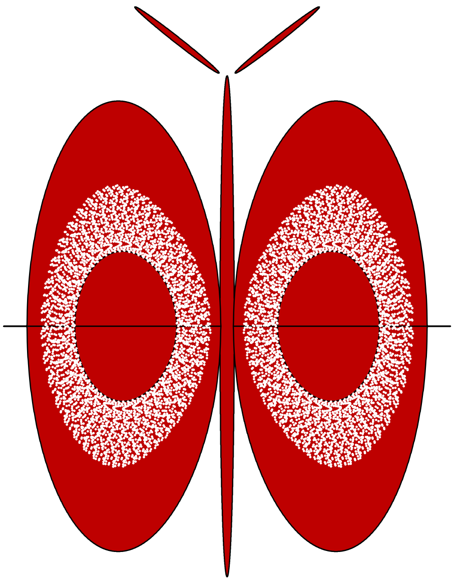
Kompendium zur Lehrveranstaltung

Grundlagen der Operatortheorie

Mechthild Thalhammer



Leopold–Franzens Universität Innsbruck

Sommersemester 2017

Das vorliegende Kompendium faßt die im Rahmen der Lehrveranstaltung **Einführung in die höhere Analysis: Grundlagen der Operatortheorie** (VO2) im Sommersemester 2017 an der Universität Innsbruck behandelten Themen zusammen. Ohne Anspruch auf Allgemeinheit und Vollständigkeit werden theoretische Grundlagen zur Analyse von nichtlinearen Evolutionsgleichungen angegeben.

Das Kompendium beruht vorwiegend auf den von Etienne Emmrich und Michael Růžička verfaßten Büchern, die auch als ergänzende und weiterführende Literatur empfohlen werden.

ETIENNE EMMRICH
Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen
Vieweg, Wiesbaden, 2004
http://www.springer.com/fr/book/9783528032135

MICHAEL RŮŽIČKA
Nichtlineare Funktionalanalysis
Springer, Berlin, 2004
http://www.springer.com/us/book/9783540200666

Im Rahmen des Übungsteiles soll das dritte Kapitel des Buches von MICHAEL RŮŽIČKA

Theorie monotoner Operatoren
https://aam.uni-freiburg.de/agru/prof/lehrbrz/book.pdf

besprochen werden.

Als zusätzliche Unterlage zu grundlegenden Integralsätzen sei außerdem auf das Skriptum von PETER WAGNER

Integralrechnung in mehreren Variablen
http://mat1.uibk.ac.at/wagner/psfiles/MABKAP7.pdf

verwiesen.

Inhaltsverzeichnis

Nichtlineare Evolutionsgleichungen

Für theoretische Untersuchungen ist es hilfreich, zeitabhängige partielle Differentialgleichungen als abstrakte Differentialgleichungen zu formulieren; diese werden auch als Evolutionsgleichungen oder Operator-Differentialgleichungen bezeichnet. Betrachtet man beispielsweise eine nichtlineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung bezüglich der Zeit mit reellwertiger Lösung

$$U : \Omega \times [t_0, T] \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (x, t) \longmapsto U(x, t)\,,$$

so ergibt sich für die zugehörige abstrakte Funktion

$$u : [t_0, T] \longrightarrow X : t \longmapsto u(t) = \big[x \mapsto U(x, t)\big]$$

eine nichtlineare Evolutionsgleichung der Form

$$u'(t) = f\big(t, u(t)\big)\,, \qquad t \in (t_0, T)\,.$$

In zahlreichen Anwendungen bildet der zugrundeliegende Funktionenraum einen Banach-Raum; Regularitätsbedingungen und zusätzliche Randbedingungen werden in den Definitionsbereich der vorgegebenen definierenden Funktion

$$f : D(f) \subseteq [t_0, T] \times X \to X$$

aufgenommen. Ähnlich dem Picard–Lindelöf-Iterationsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen beruht ein möglicher Zugang zur Herleitung von Existenz- und Eindeutigkeitsresultaten auf der Verwendung von Fixpunktsätzen für die zugehörige Integralgleichung

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f\big(\tau, u(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad t \in [t_0, T]\,,$$

vgl. Kapitel 2. Als wesentliches Hilfsmittel wird in Kapitel 1 das Bochner-Integral[1] für Funktionen mit Werten in Banach-Räumen eingeführt.

[1] Salomon Bochner (1899–1982)

Kapitel 1

Integration und Differentiation in Banach-Räumen

Inhalt. In Lehrveranstaltungen der Analysis wurden wesentliche Grundlagen der Integrationstheorie wie das Lebesgue-Integral und die Lebesgue-Räume für reellwertige Funktionen behandelt; Ziel der folgenden Überlegungen ist die Erweiterung auf Funktionen mit Werten in Banach-Räumen. Im Vergleich mit den entsprechenden Resultaten für den reellwertigen Fall ist dabei an macher Stelle etwas mehr Achtsamkeit notwendig. Existieren für eine Funktion zwischen Banach-Räumen sämtliche Richtungsableitungen, so spricht man von einer Gâteaux-differenzierbaren Funktion. Ein wesentliches Hilfsmittel, wo Bochner-Integral und Gâteaux-Ableitung auftreten, ist der Mittwertsatz. Der Begriff der Fréchet-Differenzierbarkeit verallgemeinert den Begriff der totalen Differenzierbarkeit einer Funktion zwischen euklidischen Räumen und impliziert insbesondere Gâteaux-Differenzierbarkeit.

1.1 Bochner-Integral

Situation. Die naheliegende Erweiterung des Lebesgue-Integrales

$$f : \mathscr{T} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto f(t)\,, \qquad \int_{\mathscr{T}} f(t)\,\mathrm{d}\lambda(t)\,,$$

auf Funktionen mit Werten in Banach-Räumen führt auf das Bochner-Integral

$$F : \mathscr{T} \subset \mathbb{R} \longrightarrow X : t \longmapsto F(t)\,, \qquad \int_{\mathscr{T}} F(t)\,\mathrm{d}\lambda(t)\,.$$

Zur Vereinfachung wird im Folgenden angenommen, daß der betrachtete Definitionsbereich ein beschränktes abgeschlossenes Intervall

$$\mathscr{T} = [0, T] \subset \mathbb{R}$$

ist; ähnliche Überlegungen gelten für Lebesgue-meßbare Teilmengen der reellen Zahlen. Der Bildbereich sei ein reflexiver reeller Banach-Raum; die zusätzliche Annahme der Separabilität erleichtert die Einführung des Bochner-Integrales.

Erinnerung. Detailierte Informationen zu Lebesgue-Maß und Lebesgue-Integral finden sich im Anhang von RŮŽIČKA (2004).

(i) *Charakteristische Funktion.* Die charakteristische Funktion einer beliebigen Teilmenge $M \subseteq \mathscr{T}$ ist durch

$$\chi_M : \mathscr{T} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \begin{cases} 1\,, & t \in M\,, \\ 0\,, & t \notin M\,, \end{cases}$$

definiert. Offensichtlich gilt

$$\big(\chi_M(t)\big)^2 = \chi_M(t)\,, \qquad t \in \mathscr{T}\,.$$

(ii) *Lebesgue-Maß.* Es bezeichne $\lambda(M)$ das Lebesgue-Maß einer Lebesgue-meßbaren Menge $M \subseteq \mathscr{T}$; inbesondere gilt für ein abgeschlossenes Intervall $[a, b] \subseteq \mathscr{T}$ die Relation

$$\lambda\big([a, b]\big) = b - a\,.$$

(iii) *Elementare Funktion und Lebesgue-Integral.* Es sei $J \in \mathbb{N}$, und es gelte $r_1, \dots, r_J \in \mathbb{R}$; weiters bezeichnen $M_1, \dots, M_J \subseteq \mathscr{T}$ paarweise disjunkte Lebesgue-meßbare Mengen. Eine reellwertige Funktion der Form

$$\widetilde{f} : \mathscr{T} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \sum_{j=1}^{J} r_j\, \chi_{M_j}(t)$$

wird als elementare Funktion oder Treppenfunktion bezeichnet. Das Lebesgue-Integral einer elementaren Funktion ist durch (Linearität)

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathscr{T}} \widetilde{f}(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) &= \int_{\mathscr{T}} \sum_{j=1}^{J} r_j\,\chi_{M_j}(t)\,\mathrm{d}\lambda(t)\\
&= \sum_{j=1}^{J} r_j \int_{\mathscr{T}} \chi_{M_j}(t)\,\mathrm{d}\lambda(t)\\
&= \sum_{j=1}^{J} r_j \int_{M_j} 1\,\mathrm{d}\lambda(t)\\
&= \sum_{j=1}^{J} r_j\,\lambda(M_j) \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

definiert.

(iv) *Lebesgue-Integral.* Eine reellwertige Funktion ist genau dann Lebesgue-meßbar, wenn sie punktweise durch eine Folge von elementaren Funktionen approximiert werden kann. Wählt man für eine nicht-negative Funktion in geeigneter Art und Weise eine solche Folge von elementaren Funktionen, so ist das zugehörige Lebesgue-Integral als Limes der entsprechenden Integrale gegeben. Im Folgenden wird auch die gebräuchliche Schreibweise

$$\int_{\mathscr{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathscr{T}} f(t)\,\mathrm{d}\lambda(t)$$

verwendet.

Vorbemerkung. Für elementare Funktionen wird das Bochner-Integral in naheliegender Art und Weise definiert; zusätzlich angegebene Überlegungen werden an späterer Stelle benötigt.

Bochner-Integral elementarer Funktionen.

(i) *Elementare Funktion.* Es sei $J \in \mathbb{N}$, und es gelte $x_1, \dots, x_J \in X$; weiters bezeichnen $M_1, \dots, M_J \subseteq \mathscr{T}$ paarweise disjunkte Lebesgue-meßbare Mengen. Eine Funktion der folgenden Form wird als elementare Funktion oder Treppenfunktion bezeichnet

$$\widetilde{F} : \mathscr{T} \longrightarrow X : t \longmapsto \sum_{j=1}^{J} x_j\,\chi_{M_j}(t)\,.$$

Man beachte, daß Linearkombinationen von elementaren Funktionen wiederum auf elementare Funktionen führen.

(ii) *Elementare Relationen.* Für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichheit

$$\sqrt{|a|^2 + 2\,|a|\,|b| + |b|^2} = \sqrt{\big(|a| + |b|\big)^2} = |a| + |b|\,;$$

im Allgemeinen ist jedoch (Gegenbeispiel $a = -1$, $b = 1$)

$$|a+b| \neq |a| + |b|\,.$$

(iii) *Hilfsüberlegung.* Betrachtet man disjunkte Lebesgue-meßbare Mengen $M_1, M_2 \subseteq \mathscr{T}$, so folgt wegen (Gleichheit von Funktionen)

$$M_1 \cap M_2 = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \chi_{M_1} \chi_{M_2} = 0$$

für beliebige Elemente $x_1, x_2 \in X$ die Identität[1] (für alle $t \in \mathscr{T}$, Abschätzung mittels Dreiecksungleichung, betrachte etwa den Fall $t \in M_1$ und folglich $\chi_{M_2}(t) = 0$ sowie den trivialen Fall $t \notin M_1 \cup M_2$)

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \big\| x_1\, \chi_{M_1}(t) + x_2\, \chi_{M_2}(t) \big\|_X \leq \big\| x_1 \big\|_X\, \chi_{M_1}(t) + \big\| x_2 \big\|_X\, \chi_{M_2}(t)\,, \\ \big\| x_1 \big\|_X\, \chi_{M_1}(t) + \big\| x_2 \big\|_X\, \chi_{M_2}(t) = \big\| x_1\, \chi_{M_1}(t) + x_2\, \chi_{M_2}(t) \big\|_X\,, \end{cases} \\
&\Longrightarrow \quad \big\| x_1\, \chi_{M_1}(t) + x_2\, \chi_{M_2}(t) \big\|_X = \big\| x_1 \big\|_X\, \chi_{M_1}(t) + \big\| x_2 \big\|_X\, \chi_{M_2}(t)\,.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, daß für eine elementare Funktion die durch die Norm definierte zugehörige reellwertige Funktion (Induktionsargument)

$$\begin{gathered}
\widetilde{F} : \mathscr{T} \longrightarrow X : t \longmapsto \sum_{j=1}^{J} x_j\, \chi_{M_j}(t)\,, \\
\big\| \widetilde{F}(\cdot) \big\|_X : \mathscr{T} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \Bigg\| \sum_{j=1}^{J} x_j\, \chi_{M_j}(t) \Bigg\|_X = \sum_{j=1}^{J} \big\| x_j \big\|_X\, \chi_{M_j}(t)\,,
\end{gathered}$$

ebenfalls eine elementare Funktion ist.

(iv) *Bochner-Integral.* Es ist naheliegend, das Bochner-Integral einer elementaren Funktion

---

[1] Im Spezialfall eines Hilbert-Raumes gilt folgende Relation

$$\begin{aligned}
\big\| x_1\, \chi_{M_1}(t) + x_2\, \chi_{M_2}(t) \big\|_X &= \sqrt{\big(x_1\, \chi_{M_1}(t) + x_2\, \chi_{M_2}(t) \big| x_1\, \chi_{M_1}(t) + x_2\, \chi_{M_2}(t) \big)_X} \\
&= \sqrt{\big\| x_1\, \chi_{M_1}(t) \big\|_X^2 + 2 \big(x_1\, \chi_{M_1}(t) \big| x_2\, \chi_{M_2}(t) \big)_X + \big\| x_2\, \chi_{M_2}(t) \big\|_X^2} \\
&= \sqrt{\big\| x_1 \big\|_X^2\, \chi_{M_1}(t) + 2 \big(x_1 \big| x_2 \big)_X\, \chi_{M_1}(t)\, \chi_{M_2}(t) + \big\| x_2 \big\|_X^2\, \chi_{M_2}(t)} \\
&= \sqrt{\big\| x_1 \big\|_X^2\, \chi_{M_1}(t) + \big\| x_2 \big\|_X^2\, \chi_{M_2}(t)} \\
&= \sqrt{\big\| x_1 \big\|_X^2\, \chi_{M_1}(t) + 2 \big\| x_1 \big\|_X \big\| x_2 \big\|_X\, \chi_{M_1}(t)\, \chi_{M_2}(t) + \big\| x_2 \big\|_X^2\, \chi_{M_2}(t)} \\
&= \sqrt{\big(\big\| x_1 \big\|_X\, \chi_{M_1}(t) + \big\| x_2 \big\|_X\, \chi_{M_2}(t) \big)^2} \\
&= \big\| x_1 \big\|_X\, \chi_{M_1}(t) + \big\| x_2 \big\|_X\, \chi_{M_2}(t)\,.
\end{aligned}$$

durch die Relation (Linearität)

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{T}} \widetilde{F}(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) &= \int_{\mathscr{T}} \sum_{j=1}^{J} x_j\,\chi_{M_j}(t)\,\mathrm{d}\lambda(t)\\ &= \sum_{j=1}^{J} x_j \int_{\mathscr{T}} \chi_{M_j}(t)\,\mathrm{d}\lambda(t)\\ &= \sum_{j=1}^{J} x_j \int_{M_j} 1\,\mathrm{d}\lambda(t)\\ &= \sum_{j=1}^{J} x_j\,\lambda(M_j) \in X\end{aligned}$$

zu erklären; man beachte, daß wegen $\lambda(\mathscr{T}) < \infty$ auch

$$\lambda(M_j) < \infty\,, \quad j \in \{1,\dots,J\}$$

gilt. Im Spezialfall einer reellwertigen elementaren Funktion mit positiven Werten entspricht das Integral einer Fläche; für allgemeine Banach-Räume

$$\int_{\mathscr{T}} \widetilde{F}(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) \in X$$

ist diese Veranschaulichung jedoch nicht zulässig.

(v) *Abschätzung.* Wie man mittels Dreiecksungleichung leicht einsieht

$$\Big\| \int_{\mathscr{T}} \widetilde{F}(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) \Big\|_X = \Big\| \sum_{j=1}^{J} x_j\,\lambda(M_j) \Big\|_X\,,$$

$$\int_{\mathscr{T}} \big\|\widetilde{F}(t)\big\|_X\,\mathrm{d}\lambda(t) = \int_{\mathscr{T}} \sum_{j=1}^{J} \|x_j\|_X\,\chi_{M_j}(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) = \sum_{j=1}^{J} \|x_j\|_X\,\lambda(M_j)\,,$$

ist für das Bochner-Integral einer elementaren Funktion die Abschätzung

$$\Big\| \int_{\mathscr{T}} \widetilde{F}(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) \Big\|_X \leq \int_{\mathscr{T}} \big\|\widetilde{F}(t)\big\|_X\,\mathrm{d}\lambda(t)$$

gültig.

Vorbemerkung. Im Folgenden wird der Begriff der Bochner-Meßbarkeit eingeführt; Resultate wie der Satz von Pettis[2] besagen, daß man Bochner-Meßbarkeit auf Lebesgue-Meßbarkeit zurückführen kann.

[2] Billy James Pettis (1913–1979)

Bochner-Meßbarkeit.

(i) *Bochner-Meßbarkeit.* Eine Funktion $F : \mathscr{T} \to X$ heißt Bochner-meßbar, wenn für fast alle Elemente $t \in \mathscr{T}$ der zugehörige Funktionswert $F(t) \in X$ mittels einer Folge von elementaren Funktionen approximiert werden kann (wobei $J_K \in \mathbb{N}$ für $K \in \mathbb{N}$, unter den zuvor angegebenen Voraussetzungen an elementare Funktionen)

$$\big(\widetilde{F}_K\big)_{K\in\mathbb{N}}, \qquad \widetilde{F}_K : \mathscr{T} \longrightarrow X : t \longmapsto \sum_{j=1}^{J_K} x_j^{(K)} \chi_{M_j^{(K)}}(t),$$
$$\lim_{K\to\infty} \big\|\widetilde{F}_K(t) - F(t)\big\|_X = 0.$$

(ii) *Hilfsresultat.* Für jede Bochner-meßbare Funktion $F : \mathscr{T} \to X$ ist die durch die Norm definierte reellwertige Funktion Lebesgue-meßbar

$$\big\|F(\cdot)\big\|_X : \mathscr{T} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Erklärung. Die Bochner-meßbare Funktion $F : \mathscr{T} \to X$ sei fast überall punktweiser Limes der Folge elementarer Funktionen

$$\big(\widetilde{F}_K\big)_{K\in\mathbb{N}}.$$

Wie zuvor gezeigt wurde, umfaßt die durch die Norm definierte Folge

$$\big(\big\|\widetilde{F}_K(\cdot)\big\|_X\big)_{K\in\mathbb{N}}$$

elementare und somit Lebesgue-meßbare Funktionen. Mittels Dreiecksungleichung[3]

[3] *Bemerkungen.* (a) Im Spezialfall eines Hilbert-Raumes ergibt sich die Dreiecksungleichung mittels der Ungleichung von Cauchy–Schwarz (wobei $x, y \in X$)

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_X^2 &= \|x\|_X^2 + 2\,(x|y)_X + \|y\|_X^2 \\
&\le \|x\|_X^2 + 2\,\big|(x|y)_X\big| + \|y\|_X^2 \\
&\le \|x\|_X^2 + 2\,\|x\|_X\|y\|_X + \|y\|_X^2 \\
&= \big(\|x\|_X + \|y\|_X\big)^2, \\
\|x+y\|_X &\le \|x\|_X + \|y\|_X.
\end{aligned}$$

(b) Als direkte Folgerung der Dreiecksungleichung erhält man die Abschätzung

$$\|x\|_X = \|y+x-y\|_X \le \|y\|_X + \|x-y\|_X \qquad \Longrightarrow \qquad \|x\|_X - \|y\|_X \le \|x-y\|_X$$

und bei Vertauschung der Rollen von x und y die analoge Relation

$$\|y\|_X - \|x\|_X \le \|y-x\|_X = \|x-y\|_X.$$

Insgesamt zeigt dies

$$\big|\|x\|_X - \|y\|_X\big| \le \|x-y\|_X.$$

und Einschließungssatz folgt für fast alle $t \in \mathscr{T}$ die Relation

$$0 \le \big| \|\widetilde{F}_K(t)\|_X - \|F(t)\|_X \big| \le \|\widetilde{F}_K(t) - F(t)\|_X ,$$

$$\lim_{K\to\infty} \|\widetilde{F}_K(t) - F(t)\|_X = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{K\to\infty} \|\widetilde{F}_K(t)\|_X = \|F(t)\|_X .$$

Als punktweiser Limes einer Folge von Lebesgue-meßbaren reellwertigen Funktionen ist auch die Funktion

$$\|F(\cdot)\|_X : \mathscr{T} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Lebesgue-meßbar, was die Behauptung ist. ⋄

(iii) *Satz von Pettis.* Eine Funktion $F : \mathscr{T} \to X$ ist genau dann Bochner-meßbar, wenn für jedes Element des Dualraumes $F^* \in X^*$ die zugehörige reellwertige Funktion Lebesgue-meßbar ist

$$F^* \circ F : \mathscr{T} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto F^*\big(F(t)\big).$$

Erklärung.

(a) Der Nachweis der Lebesgue-Meßbarkeit verwendet ähnliche Überlegungen wie zuvor. Die Bochner-meßbare Funktion $F : \mathscr{T} \to X$ sei fast überall punktweiser Limes der Folge elementarer Funktionen

$$\big(\widetilde{F}_K\big)_{K\in\mathbb{N}}, \qquad \widetilde{F}_K : \mathscr{T} \longrightarrow X : t \longmapsto \sum_{j=1}^{J_K} x_j^{(K)} \chi_{M_j^{(K)}}(t) .$$

Für jedes Element $F^* \in X^*$ umfaßt die zugehörige Folge (verwende Linearität)

$$\big(F^* \circ \widetilde{F}_K\big)_{K\in\mathbb{N}}, \qquad F^* \circ \widetilde{F}_K : \mathscr{T} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \sum_{j=1}^{J_K} F^*\big(x_j^{(K)}\big) \chi_{M_j^{(K)}}(t) ,$$

elementare und somit Lebesgue-meßbare Funktionen. Aus der starken Konvergenz für fast alle $t \in \mathscr{T}$, d.h. der Konvergenz bezüglich der Norm in X, folgt mittels der Abschätzung (verwende Stetigkeit und damit Beschränktheit von $F^* \in X^*$)

$$\big|F^*\big(\widetilde{F}_K(t) - F(t)\big)\big| \le \|F^*\|_{\mathbb{R}\leftarrow X} \|\widetilde{F}_K(t) - F(t)\|_X$$

auch die schwache Konvergenz (für fast alle $t \in \mathscr{T}$, für jedes Element $F^* \in X^*$)

$$\lim_{K\to\infty} \|\widetilde{F}_K(t) - F(t)\|_X = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{K\to\infty} F^*\big(\widetilde{F}_K(t)\big) = F^*\big(F(t)\big).$$

Als punktweiser Limes einer Folge von Lebesgue-meßbaren reellwertigen Funktionen ist die Funktion

$$F^* \circ F : \mathscr{T} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto F^*\big(F(t)\big).$$

Lebesgue-meßbar.

(b) Vgl. Literaturangaben in Růžička (2004). ⋄

(iv) *Folgerung.* Ist die Funktion $F : \mathscr{T} \to X$ für fast alle $t \in \mathscr{T}$ als Limes einer Folge von Bochner-meßbaren Funktionen im schwachen Sinn gegeben, so ist sie Bochner-meßbar.
Erklärung. Das Resultat ergibt sich aus dem Satz von Pettis, vgl. Růžička (2004). ⋄

Vorbemerkung. Ähnlich dem Lebesgue-Integral wird das Bochner-Integral mittels einer approximierenden Folge von elementaren Funktionen als Limes der zugehörigen Bochner-Integrale definiert. Der Satz von Bochner stellt einen Zusammenhang zwischen Bochner-Integrierbarkeit und Lebesgue-Integrierbarkeit her.

Bochner-Integral.

(i) *Bochner-Integrierbarkeit und Bochner-Integral.* Es sei $F : \mathscr{T} \to X$ eine Bochner-meßbare Funktion, und es bezeichne

$$\big(\widetilde{F}_K\big)_{K\in\mathbb{N}}, \qquad \widetilde{F}_K : \mathscr{T} \longrightarrow X : t \longmapsto \sum_{j=1}^{J_K} x_j^{(K)}\, \chi_{M_j^{(K)}}(t),$$

eine approximierende Folge elementarer Funktionen. Ist die folgende Bedingung erfüllt, heißt F Bochner-integrierbar

$$\lim_{K\to\infty} \int_{\mathscr{T}} \big\|\widetilde{F}_K(t) - F(t)\big\|_X \,\mathrm{d}\lambda(t) = 0.$$

Das zugehörige Bochner-Integral ist als Limes definiert

$$\int_{\mathscr{T}} F(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) = \lim_{K\to\infty} \int_{\mathscr{T}} \widetilde{F}_K(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) = \lim_{K\to\infty} \sum_{j=1}^{J_K} x_j^{(K)}\, \lambda\big(M_j^{(K)}\big);$$

wie im reellwertigen Fall wird auch die gebräuchliche Schreibweise

$$\int_{\mathscr{T}} F(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathscr{T}} F(t)\,\mathrm{d}\lambda(t)$$

verwendet.

(ii) *Wohldefiniertheit des Bochner-Integrales.* Um die Existenz des Limes nachzuweisen, nützt man die Vollständigkeit des zugrundeliegenden Raumes; genauer, man verwendet, daß die Folge der Bochner-Integrale elementarer Funktionen eine Cauchy-Folge bezüglich der Norm in X ist und somit in X konvergiert. Für zwei Elemente der Folge ist die Relation (wobei $K, \widetilde{K} \in \mathbb{N}$, Linearität, Differenz elementarer Funktionen ist elementare Funktion, zuvor angegebene Abschätzung, Dreiecksungleichung)

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{\mathscr{T}} \widetilde{F}_K(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) - \int_{\mathscr{T}} \widetilde{F}_{\widetilde{K}}(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) \right\|_X \\
&\quad = \left\| \int_{\mathscr{T}} \big(\widetilde{F}_K(t) - \widetilde{F}_{\widetilde{K}}(t)\big)\,\mathrm{d}\lambda(t) \right\|_X \\
&\quad \leq \int_{\mathscr{T}} \big\|\widetilde{F}_K(t) - \widetilde{F}_{\widetilde{K}}(t)\big\|_X \,\mathrm{d}\lambda(t) \\
&\quad \leq \int_{\mathscr{T}} \big\|\widetilde{F}_K(t) - F(t)\big\|_X \,\mathrm{d}\lambda(t) + \int_{\mathscr{T}} \big\|\widetilde{F}_{\widetilde{K}}(t) - F(t)\big\|_X \,\mathrm{d}\lambda(t) \overset{K,\widetilde{K}\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

gültig. Dies zeigt, daß die Folge der Bochner-Integrale

$$\left(\int_{\mathscr{T}} \widetilde{F}_K(t)\,\mathrm{d}\lambda(t)\right)_{K\in\mathbb{N}}$$

eine Cauchy-Folge bildet und impliziert das gewünschte Resultat. ◇

(iii) *Satz von Bochner.* Eine Bochner-meßbare Funktion $F:\mathscr{T}\to X$ ist genau dann Bochner-integrierbar, wenn die durch die Norm definierte reellwertige Funktion Lebesgue-integrierbar ist

$$\left\|F(\cdot)\right\|_X : \mathscr{T} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Erklärung.

(a) Um die Wohldefiniertheit des Lebesgue-Integrales

$$\int_{\mathscr{T}} \left\|F(t)\right\|_X \mathrm{d}\lambda(t)$$

zu zeigen, nützt man, daß für die Bochner-integrierbare und insbesondere Bochner-meßbare Funktion F eine approximierende Folge von elementaren Funktionen

$$\big(\widetilde{F}_K\big)_{K\in\mathbb{N}}$$

existiert. Nach den zuvor angegebenen Überlegungen umfaßt die zugehörige Folge

$$\big(\|\widetilde{F}_K(\cdot)\|_X\big)_{K\in\mathbb{N}}$$

elementare und somit Lebesgue-integrierbare Funktionen

$$\int_{\mathscr{T}} \|\widetilde{F}_K(t)\|_X \,\mathrm{d}\lambda(t) < \infty;$$

das obige Hilfsresultat sichert zudem, daß die Funktion

$$\left\|F(\cdot)\right\|_X : \mathscr{T} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \left\|F(t)\right\|_X$$

Lebesgue-meßbar ist. Die Beschränktheit des Lebesgue-Integrales folgt mittels der Abschätzung (für $K \in \mathbb{N}$, Dreiecksungleichung, Beschränktheit des zweiten Summanden folgt aus Bochner-Integrierbarkeit)

$$\int_{\mathscr{T}} \left\|F(t)\right\|_X \mathrm{d}\lambda(t) \leq \int_{\mathscr{T}} \|\widetilde{F}_K(t)\|_X \,\mathrm{d}\lambda(t) + \int_{\mathscr{T}} \|F(t) - \widetilde{F}_K(t)\|_X \,\mathrm{d}\lambda(t).$$

(b) Siehe Růžička (2004). ◇

(iv) *Folgerung.* Für eine Bochner-integrierbare Funktion $F : \mathscr{T} \to X$ gelten folgende Relationen (für $F^* \in X^*$)

$$\Big\| \int_{\mathscr{T}} F(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) \Big\|_X \leq \int_{\mathscr{T}} \big\| F(t) \big\|_X \,\mathrm{d}\lambda(t)\,,$$
$$F^*\Big(\int_{\mathscr{T}} F(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) \Big) = \int_{\mathscr{T}} F^*\big(F(t)\big)\,\mathrm{d}\lambda(t)\,.$$

Erklärung. Mittels einer approximierenden Folge von elementaren Funktionen folgt die Abschätzung (Stetigkeit der Norm, angegebene Abschätzung für elementare Funktionen, Dreiecksungleichung, zweiter Summand ist Null)

$$\begin{aligned}
\Big\| \int_{\mathscr{T}} F(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) \Big\|_X &= \Big\| \lim_{K\to\infty} \int_{\mathscr{T}} \widetilde{F}_K(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) \Big\|_X \\
&= \lim_{K\to\infty} \Big\| \int_{\mathscr{T}} \widetilde{F}_K(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) \Big\|_X \\
&\leq \lim_{K\to\infty} \int_{\mathscr{T}} \big\| \widetilde{F}_K(t) \big\|_X \,\mathrm{d}\lambda(t) \\
&= \lim_{K\to\infty} \int_{\mathscr{T}} \big\| F(t) + \widetilde{F}_K(t) - F(t) \big\|_X \,\mathrm{d}\lambda(t) \\
&\leq \int_{\mathscr{T}} \big\| F(t) \big\|_X \,\mathrm{d}\lambda(t) + \lim_{K\to\infty} \int_{\mathscr{T}} \big\| \widetilde{F}_K(t) - F(t) \big\|_X \,\mathrm{d}\lambda(t) \\
&= \int_{\mathscr{T}} \big\| F(t) \big\|_X \,\mathrm{d}\lambda(t)\,.
\end{aligned}$$

Die Herleitung der zweiten Relation ist in RŮŽIČKA (2004) zu finden. ◇

Erinnerung. Wie üblich bezeichnet $\mathscr{C}(\mathscr{T}, X)$ den Vektorraum aller auf $\mathscr{T}$ definierten stetigen Funktionen mit Werten in X; ein Element $F \in \mathscr{C}(\mathscr{T}, X)$ erfüllt somit die Bedingung

$$\forall\, t \in \mathscr{T} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, \widetilde{t} \in \mathscr{T} \ \text{ mit } \big|\widetilde{t} - t\big| < \delta : \qquad \big\| F(\widetilde{t}) - F(t) \big\|_X < \varepsilon\,.$$

Bochner-Integral als Limes von Riemann-Summen. Im Spezialfall eines auf einem abgeschlossenen Intervall $\mathscr{T} = [0, T]$ definierten stetigen und somit auch gleichmäßig stetigen Integranden

$$F \in \mathscr{C}\big([0,T], X\big)$$

ist die durch die Norm definierte Funktion ebenfalls gleichmäßig stetig

$$\big\| F(\cdot) \big\|_X \in \mathscr{C}\big([0,T], \mathbb{R}\big)$$

und insbesondere Lebesgue-integrierbar; das Bochner-Integral

$$\int_0^T F(t)\,\mathrm{d}\lambda(t)$$

existiert somit und kann mittels Riemann-Summen approximiert werden. Betrachtet man nämlich elementare Funktionen der folgenden Form (Wahl von Zerlegungen und Stützstellen, Interpolation durch stückweise konstante Funktionen, gleichmäßige Konvergenz)

$$J_K \in \mathbb{N}\,, \qquad 0 = t_0^{(K)} < t_1^{(K)} < \cdots < t_{J_K}^{(K)} = T\,, \qquad \lim_{K\to\infty} \sup_{j\in\{0,1,\dots,J_K-1\}} \big(t_{j+1}^{(K)} - t_j^{(K)}\big) = 0\,,$$
$$\xi_j^{(K)} \in \big[\,t_j^{(K)}, t_{j+1}^{(K)}\big]\,, \qquad j \in \big\{0,1,\dots,J_K-1\big\}\,,$$
$$\widetilde{F}_K : [0,T] \longrightarrow X : t \longmapsto \sum_{j=0}^{J_K-1} F\big(\xi_j^{(K)}\big)\,\chi_{[t_j^{(K)},t_{j+1}^{(K)}]}(t)\,,$$
$$\forall\, t \in [0,T]: \qquad \lim_{K\to\infty} \widetilde{F}_K(t) = F(t)\,,$$

ergibt sich das Bochner-Integral als Limes der zugehörigen Riemann-Summen

$$\int_0^T F(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) = \lim_{K\to\infty}\int_0^T \widetilde{F}_K(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) = \lim_{K\to\infty}\sum_{j=0}^{J_K-1} F\big(\xi_j^{(K)}\big)\big(t_{j+1}^{(K)} - t_j^{(K)}\big)\,.$$

1.2 Bochner–Lebesgue-Räume

Vorbemerkung. Die Erweiterung der Lebesgue-Räume auf Funktionen mit Werten in Banach-Räumen führt auf die Bochner–Lebesgue-Räume. Aufgrund des engen Zusammenhanges zwischen Bochner-Integral und Lebesgue-Integral lassen sich bekannte Resultate für reellwertige Funktionen auf vergleichsweise einfache Art und Weise übertragen; für Erklärungen sei auf RŮŽIČKA (2004) verwiesen.

Bochner–Lebesgue-Räume. Die Bochner–Lebesgue-Räume und die zugehörigen Normen sind wie folgt definiert (wobei $p \in [1,\infty)$, im Sinne von Äquivalenzklassen)

$$L^p\big(\mathscr{T},X\big) = \Big\{F : \mathscr{T} \to X \text{ Bochner-meßbar und } \int_{\mathscr{T}} \big\|F(t)\big\|_X^p \,\mathrm{d}\lambda(t) < \infty\Big\},$$

$$\big\|F\big\|_{L^p(\mathscr{T},X)} = \Big(\int_{\mathscr{T}} \big\|F(t)\big\|_X^p \,\mathrm{d}\lambda(t)\Big)^{1/p},$$

$$L^\infty\big(\mathscr{T},X\big) = \Big\{F : \mathscr{T} \to X \text{ Bochner-meßbar und } \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathscr{T}} \big\|F(t)\big\|_X < \infty\Big\},$$

$$\big\|F\big\|_{L^\infty(\mathscr{T},X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathscr{T}} \big\|F(t)\big\|_X .$$

Offensichtlich gilt also (wobei $p \in [1,\infty]$)

$$F \in L^p\big(\mathscr{T},X\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \big\|F(\cdot)\big\|_X \in L^p\big(\mathscr{T},\mathbb{R}\big).$$

Die Bochner–Lebesgue-Räume sind vollständig und bilden somit Banach-Räume; ist der zugrundeliegenden Raum ein Hilbert-Raum, so ergibt sich für $p = 2$ ein Hilbert-Raum (mit Funktionen $F, F_1, F_2 : \mathscr{T} \to H$)

$$\big(F_1\big|F_2\big)_{L^2(\mathscr{T},H)} = \int_{\mathscr{T}} \big(F_1(t)\big|F_2(t)\big)_H \,\mathrm{d}\lambda(t), \qquad \big\|F\big\|_{L^2(\mathscr{T},H)} = \sqrt{\int_{\mathscr{T}} \big\|F(t)\big\|_H^2 \,\mathrm{d}\lambda(t)}.$$

Für Exponenten $p \in [1,\infty)$ liegt die Menge der elementaren Funktionen dicht in $L^p(\mathscr{T},X)$; in diesem Fall sind die Bochner–Lebesgue-Räume insbesondere separabel.

Duale Paarung. Für $p \in [1,\infty]$ bezeichne $p^* \in [1,\infty]$ den konjugierten Exponenten (mit der Konvention $p^* = \infty$ für $p = 1$ und $p^* = 1$ für $p = \infty$)

$$\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{p^*} = 1, \qquad p^* = \tfrac{p}{p-1}.$$

Betrachtet man für zwei Funktionen die naheliegende Verknüpfung

$$F : \mathscr{T} \longrightarrow X : t \longmapsto F(t), \qquad G : \mathscr{T} \longrightarrow X^* : t \longmapsto G(t),$$

$$G(\cdot) \circ F(\cdot) : \mathscr{T} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \underbrace{\big(\underbrace{G(t)}_{\in X^*}\big)\big(\underbrace{F(t)}_{\in X}\big)}_{\in\mathbb{R}},$$

so ist dafür auch die Schreibweise als duale Paarung üblich (nicht mit dem Skalarprodukt zu verwechseln)

$$\big\langle G(\cdot)\big|F(\cdot)\big\rangle_{X^*\times X} = G(\cdot)\circ F(\cdot) : \mathscr{T} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \big\langle G(t)\big|F(t)\big\rangle_{X^*\times X} = \big(G(t)\big)(F(t)) .$$

Hölder-Ungleichung. Für $F \in L^p(\mathscr{T}, X)$ und $G \in L^{p^*}(\mathscr{T}, X^*)$ ist

$$\big\langle G(\cdot)\big|F(\cdot)\big\rangle_{X^*\times X} \in L^1\big(\mathscr{T},\mathbb{R}\big),$$

und es gilt die Abschätzung (verwende Dreiecksungleichung, Abschätzung für lineare Funktionale und Hölder-Ungleichung für reellwertige Funktionen)

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathscr{T}} \big\langle G(t)\big|F(t)\big\rangle_{X^*\times X}\,\mathrm{d}\lambda(t)\right| &\leq \int_{\mathscr{T}} \big|\big\langle G(t)\big|F(t)\big\rangle_{X^*\times X}\big|\,\mathrm{d}\lambda(t)\\
&\leq \int_{\mathscr{T}} \big\|G(t)\big\|_{X^*}\,\big\|F(t)\big\|_X\,\mathrm{d}\lambda(t)\\
&\leq \big\|G\big\|_{L^{p^*}(\mathscr{T},X^*)}\,\big\|F\big\|_{L^p(\mathscr{T},X)} .
\end{aligned}$$

Anwendung. Es bezeichne $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes räumliches Gebiet mit hinreichend glattem Rand und $\mathscr{T} = [0, T] \subset \mathbb{R}$ ein Zeitintervall; weiters sei $p \in [1,\infty)$. Bochner-Lebesgue Räume treten beispielsweise im Zusammenhang mit nichtlinearen Evolutionsgleichungen auf; dabei nützt man die Identifikation

$$L^p\big(\Omega\times[0,T],\mathbb{R}\big) = L^p\big([0,T],X\big), \qquad X = L^p(\Omega,\mathbb{R}) .$$

Genauer, betrachtet man eine Lösung einer zeitabhängigen partiellen Differentialgleichung und die zugehörige abstrakte Funktion

$$\begin{gathered}
U : \Omega\times[0,T] \longrightarrow \mathbb{R} : (x,t) \longmapsto U(x,t) ,\\
u : [0,T] \longrightarrow X : t \longmapsto u(t) = \big[x \mapsto U(x,t)\big] ,
\end{gathered}$$

so zeigt im Wesentlichen die Relation (verwende Satz von Fubini)

$$\begin{aligned}
\big\|U\big\|_{L^p(\Omega\times[0,T],\mathbb{R})} &= \left(\int_{\Omega\times[0,T]} \big|U(x,t)\big|^p\,\mathrm{d}(x,t)\right)^{1/p}\\
&= \left(\int_{[0,T]} \underbrace{\int_{\Omega} \big|U(x,t)\big|^p\,\mathrm{d}x}_{=\|U(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega,\mathbb{R})}=\|u(t)\|^p_{L^p(\Omega,\mathbb{R})}}\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\\
&= \left(\int_{[0,T]} \|u(t)\|^p_{L^p(\Omega,\mathbb{R})}\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\\
&= \big\|u\big\|_{L^p([0,T],L^p(\Omega,\mathbb{R}))} ,
\end{aligned}$$

daß die folgende Identifikation gerechtfertigt ist

$$L^p\big(\Omega\times[0,T],\mathbb{R}\big) = L^p\big([0,T],L^p(\Omega,\mathbb{R})\big);$$

zusätzliche Überlegungen zur Lebesgue-Meßbarkeit bzw. Bochner-Meßbarkeit sind in Růžička (2004) angegeben.

1.3 Fréchet-Ableitung

Erinnerung. Eine Funktion zwischen zwei Banach-Räumen

$$F : D(F) \subseteq X \longrightarrow Y$$

ist stetig, wenn folgende Bedingung erfüllt ist

$$\forall x \in D(F) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \widetilde{x} \in D(F) \text{ mit } \left\| \widetilde{x} - x \right\|_X < \delta : \qquad \left\| F(\widetilde{x}) - F(x) \right\|_Y < \varepsilon .$$

In diesem Sinne sind die Schreibweisen

$$\lim_{\|w\|_X \to 0} F(x+w) = F(x) , \qquad F(x+w) \overset{\|w\|_X \to 0}{\longrightarrow} F(x) ,$$

zu verstehen. Die Menge der stetigen Funktionen wird mit der Supremumsnorm versehen (fixiere Teilmenge $D \subseteq X$)

$$\mathscr{C}(D,Y) = \big\{ F : D \subseteq X \longrightarrow Y \text{ stetig} \big\} , \qquad \left\| F \right\|_{\mathscr{C}(D,Y)} = \sup_{x \in D} \left\| F(x) \right\|_Y .$$

Betrachtet man die bezüglich der Supremumsnorm beschränkten stetigen Funktion, so ergibt sich ein Banach-Raum

$$\mathscr{C}_b(D,Y) = \Big\{ F : D \subseteq X \longrightarrow Y \text{ stetig mit } \left\| F \right\|_{\mathscr{C}(D,Y)} < \infty \Big\} .$$

Insbesondere gilt im Fall einer kompakten Menge $D \subseteq X$ die Gleichheit

$$\mathscr{C}(D,Y) = \mathscr{C}_b(D,Y) .$$

Vorbemerkung. Im Folgenden werden die Gâteaux-Ableitung, welche durch Richtungsableitungen gegeben ist, sowie die Fréchet-Ableitung, welche der totalen Ableitung entspricht, eingeführt und in Zusammenhang gestellt.

Gâteaux-Ableitung. Eine Funktion zwischen Banach-Räumen

$$F : D(F) \subseteq X \longrightarrow Y$$

heißt Gâteaux-differenzierbar im Punkt $x \in D(F)$, falls für jedes Element $v \in X$ der Limes (Ableitung der Funktion $\xi \mapsto F(x + \xi v)$ in Null, Ableitung in Richtung v)

$$D_v F(x) = \lim_{\xi \to 0} \tfrac{1}{\xi} \big(F(x + \xi v) - F(x) \big)$$

existiert und die zugehörige Funktion linear und stetig ist

$$X \longrightarrow Y : v \longmapsto D_v F(x) ,$$

$$D_{v+\widetilde{v}} F(x) = D_v F(x) + D_{\widetilde{v}} F(x) , \quad \left\| D_v F(x) \right\|_Y \leq C \left\| v \right\|_X , \qquad v, \widetilde{v} \in X ;$$

diese Funktion wird dann als Gâteaux-Ableitung von F in x bezeichnet.

Bemerkungen.

(i) Wie üblich verwendet man die Notation

$$\lim_{\xi\to 0}\tfrac{1}{\xi}\big(F(x+\xi v)-F(x)-D_vF(x)\,\xi\big)=0\,,$$
$$F(x+\xi v)=F(x)+D_vF(x)\,\xi+o(\xi)\,.$$

(ii) Aus der Existenz der Richtungsableitung in einem Punkt folgt insbesondere auch die Stetigkeit in diesem Punkt

$$\lim_{\xi\to 0}F(x+\xi v)=F(x)\,,$$

denn es gilt die Implikation

$$\begin{aligned}&D_vF(x)=\lim_{\xi\to 0}\tfrac{1}{\xi}\big(F(x+\xi v)-F(x)\big)\in Y\\ \Longrightarrow\qquad&\lim_{\xi\to 0}\big(F(x+\xi v)-F(x)\big)=\lim_{\xi\to 0}\xi\,\tfrac{1}{\xi}\big(F(x+\xi v)-F(x)\big)=0\cdot D_vF(x)=0\,.\end{aligned}$$

(iii) Für jedes Element des Dualraumes gilt die Identität (wegen Stetigkeit von $y^*\in Y^*$ ist Vertauschen von Funktionsauswertung und Limes zulässig)

$$\begin{aligned}y^*\big(D_vF(x)\big)&=y^*\Big(\lim_{\xi\to 0}\tfrac{1}{\xi}\big(F(x+\xi v)-F(x)\big)\Big)\\&=\lim_{\xi\to 0}\tfrac{1}{\xi}\Big(y^*\big(F(x+\xi v)\big)-y^*\big(F(x)\big)\Big)\\&=\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\Big|_{\xi=0}y^*\big(F(x+\xi v)\big)\,;\end{aligned}$$

verwendet man die Schreibweise als duale Paarung, ergibt sich somit die Relation

$$\big\langle y^*\big|D_vF(x)\big\rangle_{Y^*\times Y}=\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\Big|_{\xi=0}\big\langle y^*\big|F(x+\xi v)\big\rangle_{Y^*\times Y}\,.$$

Mittelwertsatz. Für eine Gâteaux-differenzierbare Funktion $F:D(F)\subseteq X\to Y$ gilt die Relation (wobei $x\in D(F)$ und $v\in X$)

$$F(x+v)=F(x)+\int_0^1 D_vF(x+\xi v)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Funktion

$$[0,1]\longrightarrow Y:\xi\longmapsto D_vF(x+\xi v)$$

stetig ist, ist das auftretende Bochner-Integral wohldefiniert und ergibt sich als Grenzwert von Riemann-Summen, vgl. obige Bemerkung.

Erklärung. Für eine differenzierbare reellwertige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt die Relation (Mittelwertsatz)

$$f(1) = f(0) + f(\xi)\Big|_{\xi=0}^{1} = f(0) + \int_0^1 f'(\xi)\, \mathrm{d}\xi\,.$$

Betrachtet man speziell die Funktion (mit $y^* \in Y^*$ beliebig)

$$f(\xi) = \big\langle y^* \big| F(x+\xi v)\big\rangle_{Y^*\times Y}\,,$$

welche nach Voraussetzung differenzierbar ist mit Ableitung

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \lim_{\eta\to 0} \tfrac{1}{\eta}\big(f(\xi+\eta) - f(\eta)\big) \\ &= \Big\langle y^* \Big| \lim_{\eta\to 0} \tfrac{1}{\eta}\big(F(x+\xi v+\eta v) - F(x+\xi v)\big)\Big\rangle_{Y^*\times Y} \\ &= \big\langle y^* \big| D_v F(x+\xi v)\big\rangle_{Y^*\times Y}\,, \end{aligned}$$

erhält man die Identität

$$f(1) = f(0) + \int_0^1 f'(\xi)\, \mathrm{d}\xi\,,$$

$$\big\langle y^* \big| F(x+v)\big\rangle_{Y^*\times Y} = \big\langle y^* \big| F(x)\big\rangle_{Y^*\times Y} + \int_0^1 \big\langle y^* \big| D_v F(x+\xi v)\big\rangle_{Y^*\times Y}\, \mathrm{d}\xi\,.$$

Eine Folgerung des Satzes von Hahn–Banach[4] zeigt

$$F(x+v) = F(x) + \int_0^1 D_v F(x+\xi v)\, \mathrm{d}\xi\,,$$

was die Behauptung ist. $\diamond$

Fréchet-Ableitung. Eine Funktion $F : D(F) \subseteq X \to Y$ zwischen Banach-Räumen heißt Fréchet-differenzierbar im Punkt $x \in D(F)$, wenn eine stetige lineare Funktion

$$F'(x) : X \longrightarrow Y : w \longmapsto F'(x)\, w$$

existiert, welche die folgende Relation erfüllt (für jedes $w \in X$)

$$F(x+w) = F(x) + F'(x)\, w + o\big(\|w\|_X\big)\,;$$

diese Funktion wird dann als Fréchet-Ableitung von F in x bezeichnet. Ist die zugehörige Funktion

$$F' : D(F) \subseteq X \longrightarrow L(X,Y) = \big\{A : X \to Y \text{ linear und stetig}\big\} : x \longmapsto F'(x)$$

stetig, so heißt F stetig differenzierbar.

[4] *Folgerung des Satzes von Hahn–Banach.* Es sei $x \in X$ ein Element eines Banach-Raumes und $M^* \subseteq X^*$ eine dichte Teilmenge des Dualraumes. Dann gilt die Implikation

$$\big(\forall x^* \in M^* : \quad x^*(x) = 0\big) \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0\,.$$

Bemerkungen.

(i) Ähnlich wie zuvor zeigt man, daß eine Fréchet-differenzierbare Funktion insbesondere stetig ist.

(ii) Aus der speziellen Wahl $w = \xi v$ (für beliebiges $v \in X$ und $\xi \in \mathbb{R}$)

$$\tfrac{1}{\xi}\big(F(x+\xi v) - F(x)\big) = \tfrac{1}{\xi}\big(F'(x)\,(\xi v) + o\big(\|\xi v\|_X\big) = F'(x)\,v + \tfrac{1}{\xi}\,o\big(\|\xi v\|_X\big)\,,$$
$$D_v F(x) = \lim_{\xi\to 0}\tfrac{1}{\xi}\big(F(x+\xi v) - F(x)\big) = F'(x)\,v\,,$$

folgt, daß eine Fréchet-differenzierbare Funktion insbesondere Gâteaux-differenzierbar ist und der folgende Zusammenhang gilt

$$D_v F(x) = F'(x)\,v.$$

(iii) Man beachte, daß die Gâteaux-Ableitung $D_w F(x)$ einer Funktion $F : D(F) \subseteq X \to Y$ bezüglich w linear und stetig ist (wobei $x \in D(F)$ und $w, \widetilde{w} \in X$ sowie $c \in \mathbb{R}$, mit $C > 0$)

$$D_{w+\widetilde{w}} F(x) = D_w F(x) + D_{\widetilde{w}} F(x)\,, \qquad D_{cw} F(x) = c\,D_w F(x)\,,$$
$$\big\|D_w F(x)\big\|_Y \leq C\,\big\|w\big\|_X\,.$$

Führt die Gâteaux-Ableitung zudem auf eine bezüglich x stetige Funktion, so ist F Fréchet-differenzierbar und die Fréchet-Ableitung gegeben durch

$$F'(x)\,w = D_w F(x)\,.$$

Erklärung. Betrachtet man die Funktion (nach Voraussetzung ist F Gâteaux-differenzierbar, und somit ist G differenzierbar)

$$G : [0,1] \longrightarrow Y : \xi \longmapsto F(x+\xi w)\,, \qquad G(0) = F(x)\,, \qquad G(1) = F(x+w)\,,$$
$$G' : [0,1] \longrightarrow Y : \xi \longmapsto D_w F(x+\xi w)\,, \qquad G'(0) = D_w F(x)\,,$$

so erhält man mit Hilfe des Mittelwertsatzes die Identitäten

$$G(1) - G(0) = F(x+w) - F(x) = \int_0^1 D_w F(x+\xi w)\,\mathrm{d}\xi\,,$$
$$G(1) - G(0) - G'(0) = F(x+w) - F(x) - D_w F(x) = \int_0^1 \big(D_w F(x+\xi w) - D_w F(x)\big)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Es bleibt zu zeigen, daß die Relation

$$F(x+w) = F(x) + D_w F(x) + o\big(\|w\|_X\big)$$

gültig ist; daraus ergibt sich außerdem die Gleichheit

$$F'(x)\,w = D_w F(x)\,.$$

Die Annahme, daß die Gâteaux-Ableitung stetig bezüglich x ist, stellt sicher, daß die rechte Seite gegen Null konvergiert; wegen der Linearität und mittels des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung folgt sogar (unter Annahme $w \neq 0$ bezeichne $v = \frac{w}{\|w\|_X}$, stetiger Integrand $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Dreiecksungleichung, Substitution $\widetilde{\xi} = \|w\|_X \, \xi$)

$$\begin{aligned}
&D_w F(x + \xi w) - D_w F(x) = D_{\|w\|_X v} F(x + \xi w) - D_{\|w\|_X v} F(x) \\
&\qquad = \|w\|_X \big(D_v F(x + \xi w) - D_v F(x) \big) , \\
&\lim_{\delta \to 0} \tfrac{1}{\delta} \int_0^\delta g(\widetilde{\xi}) \, \mathrm{d}\widetilde{\xi} = g(0) , \\
&\tfrac{1}{\|w\|_X} \left\| \int_0^1 \big(D_w F(x + \xi w) - D_w F(x) \big) \, \mathrm{d}\xi \right\|_Y \leq \tfrac{1}{\|w\|_X} \int_0^1 \big\| D_w F(x + \xi w) - D_w F(x) \big\|_Y \, \mathrm{d}\xi \\
&\qquad = \int_0^1 \big\| D_v F(x + \xi w) - D_v F(x) \big\|_Y \, \mathrm{d}\xi \\
&\qquad = \tfrac{1}{\|w\|_X} \int_0^{\|w\|_X} \big\| D_v F(x + \widetilde{\xi} v) - D_v F(x) \big\|_Y \, \mathrm{d}\widetilde{\xi} \xrightarrow{\|w\|_X \to 0} 0 .
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Existenz der Fréchet-Ableitung sowie den gewünschten Zusammenhang mit der Gâteaux-Ableitung. ◇

Ergänzungen. Die Kettenregel, höhere Ableitungen und die Taylor-Formel werden in RŮŽIČKA (2004) behandelt; dort sind auch Resultate zu implizit definierten Funktionen und zur inversen Funktion angegeben, deren Herleitung auf dem Fixpunktsatz von Banach beruht.

Kapitel 2

Grundlegende Resultate zu Fixpunkten

Inhalt. Im Rahmen der Funktionalanalysis sind grundlegende Resultate zur Existenz von Fixpunkten ein wesentliches Mittel zur Behandlung von nichtlinearen Problemen. Die bekannten Fixpunktsätze unterscheiden sich in Hinblick auf die Forderungen an den zugrundeliegenden Raum und den betrachteten nichtlinearen Operator. Im Folgenden werden

- der Fixpunktsatz von Banach für abgeschlossene Teilmengen vollständiger metrischer Räume und kontraktive Selbstabbildungen (Existenz, Eindeutigkeit),
- der Fixpunktsatz von Brouwer für abgeschlossene Kugeln in euklidischen Räumen und stetige Selbstabbildungen (Existenz) und
- der Fixpunktsatz von Schauder für konvexe, kompakte Teilmengen von Banach-Räumen und stetige Selbstabbildungen (Existenz)

behandelt.

2.1 Fixpunktgleichungen

Nichtlinearer Operator. Eine nichtlineare Funktion zwischen normierten Räumen oder allgemeiner zwischen Vektorräumen wird als nichtlinearer Operator bezeichnet. In Hinblick auf zahlreichen Anwendungen ist es sinnvoll anzunehmen, daß der betrachtete Definitionsbereich ein Unterraum des zugrundeliegenden Raumes ist

$$A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X : x \longmapsto A(x)\,.$$

Im Rahmen der nichtlinearen Funktionalanalysis ist die formal lineare Notation

$$A\,x$$

üblich; um die Unterschiede zwischen linearen und nichtlinearen Operatoren deutlich zu machen, wird auf diese vereinfachende Schreibweise jedoch verzichtet.

Fixpunkt. Es sei $A : D(A) \subseteq X \to X$ ein nichtlinearer Operator. Ein Element $x_* \in D(A)$ mit der Eigenschaft (Fixpunktgleichung)

$$A(x_*) = x_*$$

heißt ein Fixpunkt von A; offensichtlich gilt $A(x_*) \in D(A)$.

Gegenbeispiele (Existenz, Eindeutigkeit).

(i) Betrachtet man als zugrundeliegenden Raum den d-dimensionalen euklidischen Raum und als linearen Operator die Translation um $0 \neq x_0 \in \mathbb{R}^d$, so ist offensichtlich, daß die Fixpunktgleichung keine Lösung besitzt

$$A : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d : x \longmapsto x + x_0\,,$$
$$x_* + x_0 = A(x_*) = x_* \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \neq x_0 = 0\,. \quad \lightning$$

(ii) Die Betrachtung einer elementaren quadratischen Gleichung zeigt, daß die Lösung einer Fixpunktgleichung im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist (wobei $a \in \mathbb{R}$)

$$A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2 + x - a^2\,,$$
$$x_*^2 + x_* - a^2 = A(x_*) = x_* \quad \Longleftrightarrow \quad (x_* + a)\,(x_* - a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_* \in \{-a, a\}\,.$$

Anwendungen.

(i) *Nichtlineares Gleichungssystem.* Die Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystemes entspricht der Bestimmung von Nullstellen und bei geeigneter Umformulierung der Lösung einer Fixpunktgleichung (mit $F : D(F) \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ und $A : D(A) = D(F) \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$)

$$F(x_*) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A(x_*) = x_*\,.$$

Im einfachsten Fall ist der zugehörige Fixpunktoperator durch

$$A(x) = x - F(x)$$

oder etwas allgemeiner durch (mit $\omega > 0$, lineare Relaxation)

$$A(x) = x - \omega\, F(x)$$

gegeben; unter der zusätzlichen Bedingung, daß die Ableitung wohldefiniert und lokal invertierbar ist, ergibt sich für

$$A(x) = x - \big(F'(x)\big)^{-1} F(x)$$

das Newton-Verfahren.

(ii) *Nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung.* Die Lösung eines Anfangswertproblemes der Form (vorgegebene definierende Funktion $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ und vorgegebener Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}^d$, gesuchte Lösung $y : [0,T] \to \mathbb{R}^d$, unter einer lokalen Lipschitz-Bedingung an die definierende Funktion ist die lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung sichergestellt)

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(y(t)\big)\,, & t \in (0,T)\,, \\ y(0) = y_0\,, \end{cases}$$

erfüllt die Integralgleichung

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f\big(y(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad t \in [0,T]\,;$$

dies entspricht dem Fixpunktoperator (geeignete Wahl der zugrundeliegenden Funktionenräume, etwa $X = \mathscr{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$)

$$A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X : x \longmapsto \left[t \mapsto y_0 + \int_0^t f\big(x(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau \right].$$

(iii) *Nichtlineare Evolutionsgleichung.* Die abstrakte Formulierung einer zeitabhängigen nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen führt auf eine nichtlineare Evolutionsgleichung; in vielen Fällen kann angenommen werden, daß der zugrundeligende Funktionenraum einen Banach-Raum bildet. Ähnliche Überlegungen wie zuvor gelten für ein abstraktes Anfangswertproblem (mit Banach-Raum-wertiger Lösung $u : [0,T] \to X$)

$$\begin{cases} u'(t) = f\big(u(t)\big)\,, & t \in (0,T)\,, \\ u(0) = u_0\,, \end{cases}$$

mit zugehöriger Integralgleichung

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f\big(u(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad t \in [0,T]\,;$$

man beachte, daß die Ableitung als Limes (einfacher Spezialfall, wo Gâteaux-Ableitung und Fréchet-Ableitung übereinstimmen)

$$u'(t) = \lim_{\tau \to 0} \tfrac{1}{\tau} \big(u(t+\tau) - u(t) \big)$$

und das Integral als Bochner-Integral erklärt ist.

(iv) *Nichtlineare partielle Differentialgleichung.* Die Lösung der folgenden zeitunabhängigen nichtlinearen partiellen Differentialgleichung unter homogenen Dirichlet-Randbedingungen (definierende Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gesuchte Lösung $w : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, klassische Notation, übliche Schreibweise insbesondere im Zusammenhang mit schwachen Formulierungen)

$$\begin{cases} \Delta w(x) + g\big(w(x)\big) = 0\,, & x \in \Omega\,, \\ w(x) = 0\,, & x \in \partial\Omega\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta w + g(w) = 0 & \text{in } \Omega\,, \\ w = 0 & \text{auf } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

erfüllt die Fixpunktgleichung (setze beispielsweise $\Omega = [0,1]^d$, negativer Laplace-Operator unter homogenen Dirichlet-Randbedingungen ist positiv und somit invertierbar)

$$\big(-\Delta\big)^{-1} g(w) = w\,;$$

die geforderten Regularitätseigenschaften an die Lösung sowie die homogenen Dirichlet-Randbedingungen beeinflussen die Wahl des zugrundeliegenden Funktionenraumes. Man beachte, daß die Lösung des obigen Randwertproblemes der stationären Lösung der folgenden zeitabhängigen nichtlinearen partiellen Differentialgleichung unter homogenen Dirichlet-Randbedingungen entspricht

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + g(u) & \text{in } \Omega \times (0,T)\,, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T)\,. \end{cases}$$

2.2 Fixpunktsatz von Banach

Vorbemerkung. Der Fixpunktsatz von Banach ist ein theoretisches Hilfsmittel, welches die Existenz und Eindeutigkeit von Fixpunkten sicherstellt. Der konstruktive Zugang mittels Iterationsverfahren ist außerdem bedeutsam für die Berechnung von Näherungslösungen. Die im Folgenden für einen Banach-Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ angegebenen Überlegungen gelten allgemeiner für einen vollständigen metrischen Raum (X,d); die Relation $\|x-\widetilde{x}\|_X$ ist dabei durch $d(x,\widetilde{x})$ zu ersetzen. Da der Fixpunktsatz von Banach üblicherweise im Rahmen grundlegender Lehrveranstaltungen behandelt wird, wird auf detailierte Beweise verzichtet.

Kontraktion. Ein auf einer Teilmenge $M \subseteq X$ eines normierten Raumes definierter selbstabbildender Operator $A : M \to M$ heißt eine Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $\kappa \in (0,1)$, wenn die Bedingung

$$\forall x, \widetilde{x} \in M: \qquad \big\|A(x) - A(\widetilde{x})\big\|_X \leq \kappa \, \big\|x - \widetilde{x}\big\|_X$$

erfüllt ist.

Bemerkung. Eine Kontraktion $A : M \to M$ mit Kontraktionsfaktor $\kappa \in (0,1)$ ist insbesondere stetig, denn es gilt die Relation (mit $\varepsilon > 0$)

$$\big\|x - \widetilde{x}\big\|_X < \delta = \tfrac{\varepsilon}{\kappa} \quad \Longrightarrow \quad \big\|A(x) - A(\widetilde{x})\big\|_X \leq \kappa \, \big\|x - \widetilde{x}\big\|_X < \varepsilon\,.$$

Fixpunktsatz von Banach. Es bezeichne $\emptyset \neq M \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge eines Banach-Raumes, und es sei $A : M \to M$ eine Kontraktion mit Kontaktionsfaktor $\kappa \in (0,1)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Fixpunkt

$$A(x_*) = x_*\,,$$

welcher sich für beliebige Startwerte $x_0 \in M$ als Limes der durch die Iteration

$$x_{n+1} = A(x_n)\,, \qquad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

definierten Folge in M ergibt

$$x_* = \lim_{n\to\infty} x_n \in M\,.$$

Die Relation

$$\big\|x_n - x_*\big\|_X \leq \kappa \, \big\|x_{n-1} - x_*\big\|_X\,, \qquad n \in \mathbb{N},$$

impliziert lineare Konvergenz des Iterationsverfahrens; weiters gelten die a-priori-Abschätzung

$$\big\|x_n - x_*\big\|_X \leq \tfrac{\kappa^n}{1-\kappa} \, \big\|x_1 - x_0\big\|_X\,, \quad n \in \mathbb{N},$$

sowie die a-posteriori-Abschätzung

$$\big\|x_n - x_*\big\|_X \leq \tfrac{\kappa}{1-\kappa} \, \big\|x_n - x_{n-1}\big\|_X\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Erklärung.

(i) *Existenz.* Aufgrund der Kontraktivität des Operators folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left\|x_{n+1}-x_n\right\|_X &= \left\|A(x_n)-A(x_{n-1})\right\|_X\\ &\leq \kappa \left\|x_n-x_{n-1}\right\|_X\\ &\leq \kappa^2 \left\|x_{n-1}-x_{n-2}\right\|_X\\ &\leq \dots\\ &\leq \kappa^n \left\|x_1-x_0\right\|_X ;\end{aligned}$$

zusammen mit der Dreiecksungleichung und der geometrischen Reihe zeigt dies, daß die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge in M bildet

$$\begin{aligned}\left\|x_{n+k}-x_n\right\|_X &\leq \left\|x_{n+k}-x_{n+k-1}\right\|_X + \cdots + \left\|x_{n+1}-x_n\right\|_X\\ &\leq \kappa^{n+k-1} \left\|x_1-x_0\right\|_X + \cdots + \kappa^n \left\|x_1-x_0\right\|_X\\ &\leq \kappa^n \sum_{j=0}^{k-1} \kappa^j \left\|x_1-x_0\right\|_X\\ &\leq \tfrac{\kappa^n}{1-\kappa} \left\|x_1-x_0\right\|_X \xrightarrow{n\to\infty} 0 .\end{aligned}$$

Wegen der Abgeschlossenheit von M und der Stetigkeit des Operators ist der Limes der gesuchte Fixpunkt, denn

$$\begin{gathered} x_* = \lim_{n\to\infty} x_n \in M ,\\ A(x_*) = A\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) = \lim_{n\to\infty} A(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_* .\end{gathered}$$

(ii) *Eindeutigkeit.* Die Eindeutigkeit des Fixpunktes zeigt man mit Hilfe der Relationen

$$\begin{gathered} x_* = A(x_*) , \qquad \widetilde{x}_* = A(\widetilde{x}_*) ,\\ \left\|x_*-\widetilde{x}_*\right\|_X = \left\|A(x_*)-A(\widetilde{x}_*)\right\|_X \leq \kappa \left\|x_*-\widetilde{x}_*\right\|_X ,\\ 0 \leq (1-\kappa) \left\|x_*-\widetilde{x}_*\right\|_X \leq 0 ,\\ \left\|x_*-\widetilde{x}_*\right\|_X = 0 ,\\ \widetilde{x}_* = x_* .\end{gathered}$$

(iii) *Abschätzungen.* Die angegebenen Abschätzungen folgen aus der Kontraktionseigenschaft, etwa

$$\left\|x_n-x_*\right\|_X = \left\|A(x_{n-1})-A(x_*)\right\|_X \leq \kappa \left\|x_{n-1}-x_*\right\|_X .$$

Insgesamt zeigt dies das gewünschte Resultat. ◇

Gegenbeispiele. Wie die folgenden Gegenbeispiele zeigen sind alle Voraussetzungen wesentlich.

(i) Eine auf der leeren Menge definierte Funktion

$$A : \emptyset \longrightarrow \emptyset$$

besitzt keinen Fixpunkt.

(ii) Ist eine Funktion zwischen zwei Mengen mit leerem Durchschnitt definiert, etwa

$$A : [0,1] \longrightarrow [2,3]\,,$$

so existiert kein Fixpunkt.

(iii) Ist die Menge nicht abgeschlossen, so existiert nicht notwendigerweise ein Fixpunkt. Etwa für die Funktion

$$A : M = (0,1) \longrightarrow M : x \longmapsto \tfrac{1}{2}\,x$$

wäre der Limes der Iteration $x_* = 0$; es gilt jedoch $x_* \notin M$.

(iv) Ein Fixpunkt der Funktion

$$A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \tfrac{\pi}{2} + x - \arctan(x)\,,$$

müßte die Relation

$$A(x_*) = x_* \quad \Longleftrightarrow \quad \arctan(x_*) = \tfrac{\pi}{2} \quad \lightning$$

erfüllen. Es gelten die Relationen

$$\begin{gathered}
A' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 1 - \tfrac{1}{1+x^2}\,, \\
\forall x \in \mathbb{R}: \quad \big|A'(x)\big| < 1\,, \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} \big|A'(x)\big| = 1\,, \\
A(x) - A(\widetilde{x}) = A\big(\xi x + (1-\xi)\,\widetilde{x}\big)\Big|_{\xi=0}^{1} = \int_0^1 A'\big(\xi x + (1-\xi)\,\widetilde{x}\big)\,\big(x - \widetilde{x}\big)\,\mathrm{d}\xi\,, \\
\big|A(x) - A(\widetilde{x})\big| < \big|x - \widetilde{x}\big|\,,
\end{gathered}$$

die Funktion ist jedoch keine Kontraktion im obigen Sinne.

Folgerung. In Hinblick auf Anwendungen ist die folgende Erweiterung des Fixpunktsatzes von Banach wesentlich. Betrachtet wird eine Familie von Operatoren (mit metrischem oder normiertem Raum als Parameterraum)

$$A_p : M \longrightarrow M\,, \qquad p \in P\,,$$

welche die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach und insbesondere die Kontraktionseigenschaft erfüllen (mit Kontraktionsfaktor unabhängig von $p \in P$)

$$\exists\, \kappa \in (0,1) \quad \forall p \in P \quad \forall x, \widetilde{x} \in M: \qquad \big\|A_p(x) - A_p(\widetilde{x})\big\|_X \le \kappa\, \big\|x - \widetilde{x}\big\|_X\,.$$

Für jedes Element $p \in P$ ist somit die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes sichergestellt

$$\forall p \in P \quad \exists x_{*,p} \in M: \qquad x_{*,p} = A_p(x_{*,p})\,.$$

Unter der zusätzlichen Forderung

$$\exists \widetilde{p} \in P \quad \forall x \in M: \qquad \big\| A_p(x) - A_{\widetilde{p}}(x) \big\|_X \xrightarrow{p \to \widetilde{p}} 0$$

ergibt sich die Abschätzung (Dreiecksungleichung, Kontraktivität von A_p)

$$\begin{aligned}
\big\| x_{*,p} - x_{*,\widetilde{p}} \big\|_X &= \big\| A_p(x_{*,p}) - A_{\widetilde{p}}(x_{*,\widetilde{p}}) \big\|_X \\
&\leq \big\| A_p(x_{*,p}) - A_p(x_{*,\widetilde{p}}) \big\|_X + \big\| A_p(x_{*,\widetilde{p}}) - A_{\widetilde{p}}(x_{*,\widetilde{p}}) \big\|_X \\
&\leq \kappa \, \big\| x_{*,p} - x_{*,\widetilde{p}} \big\|_X + \big\| A_p(x_{*,\widetilde{p}}) - A_{\widetilde{p}}(x_{*,\widetilde{p}}) \big\|_X\,, \\
(1-\kappa) \, \big\| x_{*,p} - x_{*,\widetilde{p}} \big\|_X &\leq \big\| A_p(x_{*,\widetilde{p}}) - A_{\widetilde{p}}(x_{*,\widetilde{p}}) \big\|_X\,, \\
\big\| x_{*,p} - x_{*,\widetilde{p}} \big\|_X &\leq \tfrac{1}{1-\kappa} \, \big\| A_p(x_{*,\widetilde{p}}) - A_{\widetilde{p}}(x_{*,\widetilde{p}}) \big\|_X \xrightarrow{p \to \widetilde{p}} 0\,,
\end{aligned}$$

was die folgende Relation zeigt

$$\big\| x_{*,p} - x_{*,\widetilde{p}} \big\|_X \xrightarrow{p \to \widetilde{p}} 0\,.$$

Newton-Verfahren. Ein iteratives Verfahren mit wesentlich besseren Konvergenzeigenschaften als die zuvor angegebene Fixpunktiteration für Kontraktionen ist das Newton-Verfahren (mit zumindest Fréchet-differenzierbarer Funktion)

$$F: X \longrightarrow X\,, \qquad x_{n+1} = x_n - \big(F'(x_n)\big)^{-1} F(x_n)\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,;$$

es entspricht dem Fixpunktoperator

$$\begin{gathered}
A: X \longrightarrow X: x \longmapsto x - \big(F'(x)\big)^{-1} F(x)\,, \\
A(x_*) = x_* \qquad \Longleftrightarrow \qquad F(x_*) = 0\,.
\end{gathered}$$

Unter stärkeren Regularitätsvoraussetzungen ist für *geeignet gewählte* Startwerte quadratische Konvergenz sichergestellt (mit Konstante $C > 0$)

$$\big\| x_n - x_* \big\|_X \leq C \, \big\| x_{n-1} - x_* \big\|_X^2\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Nichtlineare Evolutionsgleichungen (Picard–Lindelöf). Im Zusammenhang mit nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen und allgemeiner nichtlinearen Evolutionsgleichungen wird der Fixpunktsatz von Banach verwendet, um die lokale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines abstraktes Anfangswertproblemes (mit $u: [0,T] \to X$)

$$\begin{cases}
u'(t) = f\big(u(t)\big)\,, & t \in (0,T)\,, \\
u(0) = u_0\,,
\end{cases}$$

nachzuweisen. Die Formulierung als Integralgleichung entspricht einer Fixpunktgleichung für einen vom Startwert abhängigen Fixpunkt-Operator

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f\big(u(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad t \in [0,T]\,,$$
$$A_{u_0} : D(A) \subseteq \mathscr{X} \longrightarrow \mathscr{X} : x \longmapsto \left[t \mapsto u_0 + \int_0^t f\big(x(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau\right];$$

als zugrundeliegender Banach-Raum kann im einfachsten Fall $\mathscr{X} = \mathscr{C}\big([0,T],X\big)$ gewählt werden, vgl. RŮŽIČKA (2004). Im Spezialfall einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist dieses Resultat als Satz von Picard–Lindelöf bekannt.

2.3 Einfache Spezialfälle

Vorbemerkung. Die vergleichsweise einschränkende Kontraktionseigenschaft des Fixpunktoperators soll nun durch die schwächere Voraussetzung der Stetigkeit ersetzt werden; im Gegenzug benötigt man stärkere Voraussetzungen an den zugrundeliegenden Raum. Der Fixpunktsatz von Brouwer besagt, daß eine stetige Funktion, welche eine abgeschlossene Kugel auf sich selbst abbildet, einen Fixpunkt besitzt. Die folgenden Herleitungen für einfache Spezialfälle, auf einem abgeschlossenem Intervall oder einem abgeschlossenem Kreis definierte stetige selbstabbildende Funktionen (wobei $r > 0$)

$$A : M = [a,b] \longrightarrow M\,, \qquad A : M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq r\right\} \longrightarrow M\,,$$

werden an späterer Stelle mittels Methoden der Variationsrechnung verallgemeinert.

Fixpunktsatz für stetige reelle Funktionen. Für jede stetige selbstabbildende Funktion, welche auf einem abgeschlossenen Intervall definiert ist (insbesondere gelte $M \neq \emptyset$)

$$A : M = [a,b] \longrightarrow M\,,$$

sichert der Zwischenwertsatz die Existenz eines Fixpunktes

$$\exists\, x_* \in M : \qquad A(x_*) = x_*\,.$$

Erklärung. Die stetige Funktion (M_B bezeichne das durch Translation erhaltene Intervall)

$$B : M \longrightarrow M_B : x \longmapsto A(x) - x$$

erfüllt die Bedingungen (wegen $A(a) \in [a,b]$ gilt $B(a) \geq 0$, wegen $A(b) \in [a,b]$ gilt $B(b) \leq 0$)

$$B(a) \geq 0\,, \qquad B(b) \leq 0\,.$$

Mit Hilfe des Zwischenwertsatzes folgt die Existenz einer Nullstelle

$$\exists\, x_* \in M_B : \qquad B(x_*) = 0$$

und somit die Existenz eines Fixpunktes. ◇

Topologisches Resultat. Eine über einen Kreis gespannte Membran wird zerreißen, wenn man versucht, sie nur über den Rand des Kreises zu spannen. Dieses Anschauung entspricht der mathematischen Aussage, daß eine Funktion, welche einen abgeschlossenen Kreis auf dessen Rand abbildet, nicht stetig sein kann (wobei $r > 0$, euklidische Norm)

$$\nexists\, R : M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq r\right\} \longrightarrow \partial M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = r\right\} \text{ stetig}\,.$$

Die Beweise der Sätze von Brouwer und Schauder beruhen auf diesem topologischen Resultat, welches an späterer Stelle gezeigt wird. Mittels eines Widerspruchsbeweises ergibt sich daraus das folgende Fixpunktresultat.

Fixpunktsatz für stetige Funktionen auf Einheitskreis. Jede stetige Funktion, welche einen abgeschlossenen Kreis auf sich selbst abbildet (wobei $r > 0$, insbesondere gelte $M \neq \emptyset$)

$$A : M = \Big\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq r\Big\} \longrightarrow M\,,$$

besitzt einen Fixpunkt

$$\exists\, x_* \in M: \qquad A(x_*) = x_*\,.$$

Widerspruchsbeweis. Es reicht aus, den Fall $r = 1$ zu betrachten. Nimmt man an, daß eine stetige selbstabbildende Funktion des abgeschlossenen Einheitskreises keinen Fixpunkt besitzt

$$\forall\, x \in M: \qquad A(x) \neq x\,,$$

so ist für jedes Element $x \in M$ die Gerade durch die beiden Punkte $A(x)$ und x wohldefiniert

$$\Big\{x + \sigma\,\big(A(x) - x\big) : \sigma \in \mathbb{R}\Big\}\,.$$

Von den zwei Schnittpunkten mit dem Rand des Einheitskreises wird einer wie folgt ausgewählt (für ein Element des Kreisrandes $x \in \partial M$ gelte $R(x) = x$, wobei $d = A(x) - x$, vgl. Graphik auf Cover von RŮŽIČKA (2004))

$$\begin{gathered}
\big(x_1 + \sigma\, d_1\big)^2 + \big(x_2 + \sigma\, d_2\big)^2 = 1\,,\\
x_1^2 + 2\,\sigma\, x_1\, d_1 + \sigma^2 d_1^2 + x_2^2 + 2\,\sigma\, x_2\, d_2 + \sigma^2 d_2^2 = 1\,,\\
\sigma^2 + 2\,\tfrac{1}{\|d\|^2}\,\big(x\big|d\big)\,\sigma + \tfrac{1}{\|d\|^2}\,\big(\|x\|^2 - 1\big) = 0\,,
\end{gathered}$$

$$\sigma_0 = \begin{cases} \frac{1}{\|d\|^2}\Big(-\big(x\big|d\big) + \sqrt{\big(x\big|d\big)^2 - \big(\|x\|^2 - 1\big)\,\|d\|^2}\Big), & \text{falls } \big|\big(x\big|d\big)\big| = \big(x\big|d\big)\,,\\ \frac{1}{\|d\|^2}\Big(-\big(x\big|d\big) - \sqrt{\big(x\big|d\big)^2 - \big(\|x\|^2 - 1\big)\,\|d\|^2}\Big), & \text{falls } \big|\big(x\big|d\big)\big| = -\big(x\big|d\big)\,; \end{cases}$$

man beachte, daß für jedes Randelement die folgende Eigenschaft gilt

$$x \in \partial M: \qquad \sigma_0 = 0\,, \qquad R(x) = x\,.$$

Die obige Konstruktion führt auf eine stetige Funktion vom Einheitskreis auf dessen Rand

$$R : M = \Big\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\Big\} \longrightarrow \partial M = \Big\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\Big\} : x \longmapsto x + \sigma_0\,\big(A(x) - x\big)\,,$$

im Widerspruch zum zuvor angegebenen Resultat. $\lightning$ $\diamond$

2.4 Lagrange-Funktionen

Vorbemerkung. Die im Folgenden angegebenen Grundlagen der Variationsrechnung werden im Beweis des Fixpunktsatzes von Brouwer verwendet. Ein wesentliches Resultat besagt, daß Extremwerte von Energie-Funktionalen den Lösungen der Euler–Lagrange-Gleichungen entsprechen. Ohne explizite Erwähnung wird angenommen, daß die auftretenden Funktionen hinreichend regulär sind.

Lagrange-Gleichungen (Klassische Mechanik).

(i) *Verallgemeinerte Koordinatenfunktion und Lagrange-Funktion.* Im Rahmen des Lagrange-Formalismus der Klassischen Mechanik wird ein physikalisches System durch eine zeitabhängige Koordinatenfunktion (Zeitintervall $\mathscr{T} \subseteq \mathbb{R}$)

$$q : \mathscr{T} \longrightarrow \mathbb{R}^{3J} : t \longmapsto q(t) ,$$

welche die Koordinaten der betrachteten Teilchen bzw. Verallgemeinerungen davon angibt, und die Lagrange-Funktion des Systemes, genauer durch die zugehörige Funktion (zeitliche Ableitung q')

$$\mathscr{T} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \mathscr{L}\big(t, q(t), q'(t)\big)$$

beschrieben. Die partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion

$$\mathscr{L} : D \subseteq \mathscr{T} \times \mathbb{R}^{3J} \times \mathbb{R}^{3J} \longrightarrow \mathbb{R} : (t, \xi, \eta) \longmapsto \mathscr{L}(t, \xi, \eta)$$

bezüglich ξ und η werden mit $\partial_\xi \mathscr{L}$ und $\partial_\eta \mathscr{L}$ bezeichnet.

(ii) *Hamilton-Prinzip.* Das fundamentale Hamilton-Prinzip besagt, daß das Wirkungsfunktional für Lösungen des betrachteten physikalischen Systemes extremal wird

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}\big(\tau, q(\tau), q'(\tau)\big)\, \mathrm{d}\tau \quad \longrightarrow \quad \text{extremal};$$

dabei sind für zwei Zeitpunkte $t_1, t_2 \in \mathscr{T}$ die zugehörigen Lösungswerte $q(t_1)$ und $q(t_2)$ vorgegeben.

(iii) *Lagrange-Gleichungen.* Als direkte Folgerung des Hamilton-Prinzipes erhält man die Lagrange-Gleichungen

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \partial_\eta \mathscr{L}\big(t, q(t), q'(t)\big) = \partial_\xi \mathscr{L}\big(t, q(t), q'(t)\big) , \qquad t \in \mathscr{T} .$$

Erklärung. Um dieses Resultat herzuleiten, verwendet man, daß die Gâteaux-Ableitung[1]

[1] *Erinnerung.* Die Gâteaux-Ableitung einer Funktion F im Punkt q in Richtung y ist durch den Grenzwert

$$D_y F(q) = \lim_{\delta \to 0} \tfrac{1}{\delta} \big(F(q + \delta y) - F(q)\big)$$

definiert.

des Wirkungsintegrales verschwindet. Um die Gâteaux-Ableitung zu bestimmen, werden (kleine) Änderungen der Lösung der speziellen Form

$$q + \delta y\,, \qquad \delta \in \mathbb{R}\,, \qquad y : \mathscr{T} \longrightarrow \mathbb{R}^{3J}\,,$$

betrachtet; aufgrund der Vorgabe der Funktionswerte $q(t_1), q(t_2)$ ergibt sich die Einschränkung

$$y(t_1) = 0\,, \qquad y(t_2) = 0\,,$$

ansonsten kann y beliebig gewählt werden. Die Forderung, daß die Ableitung des Wirkungsintegrales verschwindet, führt auf

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\delta \to 0} \tfrac{1}{\delta} \Big(\int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}\big(\tau, q(\tau) + \delta\, y(\tau), q'(\tau) + \delta\, y'(\tau)\big)\, \mathrm{d}\tau - \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}\big(\tau, q(\tau), q'(\tau)\big)\, \mathrm{d}\tau \Big) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \lim_{\delta \to 0} \tfrac{1}{\delta} \Big(\mathscr{L}\big(\tau, q(\tau) + \delta\, y(\tau), q'(\tau) + \delta\, y'(\tau)\big) - \mathscr{L}\big(\tau, q(\tau), q'(\tau)\big) \Big)\, \mathrm{d}\tau \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \Big(\partial_\xi \mathscr{L}\big(\tau, q(\tau), q'(\tau)\big)\, y(\tau) + \partial_\eta \mathscr{L}\big(\tau, q(\tau), q'(\tau)\big)\, y'(\tau) \Big)\, \mathrm{d}\tau\,;
\end{aligned}$$

mittels partieller Integration und Einsetzen der Bedingungen $y(t_1) = 0 = y(t_2)$ folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{t_1}^{t_2} \partial_\xi \mathscr{L}\big(\tau, q(\tau), q'(\tau)\big)\, y(\tau)\, \mathrm{d}\tau \\
&\qquad + \partial_\eta \mathscr{L}\big(\tau, q(\tau), q'(\tau)\big)\, y(\tau) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, \partial_\eta \mathscr{L}\big(\tau, q(\tau), q'(\tau)\big)\, y(\tau)\, \mathrm{d}\tau \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \Big(\partial_\xi \mathscr{L}\big(\tau, q(\tau), q'(\tau)\big) - \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, \partial_\eta \mathscr{L}\big(\tau, q(\tau), q'(\tau)\big) \Big)\, y(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,.
\end{aligned}$$

Da y beliebig gewählt werden kann, ergeben sich daraus die Lagrange-Gleichungen. ◇

Vorbemerkung. Anstelle eines Zeitintervalles $\mathscr{T} \subseteq \mathbb{R}$ wird im Folgenden ein räumliches Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ betrachtet. Vektoren werden wie üblich als Spalten aufgefaßt, und es wird die gebräuchliche Schreibweise für die Jacobi-Matrix einer vektorwertigen Funktion verwendet

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d\,,$$

$$w : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^K : x \longmapsto w(x) = \begin{pmatrix} w_1(x_1, \dots, x_d) \\ \vdots \\ w_K(x_1, \dots, x_d) \end{pmatrix},$$

$$w'(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} w_1(x_1, \dots, x_d) & \dots & \partial_{x_d} w_1(x_1, \dots, x_d) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} w_K(x_1, \dots, x_d) & \dots & \partial_{x_d} w_K(x_1, \dots, x_d) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{K \times d}\,, \qquad x \in \Omega\,.$$

Euler–Lagrange-Gleichungen (Elastizitätstheorie). Es bezeichne $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit glattem Rand.

(i) *Lagrange-Funktion.* Eine reellwertige Funktion der Form (Variable ξ entspricht Funktionswert $w(x) \in \mathbb{R}^K$ für $x \in \Omega$, Variable η entspricht Jacobi-Matrix $w'(x) \in \mathbb{R}^{K\times d}$)

$$\mathscr{L} : D \subseteq \Omega \times \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{K\times d} \longrightarrow \mathbb{R} : (x,\xi,\eta) \longmapsto \mathscr{L}(x,\xi,\eta)$$

wird als Lagrange-Funktion bezeichnet.

(ii) *Energie-Funktional.* Für eine Funktion

$$w : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^K$$

ist das zugehörige Energie-Funktional[2] durch

$$E(w) = \int_\Omega \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

gegeben.

(iii) *Euler–Lagrange-Gleichungen.* Ähnliche Überlegungen wie zuvor führen auf die Euler–Lagrange-Gleichungen. Genauer, sucht man unter allen hinreichend regulären Funktionen $w : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^K$, welche zusätzlich vorgegebene Randwerte annehmen, einen Extremwert des Energie-Funktionales (wobei $r : \partial\Omega \to \mathbb{R}^K$ regulär)

$$\begin{cases} E(w) = \displaystyle\int_\Omega \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\,\mathrm{d}x \quad \longrightarrow \quad \text{extremal}, \\ w(x) = r(x), \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

führt dies auf ein System partieller Differentialgleichungen, die Euler–Lagrange-Gleichungen

$$\sum_{j=1}^d \partial_{x_j}\partial_{\eta_{kj}}\mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big) = \partial_{\xi_k}\mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big), \qquad k \in \{1,\dots,K\}.$$

Erklärung. Als (kleine) Änderungen der Lösung betrachtet man Funktionen, welche in den Randpunkten verschwinden

$$w + \delta y, \qquad \delta \in \mathbb{R}, \qquad y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^K, \qquad y(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Die Forderung, daß die Gâteaux-Ableitung des Energie-Funktionales verschwindet, führt auf (erste Variation)

$$\begin{aligned} 0 &= D_y E(w) = \lim_{\delta\to 0} \tfrac{1}{\delta}\big(E(w+\delta y) - E(w)\big), \\ 0 &= \lim_{\delta\to 0} \tfrac{1}{\delta}\Big(\int_\Omega \mathscr{L}\big(x, w(x)+\delta\, y(x), w'(x)+\delta\, y'(x)\big)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\,\mathrm{d}x\Big) \\ &= \int_\Omega \lim_{\delta\to 0} \tfrac{1}{\delta}\Big(\mathscr{L}\big(x, w(x)+\delta\, y(x), w'(x)+\delta\, y'(x)\big) - \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \Big(\partial_\xi \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\, y(x) + \partial_\eta \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\, y'(x)\Big)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

[2] Vgl. Wirkungsfunktional.

Im Spezialfall $d = 3$ und $K = 2$ führt dies auf

$$w(x) = \begin{pmatrix} w_1(x_1, x_2, x_3) \\ w_2(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \qquad w'(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} w_1(x) & \partial_{x_2} w_1(x) & \partial_{x_3} w_1(x) \\ \partial_{x_1} w_2(x) & \partial_{x_2} w_2(x) & \partial_{x_3} w_2(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3},$$

$$\begin{aligned}
\partial_\xi \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\, y(x) &= \partial_{\xi_1} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\, y_1(x) + \partial_{\xi_2} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\, y_2(x), \\
\partial_\eta \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\, y'(x) &= \partial_{\eta_{11}} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\, \partial_{x_1} y_1(x) \\
&\quad + \partial_{\eta_{12}} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\, \partial_{x_2} y_1(x) \\
&\quad + \partial_{\eta_{13}} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\, \partial_{x_3} y_1(x) \\
&\quad + \partial_{\eta_{21}} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\, \partial_{x_1} y_2(x) \\
&\quad + \partial_{\eta_{22}} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\, \partial_{x_2} y_2(x) \\
&\quad + \partial_{\eta_{23}} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\, \partial_{x_3} y_2(x);
\end{aligned}$$

partielle Integration ergibt beispielsweise (Randterm verschwindet)

$$\int_\Omega \partial_{\eta_{11}} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\, \partial_{x_1} y_1(x)\, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \partial_{x_1} \partial_{\eta_{11}} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\, y_1(x)\, \mathrm{d}x.$$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \Big(\partial_\xi \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\, y(x) + \partial_\eta \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\, y'(x)\Big)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \Big(\partial_{\xi_1} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big) - \partial_{x_1}\partial_{\eta_{11}} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big) - \partial_{x_2}\partial_{\eta_{12}} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big) \\
&\qquad\qquad - \partial_{x_3}\partial_{\eta_{13}} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\Big)\, y_1(x)\, \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega \Big(\partial_{\xi_2} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big) - \partial_{x_1}\partial_{\eta_{21}} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big) - \partial_{x_2}\partial_{\eta_{22}} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big) \\
&\qquad\qquad - \partial_{x_3}\partial_{\eta_{23}} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\Big)\, y_2(x)\, \mathrm{d}x;
\end{aligned}$$

da die Funktion y beliebig gewählt werden kann, impliziert dies

$$\begin{aligned}
\partial_{\xi_1} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big) &= \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j}\partial_{\eta_{1j}} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big), \\
\partial_{\xi_2} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big) &= \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j}\partial_{\eta_{2j}} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big).
\end{aligned}$$

Die Erweiterung auf den allgemeinen Fall ist offensichtlich. ◇

Null-Lagrange-Funktion. Eine Lagrange-Funktion

$$\mathscr{L} : D \subseteq \Omega \times \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{K\times d} \longrightarrow \mathbb{R} : (x, \xi, \eta) \longmapsto \mathscr{L}(x, \xi, \eta)$$

mit der speziellen Eigenschaft, daß *alle regulären Funktionen* die zugehörigen Euler–Lagrange-Gleichungen erfüllen

$$\sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} \partial_{\eta_{kj}} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big) = \partial_{\xi_k} \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big), \qquad (j,k) \in \{1,\dots,d\} \times \{1,\dots,K\},$$

heißt Null-Lagrange-Funktion. Ähnliche Überlegungen wie zuvor zeigen, daß in diesem Fall der Wert des Energie-Funktionales

$$E(w) = \int_\Omega \mathscr{L}\big(x, w(x), w'(x)\big)\, \mathrm{d}x$$

nur von den Randwerten und nicht von den Funktionswerten im Inneren abhängt

$$\Big(\forall x \in \partial\Omega: \quad w(x) = \widetilde{w}(x)\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad E(w) = E(\widetilde{w}).$$

Erklärung. Die Differenz der Energie-Funktionale erfüllt die Relation

$$\begin{aligned} E(w) - E(\widetilde{w}) &= E\big(\sigma w + (1-\sigma)\widetilde{w}\big)\Big|_{\sigma=0}^{1} \\ &= \int_0^1 \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} E\big(\sigma w + (1-\sigma)\widetilde{w}\big)\, \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_0^1 E'\big(\sigma w + (1-\sigma)\widetilde{w}\big)\big(w - \widetilde{w}\big)\, \mathrm{d}\sigma. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\mathscr{L}$ eine Null-Lagrange-Funktion, d.h. die regulären Funktionen $w, \widetilde{w}$ sowie jede Kombination der Form (aus $w(x) = r(x)$ und $\widetilde{w}(x) = r(x)$ für $x \in \partial\Omega$ folgt auch $z(x) = r(x)$ für $x \in \partial\Omega$)

$$z = \sigma w + (1-\sigma)\widetilde{w}, \qquad \sigma \in [0,1],$$

erfüllen die Euler–Lagrange-Gleichungen. Wie zuvor ergibt sich im Spezialfall $d = 3$ und $K = 2$ deshalb die Identität (mit $\widetilde{z} = w - \widetilde{w}$, partielle Integration, nach Voraussetzung gilt $\widetilde{z}(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega$ und somit verschwinden die Randterme)

$$\begin{aligned} E'(z)\,\widetilde{z} = &\int_\Omega \Big(\partial_{\xi_1} \mathscr{L}\big(x, z(x), z'(x)\big)\, \widetilde{z}_1(x) + \partial_{\xi_2} \mathscr{L}\big(x, z(x), z'(x)\big)\, \widetilde{z}_2(x)\Big)\, \mathrm{d}x \\ &+ \int_\Omega \Big(\partial_{\eta_{11}} \mathscr{L}\big(x, z(x), z'(x)\big)\, \partial_{x_1} \widetilde{z}_1(x) + \partial_{\eta_{12}} \mathscr{L}\big(x, z(x), z'(x)\big)\, \partial_{x_2} \widetilde{z}_1(x) \\ &\qquad + \partial_{\eta_{13}} \mathscr{L}\big(x, z(x), z'(x)\big)\, \partial_{x_3} \widetilde{z}_1(x) + \partial_{\eta_{21}} \mathscr{L}\big(x, z(x), z'(x)\big)\, \partial_{x_1} \widetilde{z}_2(x) \\ &\qquad + \partial_{\eta_{22}} \mathscr{L}\big(x, z(x), z'(x)\big)\, \partial_{x_2} \widetilde{z}_2(x) + \partial_{\eta_{23}} \mathscr{L}\big(x, z(x), z'(x)\big)\, \partial_{x_3} \widetilde{z}_2(x)\Big)\, \mathrm{d}x \\ = &\int_\Omega \Big(\partial_{\xi_1} \mathscr{L}\big(x, z(x), z'(x)\big) - \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} \partial_{\eta_{1j}} \mathscr{L}\big(x, z(x), z'(x)\big)\Big)\, \widetilde{z}_1(x)\, \mathrm{d}x \\ &+ \int_\Omega \Big(\partial_{\xi_2} \mathscr{L}\big(x, z(x), z'(x)\big) - \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} \partial_{\eta_{2j}} \mathscr{L}\big(x, z(x), z'(x)\big)\Big)\, \widetilde{z}_2(x)\, \mathrm{d}x \\ = &\ 0. \end{aligned}$$

Dies zeigt das gewünschte Resultat. ◇

Determinante. Die Determinante (keine Abhängigkeit der Lagrange-Funktion von (x,ξ))

$$K = d: \qquad \eta \in \mathbb{R}^{d\times d}, \qquad \mathscr{L}(x,\xi,\eta) = \det\eta,$$

führt auf eine Null-Lagrange-Funktion, d.h. der Wert des zugehörigen Energie-Funktionales hängt nur von den Randwerten der Funktion ab

$$E(w) = \int_\Omega \det\big(w'(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Entsprechendes gilt für eine durch die Spur definierte Größe

$$K = d: \qquad \eta \in \mathbb{R}^{d\times d}, \qquad \mathscr{L}(x,\xi,\eta) = \mathrm{Spur}\big(\eta^2\big) - \big(\mathrm{Spur}(\eta)\big)^2.$$

Erklärung. Eine einfache Rechnung zeigt das Resultat für den Spezialfall $d = 2$, betrachte etwa ein einfaches Gebiet der Form $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ und verwende partielle Integration oder alternativ die Euler–Lagrange-Gleichungen. Siehe RŮŽIČKA (2004). ⋄

2.5 Fixpunktsatz von Brouwer

Vorbemerkung. Eine mögliche Herleitung des Fixpunktsatzes von Brouwer beruht auf dem zuvor angegebenen Resultat zur Determinante.

Fixpunktsatz von Brouwer. Jede stetige Funktion, welche eine abgeschlossene Kugel auf sich selbst abbildet (wobei $r > 0$, insbesondere gelte $M \neq \emptyset$, euklidische Norm)

$$A : M = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq r \right\} \longrightarrow M ,$$

besitzt einen Fixpunkt

$$\exists\, x_* \in M : \qquad A(x_*) = x_* .$$

Erklärung. Es reicht aus, die Aussage für die Einheitskugel nachzuweisen

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1 \right\} .$$

(i) Wir zeigen zunächst die Aussage

$$\nexists\, R : M \longrightarrow \partial M \text{ glatt mit der Eigenschaft } R(x) = x \text{ für alle } x \in \partial M$$

mittels Widerspruchsbeweis.

(a) Wie zuvor angegeben, ist die Determinante eine Null-Lagrange-Funktion, d.h. für jede reguläre Funktion hängt der Wert des zugehörigen Energie-Funktionales nur von den Randwerten der Funktion ab (mit $\Omega = M$)

$$E(w) = \int_M \det\big(w'(x)\big)\, \mathrm{d}x ;$$

betrachtet man speziell die identische Abbildung, ergibt sich der Wert

$$\mathrm{Id} : M \longrightarrow M : x \longmapsto x ,$$

$$\det\big(\mathrm{Id}'(x)\big) = \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1 ,$$

$$E(\mathrm{Id}) = \int_M \det\big(\mathrm{Id}'(x)\big)\, \mathrm{d}x = \int_M 1\, \mathrm{d}x = \mathrm{vol}(M) > 0 .$$

Würde also eine reguläre Funktion, welche dieselben Randwerte wie die Identität annimmt

$$R : M \longrightarrow \partial M , \qquad R(x) = x , \quad x \in \partial M ,$$

existieren, würde dies die Relation

$$\int_M \det\big(R'(x)\big)\, \mathrm{d}x = \int_M \det\big(\mathrm{Id}'(x)\big)\, \mathrm{d}x > 0$$

implizieren.

(b) Differentiation der Normierungsbedingung zeigt andererseits, daß der Vektor $R(x)$ ein Eigenvektor von $R'(x)$ zum Eigenwert Null ist (wegen $\|R(x)\| = 1$ ist $R(x) \neq 0$)

$$\begin{aligned} \forall x \in M: &\qquad \big\|R(x)\big\| = 1\,, \\ \forall x \in M: &\qquad \big(R(x)\big)^T R(x) = 1\,, \\ \forall x \in M: &\qquad \big(R'(x)\big)^T R(x) = 0\,, \end{aligned}$$

und somit die Matrix $R'(x)$ singulär ist

$$\det\big(R'(x)\big) = 0\,.$$

Insgesamt zeigt dies die Relation

$$0 = \int_M \det\big(R'(x)\big)\,\mathrm{d}x > 0\,.$$

Widerspruch! $\lightning$

(ii) Wäre die abgeschwächte Aussage

$$\exists\, R : M \longrightarrow \partial M \text{ stetig mit der Eigenschaft } R(x) = x \text{ für alle } x \in \partial M$$

richtig, würde eine fortgesetzte und regularisierte Funktion auf einer größeren Kugel die Eigenschaft

$$\exists\, \widetilde{R} : \widetilde{M} \longrightarrow \partial\widetilde{M} \text{ regulär mit der Eigenschaft } \widetilde{R}(x) = x \text{ für alle } x \in \partial\widetilde{M}$$

erfüllen, vgl. Růžička (2004). Widerspruch zu (i)! $\lightning$

(iii) Die gewünschte Aussage folgt nun analog zum zweidimensionalen Fall, d.h. durch Konstruktion einer stetigen Funktion (Gerade $\{x + \sigma\,(A(x) - x) : \sigma \in \mathbb{R}\}$ durch x und $A(x)$, Schnittpunkt mit dem Rand der Einheitskugel, σ_0 geeignet gewählt)

$$R : M = \Big\{x \in \mathbb{R}^d : \big\|x\big\| \leq 1\Big\} \longrightarrow \partial M = \Big\{x \in \mathbb{R}^d : \big\|x\big\| = 1\Big\} : x \longmapsto x + \sigma_0\big(A(x) - x\big)\,.$$

Widerspruch zu (ii)! $\lightning$ $\diamond$

Folgerung. Der Fixpunktsatz von Brouwer gilt allgemeiner für Mengen, welche homöomorph zu abgeschlossenen Kugeln sind, etwa für nichtleere konvexe kompakte Mengen. Genauer, betrachtet wird eine stetige Funktion

$$A : M = \Big\{x \in \mathbb{R}^d : \big\|x\big\| \leq r\Big\} \longrightarrow M$$

und ein Homöomorphismus, d.h. eine stetige Bijektion

$$h : M \longrightarrow \widetilde{M}\,, \qquad h^{-1} : \widetilde{M} \longrightarrow M\,.$$

Die Existenz eines Fixpunktes von A

$$\exists\, x_* \in M: \qquad A(x_*) = x_*$$

impliziert die Existenz eines Fixpunktes der Komposition

$$\widetilde{A} = h \circ A \circ h^{-1} : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}, \qquad \widetilde{x}_* = h(x_*) \in \widetilde{M}, \qquad \widetilde{A}(\widetilde{x}_*) = \widetilde{x}_*\,.$$

wie die folgende Relation zeigt

$$A(x_*) = x_* \quad \Longleftrightarrow \quad \widetilde{A}(\widetilde{x}_*) = \big(h \circ A \circ h^{-1}\big)\big(h(x_*)\big) = h\big(A(x_*)\big) = h(x_*) = \widetilde{x}_*\,.$$

2.6 Fixpunktsatz von Schauder

Vorbemerkung. Der Fixpunktsatz von Brouwer läßt sich nicht direkt auf den unendlichdimensionalen Fall erweitern; das folgende Gegenbeispiel zeigt, daß für einen unendlichdimensionalen separablen (reellen) Hilbert-Raum H eine stetige Selbstabbildung der abgeschlossenen Kugel (wobei $r > 0$)

$$\dim H = \infty, \qquad A : M = \left\{h \in H : \|h\|_H \le r\right\} \longrightarrow M,$$

nicht notwendigerweise einen Fixpunkt besitzt

$$\nexists\, h_* \in M : \qquad A(h_*) = h_*.$$

Gegenbeispiel (Satz von Kakutani). Man beachte, daß die stetige lineare Funktion (setze speziell $r = 1$, Wahl eines abzählbaren vollständigen Orthonormalsystemes, spezielle Wahl der Indexmenge $\mathbb{Z}$, Darstellung mit zugehörigen Koeffizienten $\alpha_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{gathered}
\left(h_k\right)_{k\in\mathbb{Z}}, \qquad \left(h_k \middle| h_\ell\right)_H = \delta_{k\ell}, \quad k,\ell \in \mathbb{Z}, \\
A : M = \left\{h \in H : \|h\|_H \le 1\right\} \longrightarrow M : h = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k h_k \longmapsto \tfrac{1}{2}\left(1 - \|h\|_H\right) h_0 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k h_{k+1}
\end{gathered}$$

wohldefiniert ist, denn es gilt die Abschätzung (Parseval'sche Identität, Dreiecksungleichung)

$$\begin{aligned}
&& \|h_0\|_H &= 1, \\
&& \|h\|_H^2 &= \Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k h_k\Big\|_H^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k|^2, \\
&& \Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k h_{k+1}\Big\|_H^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 = \|h\|_H^2, \\
\|h\|_H \le 1 \qquad \Longrightarrow && \|A(h)\|_H &\le \tfrac{1}{2}\left|1 - \|h\|_H\right| \|h_0\|_H + \|h\|_H = \tfrac{1}{2}\left(1 + \|h\|_H\right) \le 1.
\end{aligned}$$

Um die Annahme, daß ein Fixpunkt existiert

$$\begin{gathered}
h_* = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k h_k, \qquad A(h_*) = h_*, \\
\tfrac{1}{2}\left(1 - \|h_*\|_H\right) h_0 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k h_{k+1} = h_*, \\
\tfrac{1}{2}\left(1 - \|h_*\|_H\right) h_0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\alpha_k - \alpha_{k-1}\right) h_k, \\
\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k h_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 = \beta_k = \begin{cases} \alpha_k - \alpha_{k-1}, & k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \\ \alpha_0 - \alpha_{-1} - \tfrac{1}{2}\left(1 - \|h_*\|_H\right), & k = 0, \end{cases}
\end{gathered}$$

zu wiederlegen, ist es zweckmäßig, drei Fälle zu unterscheiden.

(i) Falls $h_* = 0$, verschwinden alle Koeffizienten $\alpha_k = 0$ für $k \in \mathbb{Z}$; die resultierende Identität führt auf einen Widerspruch (wegen $\| h_0 \|_H = 1$ ist insbesondere $h_0 \neq 0$)

$$h_* = 0: \qquad \tfrac{1}{2}\, h_0 = 0\,.$$

(ii) Für normierte Elemente ergibt sich die Relation

$$\big\| h_* \big\|_H = 1: \qquad \alpha_k = \alpha_{k-1}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

im Widerspruch zur Summierbarkeit der Koeffizienten

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \big|\alpha_k\big|^2 \leq 1\,.$$

(iii) Auch im verbleibenden Fall erhält man eine Relation

$$\big\| h_* \big\|_H \in (0,1): \qquad \begin{cases} \alpha_0 = \alpha_{-1} + \frac{1}{2}\big(1 - \big\| h_* \big\|_H\big)\,, & k = 0\,, \\ \alpha_k = \alpha_{k-1}\,, & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\,, \end{cases}$$

welche im Widerspruch zur Summierbarkeit der Koeffizienten steht.

Vorbemerkung. Die Erweiterung des Fixpunktsatzes von Brouwer auf den unendlichdimensionalen Fall basiert auf der Idee, kompakte Operatoren zu betrachten.

Kompakte Menge und kompakter Operator.

(i) Eine Teilmenge eines topologischen Raumes heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält

$$\Big(M \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} O_k \ \text{ mit } O_k \text{ offen für } \ k \in \mathbb{N}\Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\exists\, \mathscr{K} \subset \mathbb{N} \text{ mit } \mathscr{K} \text{ endlich}: \ M \subseteq \bigcup_{k \in \mathscr{K}} O_k\Big).$$

Eine Menge, deren Abschluß kompakt ist, wird als relativ kompakte Menge bezeichnet.

(ii) Man beachte, daß eine kompakte Menge insbesondere beschränkt ist und jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge auf eine kompakte Menge führt.

(iii) Ein stetiger Operator zwischen normierten Vektorräumen, welcher beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen abbildet, heißt kompakt (sinnvolle Annahme $U_1 \neq \emptyset$)

$$A: U_1 \subseteq X_1 \longrightarrow X_2\,, \qquad \forall\, M \subseteq U_1 \ \text{ mit } \ M \ \text{ beschränkt}: \quad \overline{A(M)} \ \text{ kompakt}\,.$$

(iv) Wesentlich in Hinblick auf den Fixpunktsatz von Schauder ist die Charakterisierung eines kompakten Operators zwischen Banach-Räumen mit beschränktem Definitionsbereich (sinnvolle Annahme $M \neq \emptyset$)

$$A : M \subseteq X_1 \longrightarrow X_2\,, \qquad M \text{ beschränkt}\,,$$

als gleichmäßiger Limes einer speziellen Folge von kompakten Operatoren (Bild enthalten in endlich-dimensionalem Unterraum)

$$\begin{gathered}\exists\,\big(A_k\big)_{k\in\mathbb{N}} \text{ mit folgenden Eigenschaften:}\\ A_k : M \longrightarrow A_k(M) \text{ mit } A_k(M) \subseteq U_{k2} \text{ sowie } \dim(U_{k2}) < \infty\,,\\ \forall x \in M \quad \forall k \in \mathbb{N}: \quad \big\|A(x) - A_k(x)\big\|_{X_2} < \tfrac{1}{k}\,.\end{gathered}$$

Erklärung. Siehe RŮŽIČKA (2004). ◇

Fixpunktsatz von Schauder. Es sei X ein Banach-Raum; weiters bezeichne $\emptyset \neq M \subseteq X$ eine konvexe und kompakte Teilmenge. Dann besitzt jede stetige selbstabbildende Funktion einen Fixpunkt (insbesondere ist A ein kompakter Operator)

$$A : M \longrightarrow M\,, \qquad \exists\, x_* \in M: \quad A(x_*) = x_*\,.$$

Erklärung.

(i) Nach Voraussetzung ist A ein stetiger Operator, welcher die kompakte Menge M auf eine Teilmenge $A(M) \subseteq M$ abbildet; der zugehörige Abschluß $\overline{A(M)} \subseteq M$ ist als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ebenfalls kompakt. Diese Argumente gelten für jede Teilmenge, und somit ist $A : M \to M$ ein kompakter Operator.

(ii) Es bezeichne $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die zuvor angegebene Folge mit den Eigenschaften

$$\begin{gathered}A_k : M \longrightarrow A_k(M)\,, \qquad \mathrm{Bi}(A_k) \subseteq U_{k2}\,, \qquad \dim(U_{k2}) < \infty\,,\\ \forall x \in M \quad \forall k \in \mathbb{N}: \quad \big\|A(x) - A_k(x)\big\|_{X_2} < \tfrac{1}{k}\,.\end{gathered}$$

(iii) Eine grundlegende Idee ist es, anstelle des Bildes $A_k(M)$ eine zu einer abgeschlossenen Kugel homöomorphe Menge zu betrachten. Dazu verwendet man, daß für jeden Index $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl $d_k \in \mathbb{N}$ und Elemente $u_1, \dots, u_{d_k} \in U_{k2}$ existieren, sodaß die konvexe Hülle

$$M_k = \left\{ \sum_{j=1}^{d_k} \lambda_j\, u_j : \lambda_j \in [0,1] \text{ für } j \in \{1, \dots, d_k\} \text{ und } \sum_{j=1}^{d_k} \lambda_j = 1 \right\} \subseteq M$$

in M enthalten ist; man beachte, daß M nach Voraussetzung eine konvexe Menge ist und die konvexe Hülle abgeschlossen ist. Dies impliziert die Existenz eines Homoömorphismus auf eine abgeschlossene Kugel (wähle speziell $r = 1$)

$$M_k \longleftrightarrow \Big\{ x \in \mathbb{R}^{d_k} : \big\|x\big\| \leq 1 \Big\}\,.$$

Für jeden Index $k \in \mathbb{N}$ sichert der Fixpunktsatzes von Brouwer für den eingeschränkten Operator die Existenz eines Fixpunktes

$$A_k : M_k \longrightarrow M_k\,, \qquad \exists\, x_{k,*} \in M_k \subseteq M: \quad A_k(x_{k,*}) = x_{k,*}\,.$$

(iv) Aufgrund der Kompaktheit von M existiert eine konvergente Teilfolge (zur Vereinfachung wird dieselbe Notation verwendet)

$$x_* = \lim_{k\to\infty} x_{k,*} \in M\,.$$

Die Relation (verwende Fixpunktgleichung und Dreiecksungleichung, erster Summand konvergiert wegen Stetigkeit von A gegen Null, zweiter Summand konvergiert wegen gleichmäßiger Konvergenz der Operatorfolge gegen Null)

$$\big\|A(x_*) - x_*\big\|_X \leq \big\|A(x_*) - A(x_{k,*})\big\|_X + \big\|A(x_{k,*}) - A_k(x_{k,*})\big\|_X + \big\|x_{k,*} - x_*\big\|_X \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

zeigt, daß dieser Limes der gesuchte Fixpunkt ist. ◇

Folgerung zum Fixpunktsatz von Schauder. Es sei X ein Banach-Raum; weiters bezeichne $\emptyset \neq M \subseteq X$ eine abgeschlossene, beschränkte und konvexe Teilmenge. Dann besitzt jeder kompakte selbstabbildende Operator einen Fixpunkt

$$A : M \longrightarrow M\,, \qquad \exists\, x_* \in M: \quad A(x_*) = x_*\,.$$

Erklärung. Siehe RŮŽIČKA (2004). ◇

Nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen (Peano). Im Zusammenhang mit durch stetige Funktionen definierten nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen wird der Satz von Arzelà–Ascoli[3] und der Fixpunktsatz von Schauder verwendet, um die lokale Existenz einer Lösung nachzuweisen. Analog zum Satz von Picard–Lindelöf formuliert man das

[3] *Gleichgradige Stetigkeit.* Eine Teilmenge der stetigen Funktionen (mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$)

$$M \subseteq \mathscr{C}\big(\overline{\Omega}, \mathbb{R}\big)$$

heißt gleichgradig stetig, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall f \in M \quad \forall x, \widetilde{x} \in \Omega \text{ mit } \big\|x - \widetilde{x}\big\| < \delta: \quad \big|f(x) - f(\widetilde{x})\big| < \varepsilon\,.$$

Satz von Arzelà–Ascoli. Es bezeichne $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Eine Teilmenge der stetigen Funktionen

$$M \subseteq \mathscr{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$$

ist genau dann relativ kompakt, wenn sie beschränkt und gleichgradig stetig ist.

betrachtete Anfangswertproblem als Integralgleichung, welche einer Fixpunktgleichung für einen vom Startwert abhängigen Fixpunkt-Operator entspricht (mit $y : [0,T] \to \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(y(t)\big)\,, & t \in (0,T)\,, \\ y(0) = y_0\,, \end{cases}$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f\big(y(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad t \in [0,T]\,,$$

$$A_{y_0} : D(A) \subseteq X \longrightarrow X : x \longmapsto \left[t \mapsto y_0 + \int_0^t f\big(x(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau \right];$$

der Raum der stetigen Funktionen $X = \mathscr{C}\big([0,T],\mathbb{R}\big)$ wird dabei als zugrundeliegender Banach-Raum gewählt, vgl. RŮŽIČKA (2004). Im Gegensatz zum Satz von Picard–Lindelöf, welcher unter der stärkeren Forderung der Lipschitz-Stetigkeit gültig ist, kann man jedoch keine Aussage über die Eindeutigkeit der Lösung treffen.