

Eine Einführung in das Thema Differentialgleichungen

Mechthild Thalhammer
Leopold–Franzens Universität Innsbruck

September 2020

Worum geht es (heute)?

Lernziel.

- Verständnis für **Relevanz von Differentialgleichungen** bei Modellierung dynamischer Prozesse

Wesentliche Lerninhalte (heute).

- Klärung des Begriffes **gewöhnliche Differentialgleichung**
- Zusammenhang mit **Bewegungsgleichungen**
- Beschreibung von **Schwingungsprozessen**
- Gegenüberstellung

{ **nichtlineare** gewöhnliche Differentialgleichungen
 lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Begriffsbildung

Differentialgleichungen

Was versteht man unter Differentialgleichungen?

- Naheliegende Bezeichnung für Gleichungen, in denen **Ableitungen** von Funktionen auftreten.

Beispiel und Veranschaulichung

Sehr einfaches und dennoch wichtiges Beispiel.

- Differentialgleichung

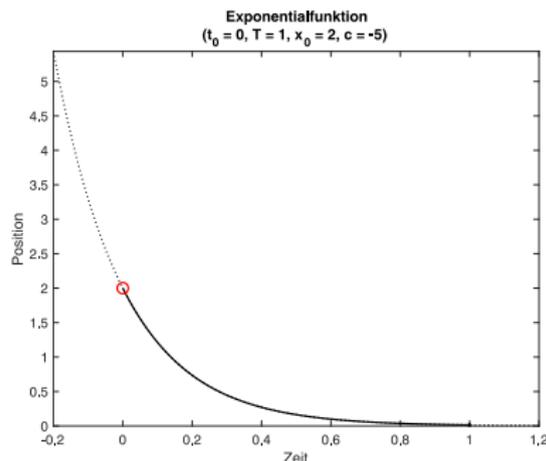
$$x'(t) = c x(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

und Zusatzbedingung

$$x(0) = x_0$$

wird erfüllt von Funktion

$$x: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: t \longmapsto x(t) = x_0 e^{c t}.$$



Veranschaulichung.

- Funktionswert $x(t)$ gibt Position eines Massenpunktes zum Zeitpunkt t an.

Präzisierung

Präzisierung des Begriffes.

- Unter einer **gewöhnlichen** Differentialgleichung versteht man eine Gleichung für eine Funktion **in einer Veränderlichen**, in der auch Ableitungen der Funktion auftreten.

Anwendungsbereiche

Anwendungsbereiche

In welchen Anwendungsbereichen treten Differentialgleichungen auf?

- Insbesondere in **Naturwissenschaften** und **Technik** bei Modellierung dynamischer Prozesse.

Anwendungsbereiche

Einfacher Schwingungsvorgang.

- Schaukel, Pendel etc.



Einfaches Modell

Mathematisches Pendel (ohne Reibungseffekte)

Mathematisches Pendel

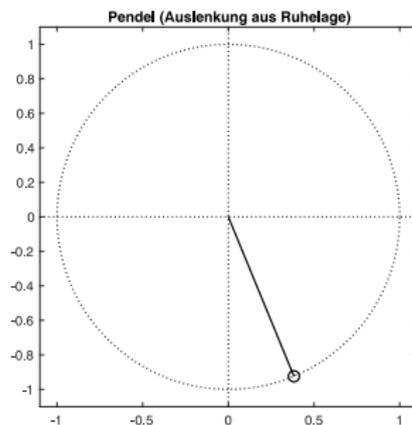
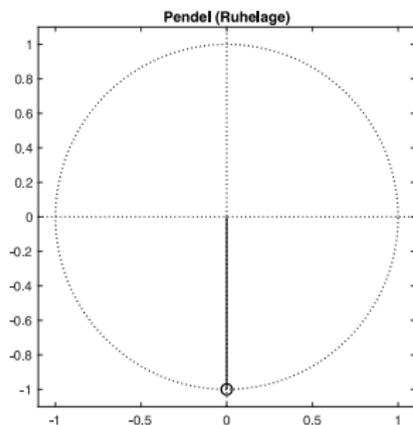
Idealisierte Situation.

- Auf **punktförmigen Körper** (Masse m), fixiert an **Faden** (Länge ℓ), wirkt **Schwerkraft** (Fallbeschleunigung $g \approx 9,81 \text{ ms}^{-2}$).

Mathematisches Pendel

Fragestellung.

- **Auslenkung** des Körpers aus Ruhelage. Vorgabe von Anfangsbedingungen (Anfangsposition, Anfangsgeschwindigkeit).



Wie verläuft Bewegung?

Mathematisches Pendel

Nichtlineare Differentialgleichung.

- Beschreibung der Bewegung eines Körpers mittels Grundprinzip der Klassischen Mechanik

Masse \times **Beschleunigung** = Summe der einwirkenden Kräfte.

- Führt auf **nichtlineare** Differentialgleichung **zweiter Ordnung** für Auslenkungswinkel $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi''(t) = -\frac{g}{\ell} \sin(\varphi(t)), \quad t \in (0, T).$$

Übung. Herleitung durch Einführung von Polarkoordinaten / mittels Kreuzprodukt.
http://techmath.uibk.ac.at/mecht/MyHomepage/Teaching/Lecture_Modellierung.pdf

Berechnung der Lösung? **Keine** Lösungsdarstellung mittels **elementarer** Funktionen möglich.

Was nun?

Unterschiedliche Ansätze hilfreich – auch für andere Dgln! :-)

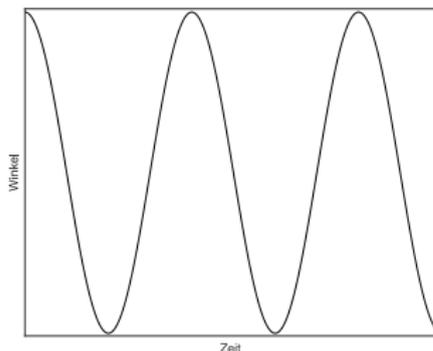
Mathematisches Pendel

Nichtlineare Differentialgleichung.

- Anwendung **numerischer Methoden** zur näherungsweise Berechnung von Lösungswerten

$$\begin{cases} \varphi''(t) = -\frac{g}{\ell} \sin(\varphi(t)), & t \in (0, T), \\ \varphi(0), \varphi'(0) \text{ vorgegeben.} \end{cases}$$

Übungen. Approximation der Ableitung durch Differentialquotient. Besprechung explizites Eulerverfahren. Ausprobieren des Codes.



Mathematisches Pendel

Linearisierte Differentialgleichung.

- Taylorreihenentwicklung (um Ruhelage $\varphi = 0$, sinnvoll unter Annahme $\varphi(t)$ *relativ klein*)

$$\sin(\varphi(t)) \approx \varphi(t), \quad t \in (0, T).$$

- Führt auf **lineare** Differentialgleichung

$$\begin{cases} \varphi''(t) = -\frac{g}{\ell} \varphi(t), & t \in (0, T), \\ \varphi(0), \varphi'(0) \text{ vorgegeben,} \end{cases}$$

mit **elementarer** Lösungsdarstellung

$$\varphi(t) = \varphi(0) \cos(\omega t) + \varphi'(0) \frac{1}{\omega} \sin(\omega t), \quad t \in (0, T), \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

- Wesentliche Idee in Herleitung: **Exponentialansatz** (hilfreich für lineare Dgln mit konstanten Koeffizienten).

Mathematisches Pendel

Exponentialansatz. Bestimmung von **Basislösungen der Differentialgleichung**

$$\varphi''(t) + \omega^2 \varphi(t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}},$$

$$\text{Ansatz: } \varphi(t) = e^{ct}, \quad \varphi''(t) = c^2 e^{ct},$$

$$\text{Einsetzen: } (c^2 + \omega^2) e^{ct} = 0,$$

$$\text{Quadratische Gleichung: } c^2 + \omega^2 = 0,$$

$$\text{Komplexwertige Basislösungen: } \begin{cases} c_1 = i\omega, & \varphi_1(t) = e^{i\omega t}, \\ c_2 = -i\omega, & \varphi_2(t) = e^{-i\omega t}. \end{cases}$$

Mathematisches Pendel

Noch offen ... Bestimmung der Lösung, die zusätzlich **Anfangsbedingungen** erfüllt.

- **Superpositionsprinzip.** **Linearkombination** von (Basis-)Lösungen ist ebenfalls Lösung der Differentialgleichung

$$\varphi = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2, \quad \varphi'' = C_1 \underbrace{\varphi_1''}_{=-\omega^2 \varphi_1} + C_2 \underbrace{\varphi_2''}_{=-\omega^2 \varphi_2} = -\omega^2 \varphi.$$

- **Lineares Gleichungssystem.** Bestimmung der **Konstanten** in Linearkombination mittels vorgegebenen Anfangsbedingungen durch Lösung des linearen Gleichungssystems

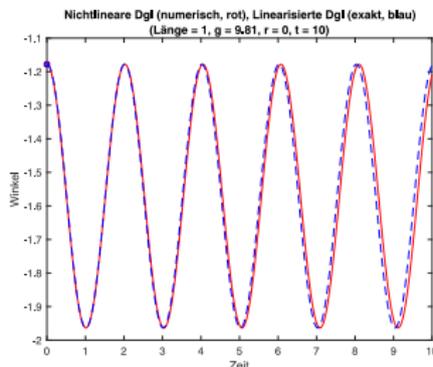
$$C_1 \varphi_1(0) + C_2 \varphi_2(0) \stackrel{!}{=} \varphi(0), \quad C_1 \varphi_1'(0) + C_2 \varphi_2'(0) \stackrel{!}{=} \varphi'(0).$$

- **Euler'sche Formel.** Zusammenhang mit Cosinus/Sinus

$$\varphi_1(t) = e^{i\omega t}, \quad \varphi_2(t) = e^{-i\omega t},$$
$$\frac{1}{2}(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) = \cos(\omega t), \quad \frac{1}{2i}(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) = \sin(\omega t).$$

Veranschaulichung

Vergleich nichtlineare und linearisierte Differentialgleichung (ohne Reibungseffekte, $r = 0$)



<http://techmath.uibk.ac.at/mecht/MyHomepage/Research/MoviePendelOhneReibung.m4v>

Beobachtung.

- Erkennbarer Unterschied zwischen nichtlinearem und linearem Modell. Approximation des nichtlinearen Modelles durch lineares Modell für *kleine* Auslenkungswinkel und *kurze* Zeiten passabel.

Fazit

Fazit.

- Näherungsweise Lösung von nichtlinearen Differentialgleichungen.
- Herleitung einer elementaren Lösungsdarstellung für linearen Differentialgleichungen (mit konstanten Koeffizienten).
 - Exponentialansatz,
 - Superpositionsprinzip,
 - lineares Gleichungssystem.

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Ein grundlegendes Thema mit vielfältigen Anwendungen im Bereich der Technik

Dankeschön!

Klassifizierung

(Grobe) Klassifizierung nach Schwierigkeitsgrad.

{ Skalare Differentialgleichungen
{ Systeme von Differentialgleichungen

{ Differentialgleichungen der Ordnung 1, 2 etc.
{ (Ordnung der höchsten auftretenden Ableitungen)

{ Lineare Differentialgleichungen (homogen / inhomogen)
{ (Vgl. Lineare Gleichungssysteme)
{ Nichtlineare Differentialgleichungen

{ Autonome Differentialgleichungen (keine explizite Zeitabhängigkeit)
{ Nichtautonome Differentialgleichungen (explizite Zeitabhängigkeit)

Gegenüberstellung.

{ Gewöhnliche Differentialgleichungen (Fktn in einer Veränderlichen)
{ Partielle Differentialgleichungen (Fktn in mehreren Veränderlichen)

Ab nun. Verwendung der Kurzbezeichnung Differentialgleichung (Dgl).

Allgemeine Form

Allgemeine Form eines Anfangswertproblems.

- Zur Untersuchung mathematischer Fragestellungen ist es (meist) ausreichend, ein Anfangswertproblem der Form

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)), & t \in (t_0, T), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

für eine nichtlineare nichtautonome Differentialgleichung erster Ordnung zu betrachten.

- Vorgegeben: Die definierende Funktion (*rechte Seite*)

$$F : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d,$$

Startzeitpunkt t_0 und Anfangswert x_0 .

- Gesucht: Eine Funktion (*Lösung*), welche die Differentialgleichung auf einem Intervall (t_0, T) sowie die Anfangsbedingung erfüllt

$$x : (t_0, T) \longrightarrow \mathbb{R}^d.$$

Anwendungsbereiche

Wichtige Anwendungen.

- Modellierung von **Schwingungsprozessen**
 - Errichtung von Brücken, Gebäude etc.
 - Ausbreitung von (Ultra-)Schallwellen
Vgl. Fachvortrag zum Thema Nichtlineare Akustik



Grundprinzip der Klassischen Mechanik

Grundprinzip der Klassischen Mechanik.

- Beschreibung der Bewegung eines Körpers mittels physikalischem Gesetz (Axiom von Newton)

Masse \times **Beschleunigung** = Summe der einwirkenden Kräfte.

Differentialgleichung.

- Gleichung entspricht **Differentialgleichung zweiter Ordnung**

$$m x''(t) = F(t, x(t), x'(t)), \quad t \in (t_0, T),$$

$$\begin{cases} \text{Position des Körpers (im Raum)} & x : (t_0, T) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \text{Geschwindigkeit} & x' : (t_0, T) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \text{Beschleunigung} & x'' : (t_0, T) \longrightarrow \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Mathematisches Pendel

Abkürzung.

- Anwendung Euler'sche Formel (ebenfalls Lösungen der Dgl)

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \quad \sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}).$$

- Bestimmung der Konstanten (nun einfacheres Gleichungssystem)

$$\varphi(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t), \quad \varphi'(t) = -\omega C_1 \sin(\omega t) + \omega C_2 \cos(\omega t),$$
$$C_1 \stackrel{!}{=} \varphi(0), \quad \omega C_2 \stackrel{!}{=} \varphi'(0).$$

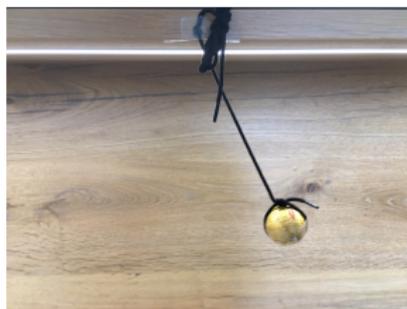
- Gesuchte Lösungsdarstellung

$$\begin{cases} \varphi''(t) = -\omega^2 \varphi(t), \\ \varphi(0), \varphi'(0) \text{ vorgegeben,} \end{cases}$$
$$\varphi(t) = \varphi(0) \cos(\omega t) + \varphi'(0) \frac{1}{\omega} \sin(\omega t), \quad t \in (0, T).$$

Versuch – Mathematisches Modell und reeller Vorgang

Versuch (Pendel).

- Verwendung von einfachen, zu Hause verfügbaren Mitteln
- Vorgabe der Schnurlänge
Bestimmung der Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit



Versuch – Mathematisches Modell und reeller Vorgang

Versuch (Pendel).

- Resultat:

Länge (in etwa) 15 cm : (in etwa) 152 Schwingungen pro Minute,

Länge (in etwa) 30 cm : (in etwa) 108 Schwingungen pro Minute.

- Beobachtung: Bei Berechnung von Verhältnissen erkennt man näherungsweise Übereinstimmung

$$\sqrt{\frac{\text{Länge 2}}{\text{Länge 1}}} = \sqrt{\frac{30}{15}} = \sqrt{2} = 1.414... \approx \frac{\text{Anzahl 1}}{\text{Anzahl 2}} = \frac{152}{108} = 1.407...$$

Einzelfall oder allgemein gültiger Zusammenhang?

Versuch – Mathematisches Modell und reeller Vorgang

Modell und Versuch (Pendel).

- Im Versuch wurde passable Übereinstimmung beobachtet

$$\begin{aligned}\text{Verhältnis Frequenzen} &\approx \frac{1}{\sqrt{\text{Verhältnis Längen}}}, \\ 1.407 &\approx 1.414.\end{aligned}$$

- Wird beispielsweise durch Lösung des linearen Modelles bestätigt

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= -\frac{g}{\ell} \varphi(t), \\ \omega &= \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad \varphi(t) = \varphi(0) \cos(\omega t) + \varphi'(0) \frac{1}{\omega} \sin(\omega t), \\ \text{Frequenz der Schwingung} &= \sqrt{\frac{\text{Fallbeschleunigung}}{\text{Länge des Pendels}}}.\end{aligned}$$

Erweiterte Modelle

Allgemeine Beobachtung. Nur für sehr überschaubare Anzahl von (wenig realitätsnahen) nichtlinearen Differentialgleichungen kann man die / eine Lösung berechnen.

Erweiterte Modelle. Zuvor beschriebene Vorgehensweise ermöglicht Betrachtung erweiterter Modelle.

Mathematisches Pendel.

- Berücksichtigung zusätzlicher **Reibungseffekte** ($R(0) = 0$)

$$\varphi''(t) = -\omega^2 \sin(\varphi(t)) - R(\varphi'(t)), \quad t \in (t_0, T).$$

- Zugehörige **linearisierte Differentialgleichung**

$$\varphi''(t) = -\omega^2 \varphi(t) - r \varphi'(t), \quad t \in (t_0, T).$$

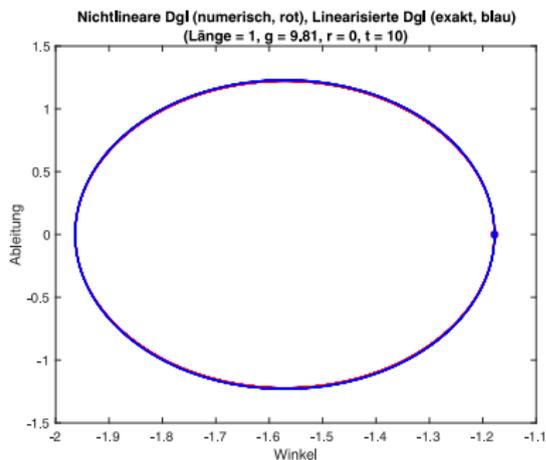
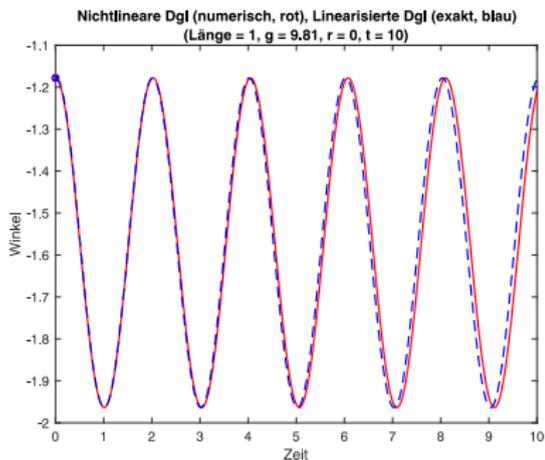
DETAILS. Lösung des Anfangswertproblem es mittels systematischem Verfahren.

Veranschaulichung

Vergleich nichtlineare und linearisierte Differentialgleichung (ohne Reibungseffekt)

<http://techmath.uibk.ac.at/mecht/MyHomepage/Research/MoviePendelOhneReibung.m4v>

Zeitlicher Verlauf, Phasendiagramm (Periodische Schwingung)

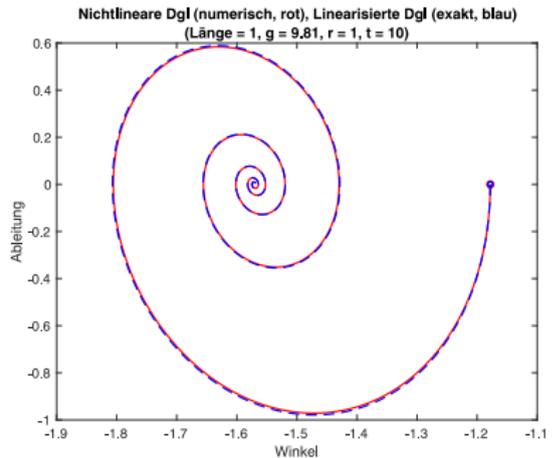
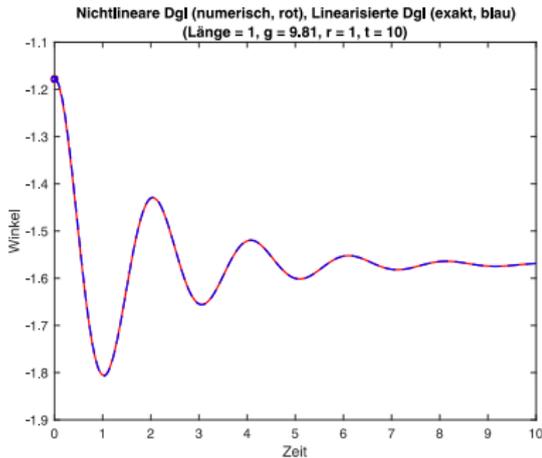


Veranschaulichung

Vergleich nichtlineare und linearisierte Differentialgleichung (mit linearem Reibungseffekt)

<http://techmath.uibk.ac.at/mecht/MyHomepage/Research/MoviePendelMitReibung.m4v>

Zeitlicher Verlauf, Phasendiagramm (Abklingen)



Lineare Schwingungsgleichungen

- **Systematisches Lösungsverfahren für allgemeine lineare Schwingungsgleichungen**
 - Formulierung als Differentialgleichungssystem erster Ordnung
 - Bestimmung der Lösung des homogenen Systemes (Eigenwertzerlegung, Matrixexponentialfunktion)
 - Bestimmung der Lösung des inhomogenen Systemes (Variation-der-Konstanten-Formel)
- **Erklärung von Resonanzphänomenen**

Kontext

Einordnung des Themas. Curricula der Bachelorstudien der Fakultät für Technische Wissenschaften

- Bau- und Umweltingenieurwissenschaften
- Mechatronik
- Elektrotechnik

umfassen Lehrveranstaltungen im Bereich **Grundlagen der Mathematik für ein ingenieurwissenschaftliches Studium**

- **Mathematik 1 (VO 4 + UE 2, 5 + 2.5 ECTS, 1. Semester)**
Mathematische Grundkonzepte, Differential- und Integralrechnung in einer Veränderlichen, Lineare Algebra (Vektorrechnung, Matrizen, lineare Gleichungssysteme, Eigenwerte)
- **Mathematik 2 (VO 2, UE 2, 2.5 + 2.5 ECTS, 2. Semester)**
Differential- und Integralrechnung in mehreren Veränderlichen mit Anwendungen, **Differentialgleichungen**