1}(e), e'_2 = \partial''_{j_2}(e), \partial''_{j_3}(e'_1) = e'' = \partial_{j_4}(e'_2)),$ so muß das folgende Diagramm kommutieren:



Nur dann kann man mittels Komposition der bisher definierten Homomorphismen ein lokales Koeffizientensystem erhalten.

Wir setzen $h_1 : \mathcal{A}_e \to \mathcal{A}_{e'_1} \to \mathcal{A}_{e''}$ und $h_2 : \mathcal{A}_e \to \mathcal{A}_{e'_2} \to \mathcal{A}_{e''}$. Wir betrachten nun den Homomorphismus h_1 , und stellen fest, daß sich in dieser Komposition der beiden Homomorphismen $\mathcal{A}_e \to \mathcal{A}_{e'_1}$ und $\mathcal{A}_{e'_1} \to \mathcal{A}_{e''}$ das Vorzeichen für e'_1 als Seite von top (e'_1) , welches in Schritt 7, (i) festgelegt wird, herauskürzt, da es im gesamten
Produkt aller Vorzeichen zweimal vorkommt.

Daher können sich die zwei Morphismen h_1 und h_2 nur noch unterscheiden, falls das für den Weg von top(e) nach top(e'') über e'' vergebene Vorzeichen von der konkreten Wahl des Weges abhängt. Wir zeigen nun, daß dies nicht der Fall ist.

Dazu möge man sich zunächst mit Abschnitt 3 vertraut machen, in dem Swaps und Rauzy-Sprünge für höchstdimensionale Zellen erklärt werden. Da der vertikale Randoperator mit dem horizontalen Randoperator kommutiert, können wir an dieser Stelle Swaps und Rauzy-Sprünge getrennt betrachten. Wir stellen zunächst fest, daß die Parität der Anzahl der Swaps ebenso wie die Parität der Anzahl der Rauzy-Sprünge für jeden Weg von top(e) nach top(e'') über e'' konstant ist. Daher ist im Falle von Swaps das Vorzeichen unabhängig von der Wahl des Weges, da für jeden Swap das Vorzeichen -1 vergeben wird. Dies liegt daran, daß für jede höchstdimensionale Zelle \hat{z} und jedes *i* die Gleichung swap_i(swap_i(\hat{z})) = \hat{z} gilt.

Für den Fall der Rauzy-Sprünge können wir nun das Problem schrittweise reduzieren auf den Fall, daß rauzy_{j1}(rauzy_{j2}(top(e))) = top(e'') ist, also daß sich top(e) und top(e'') nur um zwei Rauzy-Sprünge voneinander unterscheiden. Eine Unterscheidung der Rauzy-Sprünge nach den 4 möglichen Typen unter Beachtung der Definition der Vorzeichenvergabe in Schritt 7, (ii) zeigt auch hier, daß das vergebene Vorzeichen für den Weg von top(e) nach top(e'') unabhängig vom gewählten Weg ist.

Das Koeffizientensystem, welches wir festgelegt haben, läßt sich auch allgemeiner für bisemisimpliziale Mengen X, die gewisse Voraussetzungen erfüllen, konstruieren. Es vergleicht die Orientierung eines Simplexes $x \in X_{p,q}$ mit der Orientierung eines Bildes $x' \in X_{p-1,q}$ bzw. $x' \in X_{p,q-1}$ entlang eines nullhomotopen Weges über höchstdimensionale Zellen. Wir wollen daher definieren:

3.1.3 Definition. Sei X eine bisemisimpliziale Menge und \mathcal{O} ein lokales Koeffizientensystem darauf. Ferner sei $X_{p,q} = \emptyset$, falls p oder q hinreichend groß ist, die Realisierung von X sei zusammenhängend, und es gelte folgendes: Die Vergabe von Vorzeichen wie im Fall von \mathbb{B} entlang höchstdimensionaler Bisimplexe wie in Schritt 7, (ii) ist wegunabhägig.

Dann heißt \mathcal{O} Orientierungssystem, falls gilt:

(1) Für jeden Morphismus α in Δ_{semi} und jedes $x \in X_{p,q}$ ist

$$\mathcal{O}(\alpha, x) : \mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_{X(\alpha)(x)}$$

ein Isomorphismus.

- (2) Eine (und damit jede) Koeffizientengruppe \mathcal{O}_x ist isomorph zu \mathbb{Z} .
- (3) Alle Isomorphismen $\mathcal{O}(\alpha, x) : \mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_{X(\alpha)(x)}$ gehen aus einer Konstruktion, wie in den Schritten 1 bis 7 für \mathbb{B} erfolgt, hervor.

Mit Hilfe des Orientierungssystemes läßt sich nun eine Form der Poincaré-Lefschetz-Dualität angeben, die es uns ermöglicht, die Kohomologie der Modulräume $\mathfrak{M}_{a,1}^c$ mit ganzzahligen Koeffizienten zu berechnen. Zunächst einmal ergibt sich nach [Eh1], S.2

$$\tilde{H}_*(\operatorname{Par}(h,c),\operatorname{W}(h,c);\mathbb{Z})\cong H^{3h-3-*}(\mathfrak{M}_{g,1}^c;\mathbb{Z}) \text{ mit } g=\frac{h-c}{2}$$

für c = 0, 1 und

$$\tilde{H}_*(\operatorname{Par}(h,c), W(h,c); \mathbb{Z}_2) \cong H^{3h-3-*}(\mathfrak{M}_{g,1}^c; \mathbb{Z}_2) \text{ mit } g = \frac{h-c}{2}$$

für $c \geq 2$, wobei wir jeweils auf der linken Seite reduzierte Homologie meinen. Dies liegt daran, daß (Par(h,c),W(h,c)) eine relative Mannigfaltigkeit ist und ferner Par(h,c)\W(h,c) = $\mathfrak{Par}(h,c)$ homotopieäquvalent zu $\mathfrak{M}_{g,1}^c$ ist $(g = \frac{h-c}{2})$. Dann benutze man die Formel aus [Dol], S.297. Wie in [Spa], S.357 läßt sich dies verallgemeinern zu

$$\tilde{H}_*(\operatorname{Par}(h,c), W(h,c), \mathcal{O}) \cong H^{3h-3-*}(\mathfrak{M}_{g,1}^c; \mathbb{Z})$$

für ein Orientierungssystem \mathcal{O} auf \mathbb{B} . Wenn wir berücksichtigen, daß

$$H_n(\operatorname{Tot}(\overline{Sym}^{\mathcal{O}}_{*,*,h,c})) \cong H_n(\operatorname{Par}(h,c), W(h,c), \mathcal{O})$$

ist, so können wir also mit Hilfe der Spektralsequenz aus Kapitel 2, Abschnitt 3 die Kohomologie der Modulräume ganzzahlig berechnen.

3.2 Die top-Funktion

Seien h und c fest, von gleicher Parität. In diesem Abschnitt wollen wir ein Verfahren beschreiben, welches einer Zelle $e \in \mathbb{B}_{*,*,h,c}$ eine Zelle $\hat{e} \in \mathbb{B}_{2h,h,h,c}$ zuordnet, und Mengen $D_1 \subset \{1, \ldots, h-1\}, D_2 \subset \{1, \ldots, 2h-1\}$ ermittelt, so daß $\partial'_{D_2}(\partial'_{D_1}(\hat{e})) = e$ gilt. Wir nennen diese Funktion

$$\operatorname{top}: \mathbb{B}_{*,*,h,c} \to \mathbb{B}_{2h,h,h,c}, \ e \mapsto \hat{e}.$$

Sei $e \in \mathbb{B}_{*,*,h,c}$ Zunächst wollen wir die Idee des Verfahrens an zwei Situationen geometrisch erläutern.

Situation 1: In einer Schlitzkonfiguration, welche e symbolisiert, sind zwei Schlitzpaare gleich lang.

Dann ist e keine höchstdimensionale Zelle, da der vertikale Grad q kleiner als h ist. Um dies aufzuheben, ziehen wir die beiden Paare entlang der x-Achse auseinander, indem wir eines der Paare auf ein etwas größeres x-Niveau verlängern, welches noch keinem der größeren vorkommenden x-Niveaus der Konfiguration gleicht.



<u>Situation 2:</u> In einer Schlitzkonfiguration, welche e symbolisiert, sind zwei Schlitze auf gleichem y-Niveau. Dann ist e keine höchstdimensionale Zelle, da der horizontale Grad p kleiner als 2h ist. Um dem entgegenzuwirken, ziehen wir die beiden Schlitze entlang der y-Achse auseinander.



Würde man sukzessive eine Zelle auf diese Weise behandeln, erhielte man eine höchstdimensionale Zelle. Das Problem bei dieser geometrischen Beschreibung liegt jedoch darin, daß die Darstellung einer Zelle durch eine Schlitzkonfiguraton nur bis auf Rauzy-Sprünge eindeutig ist, und verschiedene Darstellungen verschiedene höchstdimensionale Zellen nach sich ziehen können. Wir ziehen uns daher auf die algebraische Darstellung der Zellen zurück. Hierbei sind notwendige Normierungen und Wahlen leicht durchzuführen. Wir behalten jedoch die geometrischen Ideen des Auseinanderziehens entlang einer Achse im Hinterkopf.

Zunächst fixieren wir einen beliebigen Algorithmus, welcher eine Permutation in ihre disjunkten Zykeln zerlegt, und nennen ihn Zykelzerlegung.

3.2.1 Algorithmus. (top-Funktion) Sei $e = (\tau_q | \dots | \tau_1) \in \mathbb{B}_{p,q,h,c}$ in inhomogener Notation. Dieser Algorithmus liefert $\hat{e} = (\hat{\tau}_h | \dots | \hat{\tau}_1) \in \mathbb{B}_{2h,h,h,c}$ in inhomogener Notation und Mengen $D_1 \subset \{1, \dots, h-1\}, D_2 \subset \{1, \dots, 2h-1\}$ mit $\partial''_{D_2}(\partial'_{D_1}(\hat{e})) = e$.

(i) [initialisere] Setze $D_1 \leftarrow D_2 \leftarrow \emptyset, d_1 \leftarrow v \leftarrow \tilde{\tau}_1 \leftarrow \ldots \leftarrow \tilde{\tau}_q \leftarrow \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{2h},$ $index \leftarrow n \leftarrow 0.$

Für $i = q, \ldots, 1$ führe aus:

(ii) [Zykelzerlegung] Finde mit der Funktion "Zykelzerlegung" Zykel $\langle i_1^{(l)}, \ldots, i_{r_l}^{(l)} \rangle$, so daß

$$\tau_i = \langle i_1^{(1)}, \dots, i_{r_1}^{(1)} \rangle \langle i_1^{(2)}, \dots, i_{r_2}^{(2)} \rangle \dots \langle i_1^{(n)}, \dots, i_{r_n}^{(n)} \rangle.$$

Dabei werden Fixpunkte ausgelassen. Setze $\tilde{\tau}_i \leftarrow (i_1^{(1)}, \dots, i_{r_1}^{(1)}, i_1^{(2)}, \dots, i_{r_2}^{(2)}, \dots, i_1^{(n)}, \dots, i_{r_n}^{(n)}).$

- (iii) [Anzahl der x-Niveaus] Setze $d_1(i) \leftarrow \sum_{l=1}^n r_l n 1$.
- (iv) [Auseinanderziehen entlang der x-Achse] Setze $\tilde{\tau}_i \leftarrow (i_1^{(1)}, i_2^{(1)}, i_2^{(1)}, i_3^{(1)}, i_3^{(1)}, \dots, i_{r_1-1}^{(1)}, i_{r_1-1}^{(1)}, i_{r_1}^{(2)}, i_2^{(2)}, i_2^{(2)}, \dots, i_{r_n-1}^{(n)}, i_{r_n}^{(n)}, i_{r_n}^{(n)}).$

(die Einträge $i_1^{(l)}, i_{r_l}^{(l)}$ werden einfach, alle anderen doppelt eingetragen)

Ende der *i*-Schleife.

- (v) [D_1 erstellen] Setze $j \leftarrow 1$. Für i = 1, ..., h unterscheide: Falls $d_1(j) > 0$, so füge i in D_1 ein und setze $d_1(j) \leftarrow d_1(j) - 1$. Anderenfalls setze $j \leftarrow j + 1$.
- (vi) [Auseinanderziehen entlang der y-Achse, dabei D_2 erstellen] setze $v = (v_1, \ldots, v_{2h}) \leftarrow (\tilde{\tau}_q, \ldots, \tilde{\tau}_1) \in \{1, \ldots, p\}^{2h}, D_2 = \emptyset$. Für $i = 2h, \ldots, 1$ setze index $\leftarrow v_i$ und unterscheide: Falls index $\notin \{v_{i+1}, \ldots, v_{2h}\}$, so mache in der Iteration i nichts. Anderenfalls setze index $\leftarrow min\{k \ge index \mid k \notin D_2\}$ (index bleibt unverändert, falls index $\notin D_2$.) Dann erhöhe alle Elemente von $\{v_1, \ldots, v_{2h}\}$ und D_2 , welche größer als index sind, um 1. Füge index in D_2 ein. Ende der *i*-Schleife.
- (vii) [fertig] Setze $\hat{\tau}_h \leftarrow \langle v_1, v_2 \rangle, \hat{\tau}_{h-1} \leftarrow \langle v_3, v_4 \rangle, \dots, \hat{\tau}_1 \leftarrow \langle v_{2h-1}, v_{2h} \rangle$ und $\hat{e} = (\tau_h | \dots | \tau_1).$

Beweis: Um einzusehen, daß der Algorithmus das Gewünschte leistet, geben wir zunächst eine Darstellung der Seitenoperatoren auf Zellen in inhomogener Notation an. Für den vertikalen Seitenoperator gilt

$$\partial'_i(e) = (\tau_q | \dots | \tau_{i+1} \tau_i | \dots | \tau_1).$$

Der horizontale Seitenoperator stellt sich für beliebige Zellen etwas komplizierter dar, aber für den Fall, daß $\tau_q = \langle a_q, b_q \rangle, \ldots, \tau_1 = \langle a_1, b_1 \rangle$ Transpositionen sind, ist

$$\partial_i''(e) = (\tilde{\tau}_q | \dots | \tilde{\tau}_1).$$

Dabei ist $\tilde{\tau}_j = \langle \tilde{a}_j, \tilde{b}_j \rangle$ mit $\tilde{a}_j = \begin{cases} a_j - 1 & \text{falls } a_j > i \\ a_j & \text{falls } a_j \le i \end{cases}$, $\tilde{b}_j = \begin{cases} b_j - 1 & \text{falls } b_j > i \\ b_j & \text{falls } b_j \le i. \end{cases}$

Die Zykelzerlegung in (ii) führt nun dazu, daß dem vertikalen Randoperator entgegengewirkt wird, wie zu Anfang des Abschnitts in Situation 1 beschrieben. Schreiben wir die Zykel $\tau_{i,l} = \langle i_1^{(l)}, \ldots, i_{r_l}^{(l)} \rangle$ noch als Komposition von Transpositionen, also $\tau_{i,l} = \langle i_1^{(l)}, i_2^{(l)} \rangle, \ldots, \langle i_{r_l-1}^{(l)}, i_{r_l}^{(l)} \rangle$, so bildet die Gesamtheit dieser Transpositionen, über alle *i* und *l* gebildet, eine Zelle *ẽ* in inhomogener Notation vom Bigrad (p, h), hat also vertikal bereits höchste Dimension. Diese Daten enthält *v*.

Mit d_1 halten wir fest, wieviele verschiedene x-Niveaus der vertikale Seitenoperator, angewandt auf \tilde{e} , zu einem x-Niveau zusammengefaßt hat. Daraus liest man D_1 im Schritt (iv) ab. Dem horizontalen Seitenoperator wirken wir in Schritt (vi) entgegen. Das Erhöhen der Elemente von $\{v_1, \ldots, v_{2h}\}$ in Abhängigkeit von *index* verläuft genau invers zum horizontalen Seitenoperator und entspricht dem Auseinanderziehen von y-Niveaus, wie anfangs unter Situation 2 beschrieben. Man beachte hierbei, daß $\{v_1, \ldots, v_{2h}\}$ ausschließlich Transpositionen symbolisiert. In (vi) sind schließlich v_1, \ldots, v_{2h} paarweise verschieden, und sie bilden die Transpositionen der höchstdimensionalen Zelle \hat{e} , welche e als Seite besitzt. Ferner sei erwähnt, daß die Setzung $index \leftarrow min\{k \ge index \mid k \notin D_2\}$ eine Normierung darstellt, die dazu führt, daß in \hat{e} die Schlitze eine bestimmte Anordnung besitzen.

Die genaue Anordnung der Schlitzpaare von top(e) soll im nächsten Abschnitt studiert werden.

3.3 Eine Normalform für höchstdimensionale Zellen

Für diesen Abschnitt seien h, c, p, q > 0 und $e \in \mathbb{B}_{p,q,h,c}$. An dieser Stelle sei nochmals erwähnt, daß \mathbb{B} ausschließlich reduzierte Zellen enthält. Wir wollen hier die Menge

$$\mathcal{H}(e) = \{ \hat{e} \in \mathbb{B}_{2h,h,h,c} \mid e \le \hat{e} \} \subset \mathbb{B}_{2h,h,h,c}$$

der höchstdimensionalen Zellen über e genauer untersuchen und eine Normalform für Zellen dieser Menge festlegen. Zu diesem Zweck erklären wir, was Swaps und Rauzy-Sprünge sein sollen. Sei $\hat{e} = (\tau_h | \dots | \tau_1) \in \mathcal{H}(e)$ in inhomogener Notation und $D_1 \subset \{1, \dots, h-1\}, D_2 \subset \{1, \dots, 2h-1\}$ mit $\partial''_{D_2} \partial'_{D_1}(\hat{e}) = e$.

3.3.1 Definition. Sei $i \in D_1$. Dann grenzen die Schlitzpaare zu τ_{i+1} und τ_i an den *i*-ten vertikalen Streifen im zugehörigen Schlitzdiagramm an. Wir vertauschen nun die *y*-Niveaus der beiden Schlitzpaare.



Wir definieren also

$$\operatorname{swap}_{i}(\hat{e}) = (\tau_{h}| \dots |\tau_{i+2}| \tau_{i} |\tau_{i+1}| \tau_{i-1} | \dots |\tau_{1})$$

und sprechen von einem Swap von \hat{e} an i.

Es ist dann swap_i(\hat{e}) $\in \mathcal{H}(e)$, mit denselben Mengen D_1 und D_2 wie bei \hat{e} . Dies liegt daran, daß für die disjunkten Transpositionen τ_i und τ_{i+1} die Gleichung $\tau_i \tau_{i+1} = \tau_{i+1} \tau_i$ gilt, und daher ist $\partial_{D_2}'(\partial_{D_1}'(\operatorname{swap}_i(\hat{e}))) = e$.

Für die nächste Definition weisen wir darauf hin, daß die Permutationen $\alpha_{a,b}^+$ und $\alpha_{a,b}^-$ bereits in Kapitel 1, Abschnitt 3 festgelegt worden sind.

3.3.2 Definition. Set $i \in D_2$. Es gibt dann eindeutig bestimmte $k, l \in \{1, \ldots, h\}$ mit $\tau_k(i) \neq i, \tau_l(i+1) \neq i+1$.

Man beachte, daß $k \neq l$ ist, da sonst enicht reduziert wäre. Es können sich jetzt 4 Fälle ergeben:

(1) Es ist l < k und $\tau_l(i+1) < i$. Der kürzere Schlitz liegt also unter dem längeren, und der zum längeren gepaarte Schlitz liegt unterhalb von beiden.



Dann setzen wir $\alpha = \alpha_{\tau_l(i+1)+1,i}^+$ und $\tilde{\tau}_j = \alpha \tau_j \alpha^{-1}$ für alle $1 \leq j \leq h$. Ferner setzen wir $\alpha_{D_2} = \alpha_{\tau_l(i+1),i}^+$ und $\tilde{D}_2 = \alpha_{D_2}(D_2)$.

(2) Es ist l < k und $\tau_l(i+1) > i+1$. Der kürzere Schlitz liegt also unter dem längeren, und der zum längeren gepaarte Schlitz liegt oberhalb von beiden.



Dann setzen wir $\alpha = \alpha_{i,\tau_l(i+1)}^-$ und $\tilde{\tau}_j = \alpha \tau_j \alpha^{-1}$ für alle $1 \leq j \leq h$. Ferner setzen wir $\alpha_{D_2} = \alpha_{i,\tau_l(i+1)-1}^-$ und $\tilde{D}_2 = \alpha_{D_2}(D_2)$.

(3) Es ist l > k und $\tau_k(i) < i$. Der kürzere Schlitz liegt also über dem längeren, und der zum längeren gepaarte Schlitz liegt unterhalb von beiden.



Dann setzen wir $\alpha = \alpha_{\tau_k(i),i+1}^+$ und $\tilde{\tau}_j = \alpha \tau_j \alpha^{-1}$ für alle $1 \leq j \leq h$. Ferner setzen wir $\alpha_{D_2} = \alpha_{\tau_k(i),i}^+$ und $\tilde{D}_2 = \alpha_{D_2}(D_2)$.

(4) Es ist l > k und $\tau_k(i) > i+1$. Der kürzere Schlitz liegt also über dem längeren, und der zum längeren gepaarte Schlitz liegt oberhalb von beiden.



Dann setzen wir $\alpha = \alpha_{i+1,\tau_k(i)-1}^-$ und $\tilde{\tau}_j = \alpha \tau_j \alpha^{-1}$ für alle $1 \leq j \leq h$. Ferner setzen wir $\alpha_{D_2} = \alpha_{i,\tau_k(i)-1}^-$ und $\tilde{D}_2 = \alpha_{D_2}(D_2)$.

Wir definieren damit

$$\operatorname{rauzy}_i(\hat{e}) = (\tilde{\tau}_h | \dots | \tilde{\tau}_1)$$

und sprechen von einem Rauzy-Sprung von \hat{e} an i.

In allen vier Fällen springt man also mit dem in der Zeichnung nicht-gepaarten Schlitz in Pfeilrichtung auf den gestrichelten Schlitz, die *y*-Niveaus der Schlitze dazwischen werden jeweils um eins in der entgegengesetzten Richtung verändert.

3.3.3 Lemma. Mit den Bezeichnungen dieses Abschnitts und $i \in D_2$ ist

rauzy_i $(\hat{e}) \in \mathcal{H}(e)$, mit Mengen D_1 und \tilde{D}_2 .

Beweis: Wir setzen $r = \alpha_{D_2}(i) \in \tilde{D}_2$ und denken uns \hat{e} und rauzy_i (\hat{e}) repräsentiert durch Schlitzkonfigurationen wie in Kapitel 1, Abschnitt 3.

Schlitzkonfigurationen zu $\partial_i''(\hat{e})$ und $\partial_r''(\operatorname{rauzy}_i(\hat{e}))$ unterscheiden sich nur um einen Rauzy-Sprung im Sinne von Kapitel 1, Abschnitt 3, und wegen des Bijektionssatzes 1.3.4 ist daher $\partial_i''(\hat{e}) = \partial_r''(\operatorname{rauzy}_i(\hat{e}))$. Da $e \leq \partial_i''(\hat{e})$ folgt damit $\operatorname{rauzy}_i(\hat{e}) \in \mathcal{H}(e)$. \Box

3.3.4 Bemerkung.

 Den Index r = α_{D2}(i) des Lemmas kann man als Rücksprungindex auffassen, denn es ist rauzy_r(rauzy_i(ê)) = ê, wie man durch einzelne Betrachtung der vier möglichen Sprungtypen sieht. Liegt dabei vor dem Rauzy-Sprung an i der Fall (1) vor, so befinden wir uns zum Rücksprung an r in Fall (4). Ebenso korrespondieren die Sprungfälle (2) und (3). (2) Der Zusammenhang zwischen den Rauzy-Sprüngen des Kapitels 1, Abschnitt 3 und den hier eingeführten Rauzy-Sprüngen ist nun klar: Man kann sich jede Zelle e ∈ B_{p,q,h,c} mit p ≤ 2h, q ≤ h auch vorstellen als höchstdimensionale Zelle ê zusammen mit Mengen D₁, D₂, so daß ∂''_{D₂}(∂'_{D₁}(ê)) = e gilt. Darstellungen von e durch Klassen [L] von Schlitzkonfigurationen korrespondieren mit höchstdimensionalen Zellen ê über e.

An dieser Stelle ist es lohnenswert, für die graphische Darstellung von Zellen in $\mathcal{H}(e)$ und den dazugehörigen Mengen D_1 , D_2 spezielle Diagramme einzuführen. Der Buchstabe *i* ohne Index stehe hier für die imaginäre Einheit.

3.3.5 Definition. Sei $\hat{e} \in \mathcal{H}(e)$ und $\partial_{D_2}'(\partial_{D_1}'(\hat{e})) = e$. Wir legen zunächst Mengen S, R und $B' \subset \mathbb{C}$ fest:

(1) Ist $D_1 = \{i_1, \dots, i_n\} \subset \{1, \dots, h-1\}$ mit $i_1 < \dots < i_n$, so setzen wir $S = \left| \begin{array}{c} n \\ \left[h - i_k, h+1 - i_k\right] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}. \end{array} \right|$

$$S = \bigcup_{k=1} [h - i_k, h + 1 - i_k] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

(2) Ist $D_2 = \{j_1, \dots, j_m\} \subset \{1, \dots, 2h-1\}$ mit $j_1 < \dots < j_m$, so setzen wir

$$R = \bigcup_{l=1}^{m} [ij_l, i(j_l+1)] \subset i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

(3) Seien $j \in \{1, \ldots, h\}$ und $k < l \in \{1, \ldots, h\}$ so gewählt, daß $\tau_j(k) = l$ ist. Damit sei B_j^- die Strecke von ik nach $h+1-j+i\frac{k+l}{2}$ und B_j^+ die Strecke von il nach $h+1-j+i\frac{k+l}{2}$. Wir setzen damit $B_j = B_j^- \cup B_j^+$ und $B' = \bigcup_{i=1}^h B_j$.

Damit setzen wir insgesamt $B = B(\hat{e}, D_1, D_2) = S \cup R \cup B'$ und nennen B das zu \hat{e}, D_1, D_2 gehörige erweiterte, gewichtete Bogendiagramm oder kurz Bogendiagramm.

Wir wollen hier einige Sprechweisen zu Zellen und zugehörigen Bogendiagrammen einführen und verwenden dabei die Bezeichnungen aus der Definition. Sei $\hat{e} \in \mathcal{H}(e)$ und *B* das zugehörige Bogendiagramm.

Die Menge B_j bezeichnen wir als *j*-ten Bogen von *B* oder als Bogen zu τ_j . Die Teilmengen B_j^+ und B_j^- von B_j heißen Bogenenden. Ist $B_j^{\pm} \in \{B_j^+, B_j^-\}$ ein Bogenende, so nennen wir die Zahl $h + 1 - j \in \{1, \ldots, h\}$ seine Länge.

Über die Ordnung auf den natürlichen Zahlen ist damit festgelegt, wann ein Bogenende länger oder kürzer als ein anderes Bogenende ist. Den Imaginärteil des linken Endpunkts eines Bogenendes nennen wir seine Höhe, sie ist ein Element von $\{1, \ldots, 2h\}$. Damit ist festgelegt, wann ein Bogenende höher oder tiefer als ein anderes Bogenende ist.

Wir sagen, ein Bogen B_j sei länger als ein Bogen $B_{j'}$, falls die Bogenenden von B_j länger als die Bogenenden von $B_{j'}$ sind. Ferner sei ein Bogen B_j höher als ein Bogen $B_{j'}$, falls das tiefere Bogenende von B_j , also B_j^- , höher als das tiefere Bogenende $B_{j'}^-$ von $B_{j'}$ ist.

Mit $l_j(\hat{e}) = L$ änge des auf Höhe j gelegenen Bogenendes $\in \{1, \ldots, h\}$ kürzen wir die Länge des Bogenendes, welches sich auf der Höhe j befindet, ab.

Ist $k \in D_1$, so nennen wir $[h-k, h-k+1] \subset S$ einen Swap-Bereich und sagen, daß zwei Bögen B_j und $B_{j'}$ zu einem Swap-Bereich gehören, falls die Länge von B_j und die Länge von $B_{j'}$ Elemente (ein- und desselben) Swap-Bereichs sind. Ist $l \in D_2$, so heißt [il, i(l+1)] Rauzy-Bereich, und sagen, daß zwei Bogenenden B_j^{\pm} und $B_{j'}^{\pm}$ zu einem Rauzy-Bereich gehören, falls die Punkte $i \cdot \text{Höhe}(B_j^{\pm})$ und $i \cdot \text{Höhe}(B_{j'}^{\pm})$ Elemente (ein- und desselben) Rauzy-Bereichs sind.

3.3.6 Bemerkung. Da wir uns nur für die lineare Anordnung der Real- und Imaginärteile der Punkte interessieren, wollen wir auch jede Menge $\tilde{B} \subset \mathbb{C}$, die durch Anwendung von ordnungserhaltenden Homöomorphismen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Real- und Imaginärteil der Elemente von *B* aus *B* hervorgeht, ein zu \hat{e}, D_1 und D_2 gehöriges Bogendiagramm nennen. Die oben aufgeführten Sprechweisen sind dann auch für diese Bogendiagramme noch sinnvoll.

3.3.7 Beispiel. Sei $\hat{e} = (\langle 23 \rangle | \langle 47 \rangle | \langle 15 \rangle | \langle 68 \rangle), D_1 = \{3\}$ und $D_2 = \{1, 4, 7\}$. Dies stellt sich im Bogendiagramm wie folgt dar:



 B_3 und B_4 liegen im Swap-Bereich [1, 2] B_2 und B_4 liegen im Rauzy-Bereich [i1, i2] B_2 und B_3 liegen im Rauzy-Bereich [i4, i5] B_3 und B_1 liegen im Rauzy-Bereich [i7, i8]

Die Bögen B_1, \ldots, B_h von B könnte man mit Zahlen g_1, \ldots, g_h versehen, sogenannten Gewichten. Dann hätte man, wenn man $B \setminus S$ betrachtet, bis auf eine Drehung die gewichteten Bogendiagramme aus [Eh1], S.14. Die Gewichte sind hier allerdings überflüssig, da B_k , der Bogen zu τ_k , kürzer als der Bogen zu τ_j ist, falls k > j gilt. Erweitert haben wir die Diagramme aus [Eh1] um die Menge S.

Rauzy-Sprünge und Swaps sind auf offensichtliche Art und Weise auch für Bogendiagramme definiert.

Wir kommen nun zum Ziel dieses Abschnittes.

3.3.8 Satz. Es gibt genau eine Zelle $\hat{e} \in \mathcal{H}(e)$, welche den folgenden Bedingungen genügt:

- (1) Liegen zwei Bögen in einem Swap-Bereich, so liegt der kürzere Bogen höher als der längere.
- (2) Liegen zwei Bogenenden in einem Rauzy-Bereich, so liegt das kürzere der beiden Enden höher als das längere.
- (3) Liegen zwei Bögen B_j und $B_{j'}$ in einem Swap-Bereich, ist $B_{j'}$ länger als B_j und befinden sich ein Bogenende B_j^{\pm} von B_j und ein Bogenende von $B_{j'}$ in einem Rauzy-Bereich, so liegt B_j^{\pm} höher als beide Bogenenden von $B_{j'}$.

Wir deuten eine Zelle, die den Bedingungen des Satzes genügt, exemplarisch wie folgt an:



Bedingung (2) bedeutet also gerade, daß keine Rauzy-Sprünge vom Falle (1) oder (2) möglich sind.

Zum Beweis des Satzes geben wir einen Algorithmus an.

3.3.9 Algorithmus. Sei $\hat{e} \in \mathcal{H}(e)$ mit $\partial_{D_2}'(\partial_{D_1}'(\hat{e})) = e$. Dieser Algorithmus überführt \hat{e} in eine Zelle, welche den Bedingungen des Satzes genügt.

- (i) [Rauzy-Sprünge] Führe mit ê Rauzy-Sprünge vom Typ (1) oder (2) durch, bis nur noch Rauzy-Sprünge vom Typ (3) oder (4) möglich sind.
- (ii) [Swaps] Führe mit \hat{e} Swaps der Art durch, daß der kürzere Bogen vor Beginn des Swaps unterhalb des längeren Bogens ist.
- (iii) [wiederhole?] Falls in Schritt (ii) keine Swaps durchgeführt worden sind, gehe zu (iv). Anderenfalls gehe zu (i).
- (iv) [Bedingung (3) sicherstellen] Gibt es zwei Bögen B_j und $B_{j'}$, welche in einem Swap-Bereich liegen, so daß je ein Bogenende B_j^{\pm} von B_j und $B_{j'}^{\pm}$ von $B_{j'}$ in einem Rauzy-Bereich liegen und die Bedingung (3) des Satzes verletzt ist, so führe zunächst einen Swap dieser beiden Bögen durch und anschließend einen Rauzy-Sprung mit dem kürzeren Bogen im Rauzybereich entlang des längeren. Dann gehe zu (i). War anderenfalls Bedingung (3) des Satzes bei Eintritt in (iv) nicht verletzt, so terminiere.

Wir zeigen nun die Korrektheit des Algorithmus, und dies wird uns auch einen Beweis des Satzes liefern.

Beweis:

Wir stellen fest, daß Schritt (i) in endlich vielen Schritten beendet wird, weil nach Rauzy-Sprüngen vom Typ 1 oder 2 nach und nach in den Rauzy-Bereichen sich kürzere Bogenenden höher als längere Bogenenden befinden, und dann nur noch Rauzy-Sprünge vom Typ (3) oder (4) möglich sind. Ebenso terminiert (ii), denn Swaps werden nur in der Richtung durchgeführt, daß höhere Bögen nach einem Swap die kürzeren sind. Spielt man diese Zelle nach und nach durch, so erhält man eine Zelle, welche den Bedingungen (1) und (2) des Satzes genügt, und so gelangt man in Schritt (iv). Hier kann die Zelle höchstens noch Bedingung (3) des Satzes verletzen. Wir betrachten dafür zwei Bögen, welche sich in einem Swap-Bereich befinden und die je ein Bogenende in einem Rauzy-Bereich haben. Ist Bedingung (3) an dieser Stelle verletzt, so kann dies nur auf die folgende Art und Weise der Fall sein, da die Zelle die Bedingungen (1) und (2) erfüllt: Das tiefere Bogenende des kürzeren Bogens liegt nur höher als ein Bogenende des längeren Bogens, und nicht über beiden Bogenenden. Das höhere Bogenende des kürzeren Bogens kann dabei zwei Positionen haben, unterhalb und oberhalb vom höheren Bogenende des längeren Bogens.

Das Diagramm zeigt nun, wie durch den Swap und anschließenden Rauzy-Sprung die beiden Bögen in eine Position gebracht werden, so daß an dieser Stelle die Bedingungen (1), (2) und (3) des Satzes erfüllt sind:



Man beachte hier, daß sich die beiden "freien" Bogenenden der Bögen nur in anderen, disjunkten Rauzy-Bereichen befinden können, da e sonst nicht reduziert wäre. Es kann nun durchaus wieder der Fall sein, daß an anderen Stellen des Bogendiagramms die Bedingungen (1) oder (2) verletzt sind, aber die Zelle ist nun zumindest in $\mathcal{H}^1(e)$, wobei

$$\mathcal{H}^{1}(e) = \{ \hat{e} \in \mathcal{H}(e) \mid l_{1}(\hat{e}) \ge l_{1}(\hat{e}') \text{ für alle } \hat{e}' \in \mathcal{H}(e) \}.$$

Nach und nach wird die Zelle so transformiert, daß sie sukzessive in

$$\mathcal{H}^{n}(e) = \{ \hat{e} \in \mathcal{H}^{n-1}(e) \mid l_{n}(\hat{e}) \ge l_{n}(\hat{e}') \text{ für alle } \hat{e}' \in \mathcal{H}^{n-1}(e) \}, n \ge 2,$$

liegt. Zum Schluß ist sie Element von $\mathcal{H}^{2h}(e)$, und damit terminiert der Algorithmus. Wegen der Maximalität einer Zelle in $\mathcal{H}^{2h}(e)$ muß ferner $\mathcal{H}^{2h}(e)$ einelementig sein, und damit sind die Korrektheit des Algorithmus und der Satz gezeigt.

3.3.10 Definition. Wir nennen die Zelle, die den Bedingungen des Satzes genügt, Normalform von e und schreiben dafür $NF(e) \in \mathcal{H}(e)$.

Kapitel 4

Smith-Normalform und LLL

Wir stehen jetzt vor der Aufgabe, die Homologie eines Kettenkomplexes

$$\dots \to C_{n+1} \stackrel{\partial_{n+1}}{\to} C_n \stackrel{\partial_n}{\to} C_{n-1} \to \dots$$

zu berechnen. Dabei sind die C_n endlich erzeugte freie K-Moduln von einem gewissen Rang r_n , mit fest gewählten Basen. Dann liegen die Differentiale d_n in Matrizen A_n bezüglich dieser Basen vor.

4.1 Die Smith-Normalform

Im folgenden sei \mathbb{K} ein Hauptidealring und $m, n \in \mathbb{N}$.

4.1.1 Definition. Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Dann sei A in *Smith-Normalform*, falls es ein $k \in \mathbb{N}$ und eine Diagonalmatrix $D = \text{diag}(d_1, \ldots, d_k) \in \mathbb{K}^{k \times k}$ gibt, so daß gilt:

$$A = \left(\begin{array}{cc} D & 0\\ 0 & 0 \end{array}\right)$$

und $d_{i+1}|d_i$ für $1 \le i < k$. Dabei heißen die d_i Elementarteiler von A.

Für das folgende Theorem sei daran erinnert, daß eine quadratische Matrix $V \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unimodular heißt, falls det(V) eine Einheit in \mathbb{K} ist. Ferner ist eine quadratische Matrix genau dann unimodular, wenn sie invertierbar ist.

4.1.2 Theorem. Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ besitzt eine eindeutig bestimmte Matrix $D \in \mathbb{K}^{m \times n}$ in Smith-Normalform und unimodulare Matrizen $U \in \mathbb{K}^{n \times n}, V \in \mathbb{K}^{m \times m}$ mit

$$A = V^{-1}DU^{-1}$$

Beweis: [Coh]

Hat man die Matrix eines Differentials in Smith-Normalform, so läßt sich die Homologie des Kettenkomplexes wegen des folgenden Theorems daraus leicht ablesen.

4.1.3 Theorem. (Elementarteilersatz)

Sei L ein K-Submodul eines freien, endlich erzeugten K-Moduls L'. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften: (1) $d_{i+1}|d_i$ für $1 \leq i < k$ (2) $L'/L \cong \mathbb{K}^{n-k} \oplus \sum_{i=1}^k \mathbb{K}/d_i\mathbb{K}$ als K-Moduln Dabei sind die d_i modulo Einheiten eindeutig bestimmt.

Beweis: [Coh]

4.1.4 Bemerkung. Ist $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, und setzt man L' = Bild(A), $L = \mathbb{K}^m$, so entsprechen die d_i aus dem Theorem zur Smith-Normalform den d_i des Elementarteilersatzes (modulo Einheiten).

Wollen wir jetzt die Homologie des Kettenkomplexes C_* vom Anfang des Kapitels bestimmen und haben bereits das Differential in Smith-Normalform, so ist

$$A_n = V_n^{-1} D_n U_n^{-1}$$
 mit $D_n = \text{diag}(d_1^{(n)}, \dots, d_{k_n}^{(n)}).$

Daraus ergibt sich

Kern
$$\partial_n \cong \mathbb{K}^{r_n - k_n}$$
 und $H(C_n; \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{r_n - k_n - k_{n+1}} \oplus \bigoplus_{i=1}^{k_{n+1}} \mathbb{K}/d_i^{(n+1)}\mathbb{K}.$

Also entspricht die *n*-te Bettizahl von C_* der Zahl $r_n - k_n - k_{n+1}$. Damit verbleibt jetzt die Aufgabe, die Smith-Normalform einer Matrix zu bestimmen. Im folgenden Kapitel seien dazu einige Algorithmen vorgestellt.

4.2 Algorithmen zur Smith-Normalform

Sei jetzt $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ oder ein Körper. Elementare Zeilen- und Spaltenoperationen, also Vertauschungen, Addieren eines Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte) und Multiplizieren mit einer Einheit, sind lediglich Basistransformationen und daher erlaubte Operationen, um eine Matrix in Smith-Normalform zu überführen. Es bezeichne A'_i die i-te Zeile, A_j die j-te Spalte der Matrix A.

Die Matrizen, die den Randoperator eines Kettenkomplexes darstellen, sind in der Regel dünn besetzt und darüber hinaus sind viele Einträge Einheiten. Daher stellt der folgende einfache Eliminationsalgorithmus einen großen Schritt zur Bestimmung der Smith-Normalform dar.

4.2.1 Algorithmus. (Eliminationsalgorithmus)

Gegeben $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, liefert der Algorithmus $\widetilde{D} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und unimodulare Matrizen $U \in \mathbb{K}^{n \times n}, V \in \mathbb{K}^{m \times m}$, so daß $A = V^{-1}\widetilde{D}U^{-1}$ und $\widetilde{D} = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ mit einem $k \in \mathbb{N}, \widetilde{d_{i,j}} \notin \mathbb{K}^{\times}$ für $i, j \geq k$ und E_k =Einheitsmatrix der Dimension k.

- (i) [initialisiere] Setze $i \leftarrow 1, d \leftarrow 0, U \leftarrow E_n, V \leftarrow E_m$.
- (ii) [Pivotsuche] Suche p,q mit $a_{p,q} \in \mathbb{K}^{\times}$ und setze $d \leftarrow a_{p,q}$. Falls kein solches Element existiert, so gehe zu (v).
- (iii) [tausche und eliminiere] tausche $A'_i \leftrightarrow A'_p, V'_i \leftrightarrow V'_p, A_i \leftrightarrow A_q, U_i \leftrightarrow U_q$ und setze $A_i \leftarrow \frac{1}{d}A_i, U_i \leftarrow \frac{1}{d}U_i$. Dann setze $A'_k \leftarrow A'_k - a_{i,k}A'_i, V'_k \leftarrow V'_k - a_{i,k}V'_i$ für $k = i + 1, \ldots, m, A_l \leftarrow A_l - a_{l,i}A_i, U_l \leftarrow U_l - a_{l,i}U_i$ für $l = i + 1, \ldots, n$ und $i \leftarrow i + 1$.
- (iv) [fertig?] Falls $i \leq min(m, n)$, so gehe zu (ii).
- (v) [Ausgabe] Ausgabe von \widetilde{D} , U, V.

Der Algorithmus ist offensichtlich korrekt, er bewegt nach und nach Einheiten auf die Hauptdiagonale und eliminiert dort die restlichen Zeilen- und Spalteneinträge. Im Falle von Körperkoeffizienten führt er offenbar schon zur Smith-Normalform. Für den ganzzahligen Fall benötigen wir als Hilfsmittel den euklidischen Algorithmus, der zu $a, b \in \mathbb{Z}$ ein Tripel (u, v, d) findet mit ua+vb = d = ggt(a, b). Mit den Forderungen $-\frac{|a|}{d} < v \operatorname{sign}(b) \leq 0, 1 \leq u \operatorname{sign}(a) \leq \frac{|b|}{d}$ und $d > 0 \operatorname{sind} u, v, d$ eindeutig festgelegt. Dadurch ist gewährleistet, daß v = 0 gewählt wird im Falle a|b (siehe dazu [Coh], S.68). Jetzt also berechnen wir die Smith-Normalform mit

4.2.2 Algorithmus. (Smith-Normalform nach Hafner, McCurley) Gegeben $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, liefert der Algorithmus die Smith-Normalform von A.

- (i) [initialisiere m_{akt}, n_{akt}] setze $m_{akt} \leftarrow m, n_{akt} \leftarrow n$.
- (ii) [initialisiere j für Zeilenreduktion] setze $j \leftarrow m_{akt}, c \leftarrow 0$.
- (iii) [teste null] falls j = 1, so gehe zu (v), sonst setze $j \leftarrow j-1$. Falls $a_{j,n_{akt}} = 0$, so gehe zu (iii).
- (iv) [euklidischer Schritt] berechne mit dem euklidischen Algorithmus (u, v, d)mit $ua_{m_{akt}, n_{akt}} + va_{j, n_{akt}} = d = ggt(a_{m_{akt}, n_{akt}}, a_{j, n_{akt}})$. Dann setze $B \leftarrow uA_{m_{akt}} + vA_j, A_j \leftarrow \frac{a_{m_{akt}, n_{akt}}}{d}A_j - \frac{a_{m_{akt}, j}}{d}A_{m_{akt}}, A_i \leftarrow B$ und gehe zu (iii).

- (v) [initialisiere j für Spaltenreduktion] setze $j \leftarrow n_{akt}$.
- (vi) [teste null] falls j = 1, so gehe zu (viii), sonst setze $j \leftarrow j 1$. Falls $a_{m_{akt},j} = 0$, so gehe zu (vi).
- (vii) [euklidischer Schritt] berechne mit dem euklidischen Algorithmus (u, v, d)mit $ua_{m_{akt}, n_{akt}} + va_{m_{akt}, j} = d = ggt(a_{m_{akt}, n_{akt}}, a_{m_{akt}, j})$. Dann setze $B \leftarrow uA'_{n_{akt}} + vA'_{j}, A'_{j} \leftarrow \frac{a_{m_{akt}, n_{akt}}}{d}A'_{j} - \frac{a_{j, n_{akt}}}{d}A'_{n_{akt}}, A'_{n_{akt}} \leftarrow B, c \leftarrow c+1$ und gehe zu (vi).
- (viii) [wiederhole?] falls c > 0 gehe zu (ii).
- (ix) [teste Rest der Matrix] setze $b \leftarrow a_{m_{akt},n_{akt}}$. Falls $b \neq 0$, so teste für $1 \leq k < m_{akt}$, $1 \leq l < n_{akt}$, ob $a_{k,l}|b$. Sobald ein Koeffizient $a_{k,l}$ nicht durch b teilbar ist, setze $A'_{m_{akt}} \leftarrow A'_{m_{akt}} + A'_{k}$ und gehe zu (ii).
- (x) [naechster Schritt] Falls $m_{akt} > 1$ und $n_{akt} > 1$ so setze $m_{akt} \leftarrow m_{akt} 1$, $n_{akt} \leftarrow n_{akt} 1$ und gehe zu (ii).
- (xi) [fertig, anpassen] Tausche die Nullzeilen nach unten, Nullspalten nach hinten. Gib A aus.

Der Algorithmus liefert die Smith-Normalform auf einfache Art und Weise. Nach der Erniedrigung von m_{akt} und n_{akt} in Schritt (x) hat die Matrix A folgende Gestalt:

$$A = \begin{array}{ccccccccc} & & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ \end{array} \right)$$

mit $i = m - m_{akt} = n - n_{akt}$ und $d_1 | d_2, \ldots, d_{i-1} | d_i, d_i |$ linke obere Restmatrix.

Die Schritte (iii) - (iv) und (vi) - (vii) sorgen nun dafür, daß der rechte untere Eintrag $a_{m_{akt},n_{akt}}$ der Restmatrix der größte gemeinsame Teiler der unteren Zeile und der rechten Spalte (der Restmatrix) ist. Danach wird im Schritt (ix) getestet, ob $a_{m_{akt},n_{akt}}$ schon alle verbleibenden Matrixeinträge links oberhalb teilt, falls nicht, so wird die betreffende Zeile zur unteren hinzuaddiert und mit den Schritten (iii) -(iv), (vi) - (vii) weitergemacht, sonst ist dieser Iterationschritt fertig und wir können zu $m_{akt} - 1$, $n_{akt} - 1$ übergehen.

Der Algorithmus ist korrekt: Er terminiert, weil bei jedem neuen Eintreten in Schritt (ii) nach Schritt (viii) oder (ix) der Koeffizient $a_{m_{akt},n_{akt}}$ kleiner geworden ist, er aber nicht kleiner als 1 werden kann. Offenbar liefert er auch die gewünschte Smith-Normalform.

Das Hauptproblem von diesem Algorithmus ist, daß die Koeffizienten der Matrix während der Umformungen sehr schnell wachsen, also eine Koeffizientenexplosion eintritt. Das Rechnen mit großen Integer-Zahlen kostet viel Speicherplatz und Rechenzeit und macht schließlich oben aufgeführte Schritte praktisch undurchführbar. Daher benötigen wir einen Algorithmus, der die auftretenden Koeffizienten "reduziert". Dies soll im nächsten Abschnitt erörtert werden.

4.3 LLL-reduzierte Gitter

4.3.1 Definition. Ein *Gitter* L ist ein endlich erzeugter freier \mathbb{Z} -Modul mit einer positiv definiten quadratischen Form auf $L \otimes \mathbb{R}$. Ist ferner f die von q induzierte symmetrische, positiv definite Bilinearform, also $f(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$, b_1, \ldots, b_n eine \mathbb{Z} -Basis von L und $Q = (f(b_i, b_j))_{i,j}$, so ist

$$d(L) = \sqrt{\det(Q)}$$

die *Determinante* des Gitters. Die Gitterdeterminante ist unabhängig von der konkreten Wahl der Gitterbasis.

Im weiteren schreiben wir für die induzierte Form f(x, y) kurz xy. Mit der Gitterdeterminante können wir eine nützliche Proposition formulieren.

4.3.2 Proposition. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\gamma_n > 0$, so daß für jedes Gitter (L,q) der Dimension n gilt: Es gibt ein $x \in L \setminus \{0\}$ mit

$$q(x) \le \gamma_n \det(L)^{\frac{2}{n}}$$

Beweis: [Knu]

4.3.3 Proposition. (Gram-Schmidt-Orthogonalisierung) Sei V ein unitärer \mathbb{R} - Vektorraum mit Basis b_1, \ldots, b_n . Setzt man induktiv

$$b_i^* = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{i,j} b_j^* \quad (1 \le i \le n) \quad mit \quad \mu_{i,j} = \frac{b_i b_j^*}{|b_j^*|^2} \quad (1 \le j < i \le n),$$

dann bilden die b_i^* eine orthogonale Basis von V. Ferner ist b_i^* die Projektion von b_i auf das orthogonale Komplement der b_1, \ldots, b_{i-1} .

Mit diesen Fakten aus der linearen Algebra können wir definieren, was ein LLLreduziertes Gitter ist:

4.3.4 Definition. Sei L ein Gitter mit Basis b_1, \ldots, b_n , und b_1^*, \ldots, b_n^* die mit dem Gram-Schmidt-Verfahren erzeugte orthogonale Basis von $L \otimes \mathbb{R}$, und $\mu_{i,j}$ dazu wie oben definiert. Dann heißt b_1, \ldots, b_n *LLL-reduziert*, falls

(i) $|\mu_{i,j}| \leq \frac{1}{2}$ für $1 \leq j < i \leq n$ (Längenbedingung) und

(ii) $|b_i^* + \mu_{i,i-1}b_{i-1}^*|^2 \ge \frac{3}{4}|b_{i-1}^*|^2$ für $1 < i \le n$ (Lovász-Bedingung)

Die Bezeichnung "LLL" kommt von den Namen der Mathematiker A.K. Lenstra, H.W. Lenstra und L. Lovász.

4.3.5 Bemerkung. Wie man leicht nachrechnet, ist die Lovász-Bedingung aus der Definition äquivalent zu der folgenden Bedingung:

$$|b_i^*|^2 \ge \left(\frac{3}{4} - \mu_{i,i-1}^2\right) |b_{i-1}^*|^2 \text{ für } 1 < i \le n$$

Wir wollen daher unter beiden Formulierungen die Lovász-Bedingung verstehen.

Das folgende Theorem listet Eigenschaften von LLL-reduzierten Gitterbasen auf, die deutlich machen, in welchem Sinne die Basisvektoren eines LLL-reduzierten Gitters kurz sind.

4.3.6 Theorem. Set b_1, \ldots, b_n eine LLL-reduzierte Basis des Gitters L. Dann gilt:

- (i) $d(L) \le \prod_{i=1}^{n} |b_i| \le 2^{\frac{n(n-1)}{4}d(L)}$
- (ii) $|b_j| \le 2^{\frac{i-1}{2}} |b_i^*|$ für $1 \le j \le i \le n$
- (*iii*) $|b_1| \le \frac{2^{n-1}}{4} d(L)^{\frac{1}{n}}$
- (iv) für $x \in L \setminus \{0\}$ gilt $|b_1| \le 2^{\frac{n-1}{2}} |x|$, und allgemeiner gilt für linear unabhängige $x_1, \ldots, x_t \in L$, $da\beta |b_j| \le 2^{\frac{n-1}{2}} max(|x_1|, \ldots, |x_t|), 1 \le j \le t$.

Beweis: [Coh], S.84f

In einem gewissen Sinne ist also eine LLL-reduzierte Gitterbasis b_1, \ldots, b_n eine Orthogonalbasis (wegen der Längenbedingung in der Definition), b_1 ist der kürzeste Vektor, und die weiteren sind der Länge nach aufsteigend sortiert (wegen (iv)). Der große Vorteil dieser Definition von Reduziertheit besteht darin, daß es einen Algorithmus gibt, der eine Gitterbasis in polynomialer Laufzeit LLL-reduzieren kann.

4.3.7 Algorithmus. (Grundform des LLL-Algorithmus)

Sei b_1, \ldots, b_n eine Basis des Gitters (L, q). Dieser Algorithmus transformiert die Vektoren b_i , so daß sie am Ende eine LLL-reduzierte Basis von L bilden.

- (i) [initialisiere] setze $k \leftarrow 2, k_{max} \leftarrow 1, b_1^* \leftarrow b_1, B_1 \leftarrow b_1 b_1$.
- (ii) [Gram-Schmidt-Koeffizienten berechnen] falls $k \leq k_{max}$, so gehe zu (iii). Setze $k_{max} \leftarrow k$, und für $j = 1, \ldots, k-1$ setze $\mu_{k,j} \leftarrow \frac{b_k b_j^*}{B_j}$ und $b_k^* \leftarrow b_k^* - \mu_{k,j} b_j^*$. Dann setze $B_k \leftarrow b_k^* b_k^*$.
- (iii) [reduziere und teste Lovász-Bedingung] für l = k 1, ..., 1 führe RED(k, l) aus. Falls $B_k < (\frac{3}{4} \mu_{k,k-1}^2)B_{k-1}$, so führe SWAP(k) aus, setze $k \leftarrow max(k-1, 2)$ und gehe zu (iii). Anderenfalls setze $k \leftarrow k+1$.

(iv) [fertig?] falls $k \leq n$, gehe zu (ii). Sonst terminiere und gib b_1, \ldots, b_n aus.

Unterroutine RED(k, l).

Falls $|\mu_{k,l}| \leq \frac{1}{2}$, so beende die Routine. Sonst setze $q = [\mu_{k,l} + \frac{1}{2}], b_k \leftarrow b_k - qb_l, \mu_{k,l} \leftarrow \mu_{k,l} - q$ und für $i = 1, \ldots, l-1$ setze $\mu_{k,i} \leftarrow \mu_{k,i} - q\mu_{l,i}$.

Unterroutine SWAP(k).

Tausche b_k mit b_{k-1} für $j = 1, \ldots, k-2$ tausche $\mu_{k,j}$ mit $\mu_{k-1,j}$. Dann setze $\mu \leftarrow \mu_{k,k-1}, B \leftarrow B_k + \mu^2 B_{k-1}, \mu_{k,k-1} \leftarrow \frac{\mu B_{k-1}}{B}, B_k \leftarrow \frac{B_{k-1} B_k}{B}$ und $B_{k-1} \leftarrow B$. Schließlich setze für $i = k + 1, \ldots, k_{max}$ $t \leftarrow \mu_{i,k},$ $\mu_{i,k} \leftarrow \mu_{i,k-1} - \mu t$ und $\mu_{i,k-1} \leftarrow t + \mu_{k,k-1} \mu_{i,k}$.

In dieser Grundform des LLL-Algorithmus wird die Idee des Algorithmus klar: Induktiv seien b_1, \ldots, b_{k-1} LLL-reduziert (das ist zu Anfang für k = 2 der Fall), und wir befinden uns in der Iteration k. Zur Überprüfung der LLL-Bedingungen für b_1, \ldots, b_k müssen wir jetzt die $b_j^*, \mu_{j,i}$ des Gram-Schmidt-Verfahrens bis zum Index kkennen, also für $1 \leq j \leq k, 1 \leq i < j$. Dieser Berechnung dient Schritt (ii). Da schon $b_1^*, \ldots, b_{kmax}^*$ und $\mu_{j,i}, 1 \leq j \leq k_{max}, 1 \leq i < j$ berechnet worden sind, müssen nur noch im Falle $k > k_{max}$ neue Berechnungen angestellt werden. Anschließend reduzieren wir in Schritt (iii) b_k an b_{k-1}, \ldots, b_1 (in dieser Reihenfolge) mit der Unterroutine RED(k,l), so daß $|\mu_{k,l}| \leq \frac{1}{2}$ wird für $l = k-1, \ldots, 1$. Falls jetzt die Lovász-Bedingung nicht erfüllt ist, so vertauschen wir b_k mit b_{k-1} und gehen zur Iteration k-1 über, da wir jetzt nur noch wissen, daß b_1, \ldots, b_{k-2} LLL-reduziert sind. Anderenfalls sind b_1, \ldots, b_k LLL-reduziert, und wir können in Schritt (iv) zur Iteration k+1 übergehen.

Wir wollen die Korrektheit des Algorithmus explizit beweisen, da die im Beweis auftretenden Größen später bei der verbesserten Version des LLL-Algorithmus eine Rolle spielen werden.

Beweis: Um einzusehen, daß der Algorithmus terminiert, ist zu zeigen, daß $SW\!AP(k)$ nur endlich oft durchlaufen wird. Dazu setze $d_i := \det((b_r b_s)_{1 \le r, s \le i})$ für $1 \le i \le n$. Dann ist $d_i = \prod_{j=1}^i B_j$, mit $B_j := |b_j^*|^2$. Wir zeigen jetzt, daß D > const > 0 unabhägig von der Wahl der Gitterbasis b_1, \ldots, b_n ist. Falls das Gitter ganz in \mathbb{Z}^n liegt, ist das klar wegen $d_i \ge 1$ für alle *i*. Im allgemeinen Falle nutzen wir Propositon 4.3.2: Zu dem von b_1, \ldots, b_i erzeugten Gitter L_i gibt es $\gamma_i > 0$, $x_i \in L \setminus \{0\}$ mit $\gamma_i q(x_i) \le \det(L_i)^{\frac{2}{i}}$. Ist ferner $x \in L \setminus \{0\}$ so gewählt, daß $q(x) = min\{q(y)|y \in L \setminus \{0\}\}$, so gilt

$$d_i = \det(L_i)^2 \ge q(x_i)^i \gamma_i^{-i} \ge q(x) \gamma_i^{-i}.$$

Das Produkt der $q(x)\gamma_i^{-i}$ ist dabei die gesuchte Konstante unabhängig von der Wahl der Basis für das Gitter L.

Nachrechnen zeigt jetzt, daß bei jedem Durchlauf von $SW\!AP(k)$ das d_{k-1} , und damit auch das D, um $\frac{3}{4}$ reduziert wird. Da sich während der übrigen Transformationen des Algorithmus das D nicht ändert, kann also $SW\!AP(k)$ nur endlich oft abgearbeitet werden.

Nachrechnen zeigt ferner, daß bei Übergang zu Schritt (iv) in der Iteration k die b_1, \ldots, b_k LLL-reduziert sind, damit sind also b_1, \ldots, b_n am Ende des Algorithmus LLL-reduziert.

Laufzeit des Algorithmus: Ist $B \in \mathbb{R}$ mit $|b_i|^2 \leq B$ für alle *i*, so beträgt die Laufzeit des angegebenen Algorithmus

$$O(n^6 log^3 B).$$

Dazu sei auf [Coh] und [LLL] verwiesen.

Diese Version des LLL-Algorithmus muß einerseits für beliebige Erzeugendensysteme des Gitters erweitert werden, andererseits sind folgende Effizienzverbesserungen möglich:

- Zur Überprüfung der Lovász-Bedingung $B_k \ge (\frac{3}{4} \mu_{k,k-1}^2)B_{k-1}$ ist nur die Kenntnis von $\mu_{k,k-1}$ notwendig, nicht die von $\mu_{k,1}, \ldots, \mu_{k,k-2}$. Daher kann erst die Lovász-Bedingung getestet werden, und falls sie erfüllt ist, anschließend die weiteren Reduzierungen vorgenommen werden.
- Der Algorithmus soll auf ganzzahlige Gitter angewendet werden, daher sind alle auftretenden Größen rational. Rationalzahlarithmetik ist jedoch wegen wiederholter Anwendung des Euklidischen Algorithmus sehr zeitintensiv. (siehe [Coh], S.91). Daher wäre es schön, ausschließlich ganzzahlig zu rechnen.

4.4 Der ganzzahlige LLL-Algorithmus für beliebige Erzeugendensysteme

Wir stellen die folgenden Überlegungen an, um einen LLL-Algorithmus für Gitter $L \subseteq \mathbb{Z}^m$ und beliebige Erzeugendensysteme b_1, \ldots, b_n anzugeben. Das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren läßt sich wie folgt auch auf nicht notwendig linear unabhängige Vektoren b_1, \ldots, b_n anwenden:

Setze induktiv

$$b_i^* = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{i,j} b_j^* \quad (1 \le i \le n) \quad \text{mit} \quad \mu_{i,j} = \begin{cases} \frac{b_i b_j^*}{|b_j^*|^2} & \text{falls } b_j^* \ne 0\\ 0 & \text{falls } b_j^* = 0 \end{cases} \quad (1 \le j < i \le n)$$

Dann bildet die Menge $\{b_1^*, \ldots, b_i^*\}\setminus\{0\}$ eine orthogonale Basis von \mathbb{R} -span (b_1, \ldots, b_i) , dem von b_1, \ldots, b_i erzeugten Unterraum von $L \otimes \mathbb{R}$.

Erzeugte Nullvektoren werden also einfach aussortiert.

Wir definieren damit analog zum linear unabhängigen Fall, was ein LLL-reduziertes Erzeugendensystem b_1, \ldots, b_n eines Gitters (L, q) erfüllen soll:

- (i) $|\mu_{i,j}| \leq \frac{1}{2}$ für $1 \leq j < i \leq n$ (Längenbedingung) und
- (ii) $|b_i^* + \mu_{i,i-1}b_{i-1}^*|^2 \geq \frac{3}{4}|b_{i-1}^*|^2$ für $1 < i \leq n$ (Lovász-Bedingung)

Wieder können wir für die Lovász-Bedingung äquivalent fordern, daß

 $|b_i^*|^2 \ge \left(\frac{3}{4} - \mu_{i,i-1}^2\right) |b_{i-1}^*|^2$ für $1 < i \le n$ erfüllt ist.

Ist jetzt b_1, \ldots, b_n LLL-reduziert, und $b_i^* = 0$ für ein i, so folgt aus der Lovász-Bedingung, daß b_1^*, \ldots, b_{i-1}^* ebenfalls Nullvektoren sein müssen. Aus der Eigenschaft des Gram-Schmidt-Verfahrens, daß \mathbb{R} – span $(b_1, \ldots, b_i) = \mathbb{R}$ – span (b_1^*, \ldots, b_i^*) ist, folgt $b_1 = \ldots = b_i = 0$.

Wir erkennen also, daß ein LLL-reduziertes Erzeugendensystem b_1, \ldots, b_n aus Nullvektoren b_1, \ldots, b_k und einer im alten Sinne LLL-reduzierten Basis b_{k+1}, \ldots, b_n des Gitters L besteht.

Obige Überlegungen legen nahe, wie eine Erweiterung der Grundform des LLL-Algorithmus auszusehen hat:

Im Schritt (ii), der Neuberechnung der Gram-Schmidt-Koeffizienten, hat man $\mu_{k,j} = 0$ zu setzen, falls $b_j^* = 0$ ist, und in der Unterroutine SWAP(k) sind die Formeln zur Anpassung der Gram-Schmidt-Koeffizienten um den Fall $b_k^* = 0$ zu erweitern. Das Ergebnis ist dann ein LLL-reduziertes Erzeugendensystem, wie oben beschrieben.

Als nächstes wollen wir dafür sorgen, daß alle Berechnungen ganzzahlig durchgeführt werden können. Dazu

4.4.1 Proposition. Set $b_1, \ldots, b_n \in L$ ganzzahlig. Setze

$$I(i) = \{k \in \{1, \dots, n\} | b_k^* \neq 0\},\$$

 $und \ B_i = |b_i^*|^2.$ $Dann \ ist \ mit \ d_i = det((b_r b_s)_{r,s \in I(i)}) = \prod_{j \in I(i)} B_j$ $(i) \ d_{i-1}B_i \in \mathbb{Z} \ (1 \le i \le n) \ und \ d_j\mu_{i,j} \in \mathbb{Z} \ (1 \le j < i \le n)$ $(ii) \ f\ddot{u}r \ alle \ 1 \le j < m \le i \le n \ gilt \ d_j \sum_{k=1}^j \mu_{i,k}\mu_{m,k}B_k.$ Beweis: (i). $d_{i-1}B_i = \begin{cases} d_i \ falls \ B_i \ne 0 \\ 0 \ falls \ B_i = 0 \end{cases} \ und \ d_i \in \mathbb{Z}.$

Für die zweite Aussage fixiere i, j und betrachte den Vektor

$$v = b_i - \sum_{k=1}^{j} \mu_{i,k} b_k^* = b_i^* + \sum_{k=j+1}^{i-1} \mu_{i,k} b_k^*$$

Wegen des Ausdrucks rechts ist $b_k^* v = 0$ für alle $1 \le k \le j$, und da \mathbb{R} -span $(b_1^*, \ldots, b_j^*) = \mathbb{R}$ -span (b_1, \ldots, b_j) , folgt $b_k v = 0$ für alle $1 \le k \le j$. Ferner gibt es eine Darstellung $v = b_i - \sum_{k=1}^j x_k b_k$ mit gewissen $x_k \in \mathbb{R}$. Dabei kann man die x_k so wählen, daß $x_k = 0$ falls $k \notin I(i)$. Diese Gleichungen schreiben sich in Matrixform als

$$\left(\begin{array}{ccc} b_1b_1 & \dots & b_1b_j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_jb_1 & \dots & b_jb_j \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_j \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} b_ib_1 \\ \vdots \\ b_ib_j \end{array}\right)$$

Beachten wir, daß $x_k = 0$, falls $k \notin I(i)$, und durch Weglassen der Gleichungen in den Zeilen k mit $k \notin I(i)$, erhält man

$$\underbrace{((b_r b_s)_{r,s \in I(j)})}_{=M} (x_r)_{r \in I(j)}^T = (b_i b_r)_{r \in I(j)}.$$

Da det $(M) = d_j$, sieht man nach Invertieren der Matrix, daß die x_k von der Form $\frac{m_k}{d_j}$ mit gewissen $m_k \in \mathbb{Z}$ $(1 \le k \le j)$. Im Falle $j \in I(i)$ ergibt sich daher aus der Gleichung $\sum_{k \in I(j)} x_k b_k = \sum_{k \in I(j)} \mu_{i,k} b_k^*$ durch Projektion auf b_j^* , daß $x_j = \mu_{i,j}$, falls $b_j^* = 0$, so ist $x_j = 0 = \mu_{i,j}$ nach Wahl von x_j . Damit ist also $d_j \mu_{i,j} = d_j x_j = m_j \in \mathbb{Z}$.

(ii). In (i). haben wir insbesondere gezeigt, daß

$$d_j v = d_j (b_i - \sum_{k=1}^j x_k b_k) \in L.$$

Daraus folgt $d_j(vb_m) \in \mathbb{Z}$ für alle $1 \le m \le n$. Also folgt $d_j((b_i - \sum_{k=1}^j \mu_{i,k}b_k^*)b_m) \in \mathbb{Z}$,

und daher $d_j \sum_{k=1}^{j} \mu_{i,k} \underbrace{b_k^* b_m}_{=\mu_{m,k}B_k} \in \mathbb{Z}.$

4.4.2 Korollar. Mit den Bezeichnungen wie in der vorigen Proposition, setze $\lambda_{i,j} = d_j \mu_{i,j}$ für j < i, dann ist $\lambda_{i,j} \in \mathbb{Z}$ und $\lambda_{i,i} = d_i$. Wenn wir für $j \leq i$ fest rekursiv definieren

$$u_0 = b_i b_j$$

und

$$u_k = \frac{d_k u_{k-1} - \lambda_{i,k} \lambda_{j,k}}{d_{k-1}},$$

so ist $u_k \in \mathbb{Z}$ und $u_{j-1} = \lambda_{i,j}$.

Beweis: Per Induktion über k zeigt man, daß

$$u_{k} = d_{k} - \left(b_{i}b_{j} - \sum_{l=1}^{k} \frac{\lambda_{i,l}\lambda_{j,l}}{d_{l}d_{l-1}}\right) = d_{k}\left(b_{i}b_{j} - \sum_{l=1}^{k} \mu_{i,l}\mu_{j,l}B_{l}\right),$$

und der rechte Term ist ganzzahlig.

Ferner gilt im Falle
$$b_j^* \neq 0$$
:
 $u_{j-1} = B_j d_{j-1} \mu_{i,j} = d_j \mu_{i,j} = \lambda_{i,j}$, und falls $b_j^* = 0$, so ist $u_{j-1} = 0 = \lambda_{i,j}$.

Damit läßt sich der gewünschte Algorithmus niederschreiben. Man beachte, daß jetzt $\lambda_{i,j}$ die Rolle von $\mu_{i,j}$ und d_k die Rolle von B_k übernimmt. Die LLL-Bedingungen schreiben sich in diesen Termini mit $\lambda_{i,j} = d_j \mu_{i,j}$ und $d_j = \prod_{i \in I(j)} B_i$ in der Form

(i) $|2\lambda_{i,j}| \leq d_j$ für alle $1 \leq j < i \leq n$

(ii) $4d_k d_{k-2} \ge 3d_{k-1}^2 - 4\lambda_{k,k-1}^2$ für alle $2 \le k \le n$.

Ferner wird die Variable *zeroes* benutzt, um zu notieren, wieviele lineare Abhängigkeiten bereits festgestellt wurden. Die Variable $norm_k \in \{0, 1\}$ merkt sich, ob $b_k^* = 0$ oder $b_k^* \neq 0$.

4.4.3 Algorithmus. (ganzzahliger LLL-Algorithmus für nicht notwendig linear unabhängige Vektoren) Sei b_1, \ldots, b_n ein Erzeugendensystem des ganzzahligen Gitters (L,q), also $L \subseteq \mathbb{Z}^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Dieser Algorithmus transformiert die Vektoren b_i und liefert ein $k \in \mathbb{N}$, so daß am Ende $b_1 = \ldots = b_k = 0$ und b_{k+1}, \ldots, b_n eine LLL-reduzierte Basis von L bilden.

- (i) [initialisiere] setze $k \leftarrow 2$, $k_{max} \leftarrow 1$, $d_0 \leftarrow 1$, $norm_0 \leftarrow 0$, $zeroes \leftarrow 0$, $d_1 \leftarrow b_1b_1$. Falls $d_1 = 0$, so setze $d_1 \leftarrow 1$, $norm_1 \leftarrow 0$ und $zeroes \leftarrow 1$, and renfalls setze $n_1 \leftarrow 1$.
- (ii) [Gram-Schmidt-Koeffizienten berechnen] falls $k \leq k_{max}$, so gehe zu 3. Setze $k_{max} \leftarrow k$. Für $j = zeroes + 1, \dots, k$ setze $u \leftarrow b_k b_j$ und darin für $i = zeroes + 1, \dots, j - 1$ setze

$$u \leftarrow \frac{d_i u - \lambda_{k,i} \lambda_{j,i}}{d_{i-1}}$$

 $\begin{array}{l} \text{Falls } j < k \text{, so setze } \lambda_{k,j} \leftarrow u \text{, und im Falle } j = k \text{ setze} \\ \left\{ \begin{array}{c} d_k \leftarrow u, \ norm_k \leftarrow 1 & \text{falls } u \neq 0 \\ d_k \leftarrow d_{k-1}, \ norm_k = 0, \ zeroes \leftarrow zeroes + 1 & \text{falls } u = 0 \end{array} \right\}. \end{array}$

- (iii) [reduziere und teste Lovász-Bedingung] führe REDI(k, k-1) aus. Falls $norm_{k-1} \neq 0$ und $(4d_{k-2}d_k < 3d_{k-1}^2 - 4\lambda_{k,k-1}^2$ oder $norm_k = 0)$, so führe SWAPI(k) aus, setze $k \leftarrow max(2, k-1)$ und gehe zu (iii). Anderenfalls setze $k \leftarrow k+1$.
- (iv) [fertig?] falls $k \leq n$, gehe zu (ii). Sonst terminiere und gib b_1, \ldots, b_n aus.

Unterroutine REDI(k, l).

Falls $|2\lambda_{k,l}| \leq d_l$, so beende die Routine. Sonst setze $q = \left[\frac{\lambda_{k,l}}{d_l} + \frac{1}{2}\right], b_k \leftarrow b_k - qb_l, \lambda_{k,l} \leftarrow \lambda_{k,l} - qd_l$ und für $i = 1, \ldots, l-1$ setze $\lambda_{k,i} \leftarrow \lambda_{k,i} - q\lambda_{l,i}$.

Unterroutine SWAPI(k).

Tausche b_k mit b_{k-1} für j = 1, ..., k-2 tausche $\lambda_{k,j}$ mit $\lambda_{k-1,j}$. Setze für $i = k + 1, ..., k_{max}$ in dieser Reihenfolge $t \leftarrow \lambda_{i,k-1}d_k - \lambda_{i,k}\lambda_{k,k-1}, \lambda_{i,k-1} \leftarrow \frac{\lambda_{i,k-1}\lambda_{k,k-1}+\lambda_{i,k}d_{k-2}}{d_{k-1}}, \lambda_{i,k} \leftarrow \frac{t}{d_{k-1}}.$

Unterscheide jetzt 3 Fälle: $\underline{norm_k = 0 \ und \ \lambda_{k,k-1} \neq 0}$. Dann setze $d_{k,alt} \leftarrow d_k, d_{k-1} \leftarrow \frac{\lambda_{k,k-1}^2}{d_{k-1}}, d_k \leftarrow 0$ $\begin{aligned} &d_{k-1}. \text{ Danach für } i = k+1, \dots, k_{max} \ d_i \leftarrow d_i \frac{d_k}{d_{k,alt}}, \ \lambda_{i,k} = 0 \text{ und darin} \\ &\text{für } j = i+1, \dots, k_{max} \ \lambda_{j,i} \leftarrow \lambda_{j,i} \frac{d_k}{d_{k,alt}}. \\ &\underbrace{norm_k = 0 \ und \ \lambda_{k,k-1} = 0}_{norm_k \leftarrow 1.} \text{ Dann setze } d_{k-1} \leftarrow d_{k-2}, \ norm_{k-1} \leftarrow 0, \\ &\underbrace{norm_k = 1}_{k-1}. \text{ Setze } d_{k-1} \leftarrow \frac{\lambda_{k,k-1}^2 + d_{k-2}d_k}{d_{k-1}}. \end{aligned}$

Beweis: Die im Schritt (ii) auftretenden Größen sind nach dem Korollar ganzzahlig, ebenso die Werte in der Unterroutine $SW\!API(k)$. Die Anpassungen der Gram-Schmidt-Koeffizienten entsprechen denen des Grundalgorithmus nach den Ersetzungen $d_i = \prod_{k \in I(i)} B_k$, $\lambda_{i,j} = d_j \mu_{i,j}$ und unter gesonderter Betrachtung des Falles $b_k^* = 0$.

Zum Beweis, daß der Algorithmus terminiert, setze

$$D = \prod_{k \in I(n)} d_k \prod_{k \notin I(n)} 2^k$$

D wird nur in SWAPI(k) innerhalb der Unterscheidung der 3 Fälle verändert. Falls $norm_k = 0$ und $\lambda_{k,k-1} \neq 0$, oder wenn $norm_k = 1$, so erniedrigt sich d_{k-1} um $\frac{3}{4}$ wegen der Lovász-Bedingung, und die anderen d_i werden nicht erhöht.

Im Falle $norm_k = 0$ und $\lambda_{k,k-1} = 0$ verändert sich wie folgt die Menge I(n):

$$I(n) \leftarrow I(n) \cup \{k-1\} \setminus k$$

und die Vereinigung ist disjunkt. Durch diesen Tausch wird $\prod_{k \notin I(n)} 2^k$ halbiert, und $\prod_{k \in I(n)} d_k$ wird nicht erhöht.

In allen drei Fällen also reduziert sich D um $\frac{3}{4}$, da D nur ganzzahlig und positiv sein kann, wird also $SW\!AP(k)$ nur endlich oft durchlaufen und der Algorithmus terminiert.

Ferner ist klar, daß die b_i am Ende ein LLL-reduziertes Erzeugendensystem von (L, q) bilden.

4.5 Einsatz von LLL

Trotz der in Anbetracht der Aufgabenstellung relativ günstigen polynomialen Laufzeit, sollte man den Algorithmus in der Praxis bei großen Matrizen nur auf Teile anwenden. LLL ist in dem beigefügten Computerprogramm so implementiert, daß es auf die Zeilen oder Spalten einer Matrix $M \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ anwendbar ist, zusätzlich ist die Eingabe einer injektiven Abbildung $\pi : \{1, \ldots, k\} \longrightarrow \{1, \ldots, m\}$ im Zeilenreduktionsfall, bzw. $\pi : \{1, \ldots, k\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$ im Spaltenreduktionsfall, erforderlich. Dann werden die k Zeilen (bzw. Spalten) $M'_{\pi(1)}, \ldots, M'_{\pi(k)}$ (bzw. $M_{\pi(1)}, \ldots, M_{\pi(k)}$) LLL-reduziert.

Kapitel 5

Resultate

Dieses Kapitel listet die Resultate der vorliegenden Arbeit auf, wie sie mit dem Computerprogramm berechnet worden sind. Zunächst werden Berechnungen für die Spektralsequenzen zu $\overline{Sym}_{*,*,h,c}$ und $\overline{Sym}_{*,*,h,c}^{\mathcal{O}}$ für h = 2, 3, 4, 5 und c von gleicher Parität wie h angegeben, wobei \mathcal{O} das in Kapitel 3 eingeführte Orientierungssystem ist. Die jeweils erste Tabelle gibt dabei unter "Zellenanzahlen" die Anzahl der freien Erzeuger des E^0 -Terms der Spektralsequenz zu den Parametern h und c an. Mit \mathbb{Z} -Koeffizienten gerechnet wissen wir, daß der E^1 -Term dann ein Kettenkomplex in Dimension q = h ist, es kann also noch keine Torsion auftreten. Dies ist natürlich dann auch modulo zwei richtig. Die Rechnungen ergeben, daß der E^1 -Term zu $\overline{Sym}^{\mathcal{O}}_{*,*,h,c}$ auch ein Kettenkomplex in Dimension q = h ist. Diese Anzahl freier Erzeuger des E^1 -Terms wird also dann als nächstes aufgeführt. Danach wird in der obersten Dimension Homologie gebildet, und die Resultate mit konstantem Koeffizientensystem Z unter "unorientiert", mit dem Orientierungssystem unter "orientiert", und schließlich modulo zwei aufgelistet. Da für c = 0, 1 die $\mathbb{B}_{*,*,h,c}$ orientierbar sind, fallen "nichtorientiert" und "orientiert" zusammen, und es findet dort keine gesonderte Auflistung statt.

Die dann folgende Tabelle zu denselben Werten von h und c untersucht den E^0 -Term der Spektralsequenz nach den Ergebnissen von Kapitel 2, Abschnitt 4 genauer. Wir betrachten die Vertikalen des E^0 -Terms ohne Orientierungssystem, sei dazu neben hund c auch p fix. Diese Kettenkomplexe $\overline{Sym}_{p,*,h,c}$ zerfallen in direkte Summanden $\overline{Sym}_{p,*,h,c}(\alpha)$ mit $\alpha \in \mathfrak{S}_p$, und zwei solche Kettenkomplexe sind für zueinander konjugierte $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{S}_p$ isomorph. Die Tabelle enthält dazu nun drei Daten: In eckigen Klammern ist die Konjugationsklasse der Zellen, die in dieser Spalte vorkommen, angegeben.

Zur allgemeinen Notation von Konjugationsklassen ist dabei folgendes zu sagen: Ist $C \subset \mathfrak{S}_n$ eine Konjugationsklasse, so schreiben wir $C = [\mu_1, \ldots, \mu_r]$, falls C aus Permutationen besteht, die in r disjunkte Zykel zerfallen und die auftretenden Zykellängen dabei μ_1, \ldots, μ_r sind. Insbesondere ist also dann $n = \mu_1 + \ldots + \mu_r$.

Die Zahl vor der Konjugationsklasse gibt an, wieviele Komplexe $\overline{Sym}_{p,*,h,c}(\alpha)$ zu

dieser Konjugationsklasse existieren. Für die möglichen Dimensionen von q findet sich darunter dann eine Auflistung, wieviele Erzeugerzellen die Kettengruppe des Komplexes $\overline{Sym}_{p,*,h,c}(\alpha)$ in Dimension q hat.

Zellenanzahlen:									
q = 2	0) 1 3		2					
q = 1	0	0	1	1					
Anzahl	Anzahl freier Erzeuger des E^1 -Terms:								
q = 2	= 2 0 1 2 1								
	I	E^2 -Term	:						
q = 2	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}					
	E^2 -Te	rm, mod	lulo 2:						
q = 2	$= 2 0 0 \mathbb{Z}_2 \mathbb{Z}_2$								
	$\begin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $								

Fall h = 2, c = 0: (für $\mathfrak{M}_{1,1}^0$)

 E^0 -Term im Detail:

	1 [11]	1 [3]	1 [22]
	$q=2:\ 1$	q = 2: 3	q = 2: 2
0	q = 1: 0	q = 1: 1	q = 2: 1
p = 1	p = 2	p = 3	p = 4

Fall h = 2, c = 2: (für $\mathfrak{M}^2_{0,1}$)

Zellenanzahlen:										
q = 2	0 0 3 4									
q = 1	0	0	1	2						
Anzahl	l freier E	rzeuger	des E^1 -	Terms:						
q = 2	0	0	2	2						
	E^2 -Teri	n, unori	entiert:							
q = 2	0	0	\mathbb{Z}_2	0						
	E^2 -Te	rm, orie:	ntiert:							
q = 2	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}						
	E^2 -Term, modulo 2:									
q = 2	$0 0 \mathbb{Z}_2 \mathbb{Z}_2$									
	p = 1	p = 2	p = 3	p = 4						

 E^0 -Term im Detail:

	1 [3]	2 [22]
	q = 2: 3	q = 2: 2
0	q = 1: 1	q = 1: 1
p = 1, 2	p = 3	p = 4

Fall h=3,c=1: (für $\mathfrak{M}^1_{1,1})$

Zellenanzahlen:										
q = 3	0	1	24	98	135	60				
q = 2	0	0	12	72	120	60				
q = 1	0	0	0	5	15	10				
	Anzahl freier Erzeuger des E^1 -Terms:									
q = 3	0	1	12	31	30	10				
		I	E^2 -Term	:						
q = 3	0	0	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}				
	E^2 -Term, modulo 2:									
q = 3	0	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2				
	p = 1	p = 2	p = 3	p = 4	p = 5	p = 6				

 E^0 -Term im Detail:

0	$ \begin{array}{c} 1 [2] \\ q = 3: 1 \\ q = 2: 0 \end{array} $	$ \begin{array}{c} 3 [12] \\ q = 3: 8 \\ q = 2: 4 \end{array} $	$ \begin{bmatrix} 5 & [4] \\ q = 3 : 16 \\ q = 2 : 12 \\ q = 1 : 1 $	$ \begin{array}{c} 15 [23] \\ q = 3: 9 \\ q = 2: 8 \end{array} $	$ \begin{array}{c} 10 [222] \\ q = 3: 6 \\ q = 2: 6 \end{array} $
U	q = 2 : 0 $q = 1 : 0$	q = 2 : 4 $q = 1 : 0$	$ \begin{array}{c} 6 & [112] \\ q = 3: 3 \\ q = 2: 2 \\ q = 1: 0 \end{array} $	q = 2: 8 $q = 1: 1$	q = 2: 0 $q = 1: 1$
p = 1	p = 2	p = 3	p = 4	p = 5	p = 6

Fall h = 3, c = 3: (für $\mathfrak{M}^3_{0,1}$)

Zellenanzahlen:										
q = 3	0	0 0 0 16 45 30								
q = 2	0	0	0	12	40	30				
q = 1	0	0	0	1	5	5				
	Anzahl	freier E	rzeuger	des E^1 -	Terms:					
q = 3	0	0	0	5	10	5				
		E^2 -Terr	n, unori	entiert:						
q = 3	0	0	0	\mathbb{Z}_3	\mathbb{Z}_2	0				
		E^2 -Te	rm, orie	ntiert:						
q = 3	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}				
	E^2 -Term, modulo 2:									
q = 3	0	0	0	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2				
	p = 1	p = 2	p = 3	p = 4	p = 5	p = 6				

 E^0 -Term im Detail:

	1 [4]	5 [23]	5 [222]
	q = 3:16	q = 3:9	q = 3: 6
0	q = 2:12	q = 2:8	q = 2:6
	q = 1: 1	q = 1: 1	q = 1: 1
p = 1, 2, 3	p = 4	p = 5	p = 6

Fall h = 4, c = 0: (für $\mathfrak{M}^0_{2,1}$)

	Zellenanzahlen:										
q = 4	0	1	51	446	1500	2364	1764	504			
q = 3	0	0	36	444	1770	3105	2499	756			
q = 2	0	0	3	81	450	960	882	294			
q = 1	0	0	0	0	8	36	49	21			
		Anzał	l freier l	Erzeuger	des E^1 -T	erms:					
q = 4	0	1	18	83	172	183	98	21			
				E^2 -Term	1:						
q = 4	0	0	\mathbb{Z}_6	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$	\mathbb{Z}_{10}	0	Z			
	p = 1	p = 2	p = 3	p = 4	p = 5	p = 6	p = 7	p = 8			
	E^2 -Term, modulo 2:										
q = 4	0	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2^2	\mathbb{Z}_2^3	\mathbb{Z}_2^2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2			
	p = 1	p = 2	p = 3	p = 4	p = 5	p = 6	p = 7	p = 8			

 E^0 -Term im Detail:

			4 [13]	8 [5]	24 [24]		
			q = 4:81	q = 4:125	q = 4:64		
			q = 3:81	q = 3:150	q = 3:84		
		1 [3]	q = 2:15	q = 2: 40	q = 2:26		
		q = 4:27	q = 1: 0	q = 1: 1	q = 1: 1		
		q = 3:18					
	1 [11]	q = 2: 1	1 [22]	10 [113]	12 [33]	49 [223]	21 [2222]
	q = 4: 1	q = 1: 0	q = 4:104	q = 4:18	q = 4:54	q = 4:36	q = 4:24
	q = 3: 0		q = 3:102	q = 3:21	q = 3:72	q = 3:51	q = 3:36
0	q = 2: 0	1 [111]	q = 2: 18	q = 2:5	q = 2:23	q = 2:18	q = 2:14
	q = 1: 0	q = 4:24	q = 1: 0	q = 1: 0	q = 1: 1	q = 1: 1	q = 1: 1
		q = 3:18					
		q = 2: 2	1 [111]	5 [122]	15 [1122]		
		q = 1: 0	q = 4:18	q = 4:64	q = 4:12		
			q = 3:18	q = 3:72	q = 3:15		
			q = 2: 3	q = 2:16	q = 2: 4		
			q = 1: 0	q = 1: 0	q = 1: 0		
p = 1	p = 2	p = 3	p = 4	p = 5	p = 6	p = 7	p = 8

Fall h = 4, c = 2: (für $\mathfrak{M}^2_{1,1}$)

Zellenanzahlen:										
q = 4	0	0	27	532	2695	5550	5040	1680		
q = 3	0	0	18	528	3180	7290	7140	2520		
q = 2	0	0	1	96	810	2255	2520	980		
q = 1	0	0	0	0	15	85	140	70		
	Anzahl freier Erzeuger des E^1 -Terms:									
q = 4	0	0	10	100	310	430	280	70		
			E^2 -Ter	rm, unor	ientiert:					
q = 4	0	0	0	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2^2$	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	0		
			E^2 -T	erm, orie	entiert:					
q = 4	0	0	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2^2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}		
	E^2 -Term, modulo 2:									
q = 4	0	0	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2^3	\mathbb{Z}_2^3	\mathbb{Z}_2^2	\mathbb{Z}_2		
	p = 1	p=2	p = 3	p=4	p = 5	p = 6	p = 7	p = 8		

 E^0 -Term im Detail:

			15 [5]	60 [24]		
			q = 4:125	q = 4:64		
			q = 3:150	q = 3:84		
		4 [13]	q = 2:40	q = 2:26		
		q = 4:81	q = 1: 1	q = 1: 1		
		q = 3:81				
	1 [3]	q = 2:15	10 [113]	25 [33]	140 [223]	70 [2222]
	q = 4:27	q = 1: 0	q = 4:18	q = 4:54	q = 4:36	q = 4:24
	q = 3:18		q = 3:21	q = 3:72	q = 3:51	q = 3:36
0	q = 2: 1	2 [22]	q = 2:5	q = 2:23	q = 2:18	q = 2:14
	q = 1: 0	q = 4:104	q = 1: 0	q = 1: 1	q = 1: 1	q = 1: 1
		q = 3:102				
		q = 2:18	10 [122]	30 [1122]		
		$q=1:\ 0$	q = 4:64	q = 4:12		
			q = 3:72	q = 3:15		
			q = 2:16	q = 2: 4		
			q = 1: 0	q = 1: 0		
p = 1, 2	p = 3	p = 4	p = 5	p = 6	p = 7	p = 8

Fall h = 4, c = 4: (für $\mathfrak{M}_{0,1}^4$)

Zellenanzahlen:										
q = 4	0	0	0	0	125	546	756	336		
q = 3	0	0	0	0	150	720	1071	504		
q = 2	0	0	0	0	40	225	378	196		
q = 1	0	0	0	0	1	9	21	14		
Anzahl freier Erzeuger des E^1 -Terms:										
q = 4	0	0	0	0	14	42	42	14		
E^2 -Term, unorientiert:										
q = 4	0	0	0	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_3	\mathbb{Z}_2	0		
			E^2 -Te	rm, orie	ntiert:					
q = 4	0	0	0	0	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}		
E^2 -Term, modulo 2:										
q = 4	0	0	0	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2		
	p = 1	p=2	p = 3	p = 4	p = 5	p = 6	p = 7	p = 8		

 E^0 -Term im Detail:

		6 [24]		
		q = 4:64		
		q = 3:84		
	1 [5]	q = 2:26	21 [223]	14 [2222]
	q = 4:125	q = 1: 1	q = 4:36	q = 4:24
	q = 3:150		q = 3:51	q = 3:36
0	q = 2: 40	3 [33]	q = 2:18	q = 2:14
	q = 1: 1	q = 4:54	q = 1: 1	q = 1: 1
		q = 3:72		
		q = 2:23		
		q = 1: 1		
$p=1,\ldots,4$	p = 5	p = 6	p = 7	p = 8

Fall h=5, c=1: (für $\mathfrak{M}^1_{2,1})$

Zellenanzahlen:										
q = 5	0	1	240	6170	51115	195264	394240	435680	249480	57960
q = 4	0	0	216	7840	76140	320880	694148	808192	482328	115920
q = 3	0	0	36	2442	30555	149760	359499	452340	286902	72450
q = 2	0	0	0	122	2670	17640	51478	74564	52668	14490
q = 1	0	0	0	0	0	84	595	1414	1386	483
Anzahl freier Erzeuger des E^1 -Terms:										
q = 5	0	1	60	650	2860	6588	8708	6678	2772	483
					E^2 -Te	erm:				
q = 5	0	0	0	Z	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_6^2$	\mathbb{Z}_2^2	$\mathbb{Z}^2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{10}$	0	Z
E^2 -Term, modulo 2:										
q = 5	0	0	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2^3	\mathbb{Z}_2^4	\mathbb{Z}_2^5	\mathbb{Z}_2^3	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2
	p = 1	p=2	p = 3	p = 4	p = 5	p = 6	p = 7	p = 8	p = 9	p = 10

Fall h = 5, c = 3: (für $\mathfrak{M}^3_{1,1}$)

Zellenanzahlen:										
q = 5	0	0	0	640	12425	74610	202825	278600	189000	50400
q = 4	0	0	0	800	18500	122700	357280	516880	365400	100800
q = 3	0	0	0	240	7425	57375	185220	289380	217350	63000
q = 2	0	0	0	10	650	6800	26600	47740	39900	12600
q = 1	0	0	0	0	0	35	315	910	1050	420
Anzahl freier Erzeuger des E^1 -Terms:										
q = 5	0	0	0	70	700	2520	4480	4270	2100	420
E^2 -Term, unorientiert:										
q = 5	$= 5 0 0 0 0 \mathbb{Z}_2 \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^2 \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6 \mathbb{Z}_6 \mathbb{Z}_2$							0		
					E^2 -Term	n, orientier	t:			
q = 5	0	0	0	0	Z	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2^2$	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}	Z
E^2 -Term, modulo 2:										
q = 5	0	0	0	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2^4	\mathbb{Z}_2^5	\mathbb{Z}_2^3	\mathbb{Z}_2^2	\mathbb{Z}_2
	p=1	p=2	p = 3	p = 4	p = 5	p = 6	p = 7	p = 8	p = 9	p = 10

Fall h = 5, c = 5: (für $\mathfrak{M}_{0,1}^5$)

Zellenanzahlen:											
q = 5	0	0	0	0	0	1296	7735	16520	15120	5040	
q = 4	0	0	0	0	0	2160	13692	30688	29232	10080	
q = 3	0	0	0	0	0	1035	7161	17220	17388	6300	
q = 2	0	0	0	0	0	130	1050	2856	3192	1260	
q = 1	0	0	0	0	0	1	14	56	84	42	
Anzahl freier Erzeuger des E^1 -Terms:											
q = 5	0	0	0	0	0	42	168	252	168	42	
	E^2 -Term, unorientiert:										
q = 5	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}_5	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}_2	0	
				E^2 -T	erm, ori	entiert:					
q = 5	0	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}_2	0	Z	Z	
	E^2 -Term, modulo 2:										
q = 5	0	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	
	p=1	p=2	p = 3	p=4	p = 5	p = 6	p = 7	p = 8	p = 9	p = 10	

Wir wenden Poincaré-Dualität, wie in Kapitel 3, Abschnitt 1 beschrieben, an und erhalten die Kohomologie der Modulräume. Mit Hilfe des universellen Koeffiziententheorems für Kohomologie bekommen wir schließlich die folgenden Homologiegruppen:

$$H_n\left(\mathfrak{M}_{0,1}^2;\mathbb{Z}\right) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, 1\\ 0 & n \ge 2 \end{cases}$$
$$H_n\left(\mathfrak{M}_{0,1}^3;\mathbb{Z}\right) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, 1\\ 0 & n \ge 2 \end{cases}$$
$$H_n\left(\mathfrak{M}_{0,1}^4;\mathbb{Z}\right) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, 1\\ \mathbb{Z}_2 & n = 2\\ 0 & n \ge 3 \end{cases}$$
$$H_n\left(\mathfrak{M}_{0,1}^5;\mathbb{Z}\right) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, 1\\ \mathbb{Z}_2 & n = 2\\ 0 & n \ge 3 \end{cases}$$
$$\begin{split} H_n\left(\mathfrak{M}_{1,1}^{0};\mathbb{Z}\right) &= \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & n=0,1\\ 0 & n \geq 2 \end{array} \right. \\ H_n\left(\mathfrak{M}_{1,1}^{1};\mathbb{Z}\right) &= \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & n=0,1\\ \mathbb{Z}_2 & n=2\\ 0 & n \geq 3 \end{array} \right. \\ H_n\left(\mathfrak{M}_{1,1}^{2};\mathbb{Z}\right) &= \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & n=0\\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & n=1\\ \mathbb{Z}_2^2 & n=2\\ \mathbb{Z}_2 & n=3\\ 0 & n \geq 4 \end{array} \right. \\ H_n\left(\mathfrak{M}_{1,1}^{3};\mathbb{Z}\right) &= \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & n=0\\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & n=2\\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^2 & n=2\\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^2 & n=3\\ \mathbb{Z} & n=4,5\\ 0 & n \geq 6 \end{array} \right. \\ H_n\left(\mathfrak{M}_{2,1}^{0};\mathbb{Z}\right) &= \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & n=0\\ \mathbb{Z}_{10} & n=1\\ \mathbb{Z}_2 & n=2\\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & n=3\\ \mathbb{Z}_6 & n=4\\ 0 & n \geq 5 \end{array} \right. \\ H_n\left(\mathfrak{M}_{2,1}^{1};\mathbb{Z}\right) &= \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & n=0\\ \mathbb{Z}_{10} & n=1\\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & n=2\\ \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_2^2 & n=3\\ \mathbb{Z}_6^2 & n=4\\ 0 & n \geq 5 \end{array} \right. \\ H_n\left(\mathfrak{M}_{2,1}^{1};\mathbb{Z}\right) &= \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & n=0\\ \mathbb{Z}_{10} & n=1\\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & n=2\\ \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_2^2 & n=3\\ \mathbb{Z}_6^2 & n=4\\ \mathbb{Z} & n=5,6\\ 0 & n \geq 7 \end{array} \right. \end{split}$$

Literaturverzeichnis

- [Bö1] C.-F. Bödigheimer: The Topology of Moduli Spaces, part I: Hilbert Uniformization, Math. Gott., 7 und 8 (1990).
- [Bö2] C.-F. Bödigheimer: The Topology of Moduli Spaces, part II: Homology Operations, Math. Gott., 9 (1990).
- [Bö3] C.-F. Bödigheimer: Interval Exchange Spaces and Moduli Spaces of Riemann Surfaces, in: Mapping Class Groups (Hg.: C.-F. Bödigheimer und R. Hain), Contemp. Math., Vol. 150 (1993), 33-50.
- [Bö4] C.-F. Bödigheimer: The Harmonic Compactification of the Moduli Spaces of Riemann Surfaces, Math. Gott., 23 (1993).
- [Bö5] C.-F. Bödigheimer: Cyclic Homology and Moduli Spaces of Riemann Surfaces, Asterisque 7, 226 (1994), 43-55.
- [Bö6] C.-F. Bödigheimer: Moduli Spaces of Riemann Surfaces with Boundary, Vordruck (2003).
- [Bö7] C.-F. Bödigheimer: A Cell Decomposition for Moduli Spaces of Riemann Surfaces, Vordruck (2004).
- [Bö8] C.-F. Bödigheimer: Glossary-Moduli Spaces, Vordruck (2004).
- [Coh] H. Cohen: A Course in Computational Algebraic Number Theory, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1993.
- [Dol] A. Dold: Lectures on Algebraic Topology, second edition, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 200, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1980.
- [Eh1] R. Ehrenfried: Die Homologie der Modulräume berandeter Riemannscher Flächen von kleinem Geschlecht, Bonner Mathematische Schriften, Vol. 306, Dissertation, Universität Bonn, 1997.
- [Eh2] R. Ehrenfried: On the homology of moduli spaces of Riemann Surfaces, Vordruck (1998).

- [FH] W. Fulton und J. Harris: Representation Theory, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1991.
- [GJ] P.G. Goerss und J.F. Jardine: Simplicial Homotopy Theory, Progress in Mathematics, Vol. 174, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.
- [GM] S.I. Gelfand und Y.I. Manin: Methods of Homological Algebra, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1996.
- [Hat] **A. Hatcher**: Algebraic Topology, Cambridge University Press, Cambridge 2002.
- [Knu] D.E. Knuth: The Art of Computer Programming, Vol 2: Seminumerical Algorithms, second edition, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981.
- [KS] S. Kuhlins und M. Schader: *Die C++ Standardbibliothek*, dritte überarbeitete Auflage, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2002.
- [LLL] A.K. Lenstra, H.W. Lenstra und L. Lovász: Factoring Polynomials with Rational Coefficients, Math. Ann., 261 (1982), 515-534.
- [Mül] M. Müller: Die Orientierbarkeit des Raumes der Parallelschlitzgebiete, Diplomarbeit, Universität Bonn, 1996.
- [Spa] E.H. Spanier: Algebraic Topology, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [SZ] R. Stöcker und H. Zieschang: Algebraische Topolgie, B.G. Teubner, Stuttgart, 1988.
- [Wei] C.A. Weibel: An Introduction to Homological Algebra, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.