Mathe – Cool!
für alle Generationen
zum Mitmachen für Daheim

Mechthild Thalhammer
Leopold–Franzens Universität Innsbruck

Frühjahr 2022

Wie es zu Mathe – Cool! kam und was im Vordergrund steht ...

GeburtshelferInnen

- Der Impuls, vielfältige Themen nicht nur Jugendlichen sondern auch Volksschulkindern nahe zu bringen und bei ihnen Begeisterung für Mathematik zu wecken, kam vom Pädagogen Helmut Wiederin. Seine Kreativität, sein Enthusiasmus und seine unkonventionellen Sichtweisen sind ein Gewinn für uns.
- Neben meinen Kollegen Wolfgang Förg-Rob und Norbert Netzer war unser Organisationstalent Gertrud Matt speziell zu Beginn für die Realisierung von Veranstaltungen innerhalb und außerhalb Tirols unentbehrlich.
- Von Anfang an eingebunden in die Ausarbeitung von Themen und die Durchführung von Schulbesuchen und anderen Veranstaltungen waren Studierende des Lehramtsstudiums.
- Für die Namensgebung ist vielen Kindern und Jugendlichen, die das Möbiusband und andere Themen einfach *cool!* fanden, zu danken.

Wesentliche Aspekte (für mich) – speziell für die Jüngeren

- Spaß und Freude
- Vielfältige Themen
- Spielerische Zugänge
- Viele Betreuungspersonen
- Vermittlung mit einfachen Materialien
- Erfassen und BEGREIFEN mit verschiedenen Sinnen
- Angebot zum Selbstauswählen, Ausprobieren und Entdecken
- Möglichkeit zur eingehenden Beschäftigung und Wiederholung

Zu meiner Person

- Habe mit dem Lehramtsstudium Mathematik begonnen.
- Bin Professorin am Mathematikinstitut der Universität Innsbruck.
- Auch in meinen Forschungstätigkeiten wesentliche Elemente sind
  - das Entdecken von Neuem,
  - das Experimentieren (mittels Computer),
  - das spielerische Annähern an komplexe Problemstellungen.

Bemerkungen

- Unterlagen können sehr gerne für den eigenen Unterricht verwendet werden!
- Finde zusätzlichen Einsatz von Materialien sinnvoll (z.B. mit Zahlen bedruckte Spielsteine aus Karton oder Holz für magische Quadrate).

Aus rund wird eckig

Benötigte Materialien

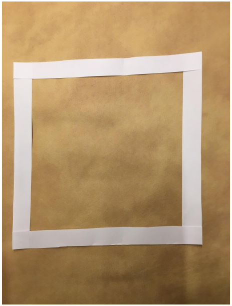
- Papier
- Schere
- Klebstoff
- Schreibstift

Anleitung

- Unterteile ein Blatt Papier durch Längsfalten in 4 gleiche Streifen.
- Schneide zwei Streifen zu, und kennzeichne mit einem Stift die Mittel-Linien.
- Forme mit jedem der Streifen einen Zylinder, und fixiere die Enden mit Klebstoff.
- Bilde mit den beiden Zylindern einen Achter.
- Verwende nochmals den Kleber, um den Achter zu fixieren. Aber bevor der Kleber fest ist, drehe einen der Zylinder um 90 Grad.
- Schneide beide Streifen entlang der Mittel-Linien durch.

Was bekommst Du?

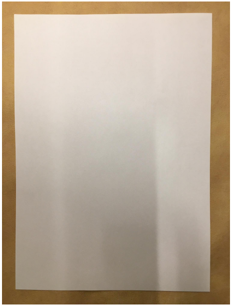
Lösung

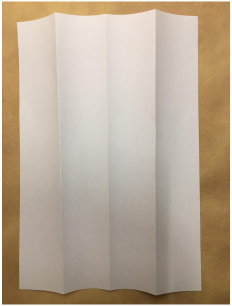


Überraschung ;-)

Anleitung und Lösung in Bildern

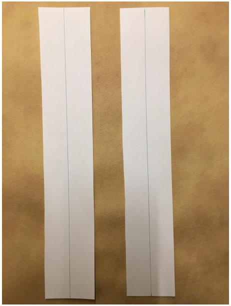
- Unterteile ein Blatt Papier durch Längsfalten in 4 gleiche Streifen.





Anleitung und Lösung in Bildern

- Schneide zwei Streifen zu, und kennzeichne mit einem Stift die Mittel-Linien.

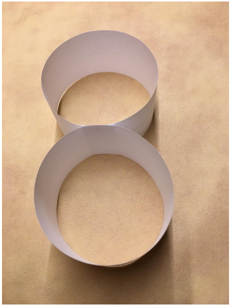


Anleitung und Lösung in Bildern

- Forme mit jedem der Streifen einen Zylinder, und fixiere die Enden mit Klebstoff.

Anleitung und Lösung in Bildern

- Bilde mit den beiden Zylindern einen Achter.

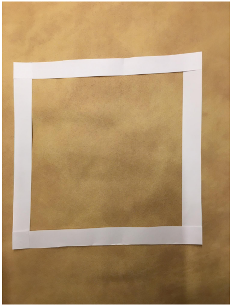


Anleitung und Lösung in Bildern

- Verwende nochmals den Kleber, um den Achter zu fixieren. Aber bevor der Kleber fest ist, drehe einen der Zylinder um 90 Grad.

Anleitung und Lösung in Bildern

- Schneide beide Streifen entlang der Mittel-Linien durch.



Das bekommst Du.
Überraschung ;-)

Forschungsfragen

- Was bekommst Du, wenn die Streifen unterschiedlich farbig sind?
- Was bekommst Du, wenn die Streifen unterschiedlich lang sind?
- Klappt es auch, wenn die Streifen unterschiedlich breit sind?
- Ist die Fläche der beiden Streifen größer oder kleiner als die Fläche des Ergebnisses? Oder sind die Flächen gleich?

Viel Spaß beim Ausprobieren!

Ein magisches Band ...
... das Möbiusband

Benötigte Materialien

- Papier
- Schere
- Klebstoff
- Schreibstift

Anleitung

- Unterteile ein Blatt Papier durch Längsfalten in 4 gleiche Streifen.
- Schneide zwei Streifen zu, und kennzeichne mit einem Stift die Mittel-Linien.
- Klebe die beiden Streifen zu einem (fast doppelt so) langen Streifen zusammen.
- Forme mit dem Streifen einen Zylinder, drehe ein Ende um 180 Grad und fixiere es mit Klebstoff.
- Kennzeichne nochmals die Mittel-Linie.

Was entdeckst Du?

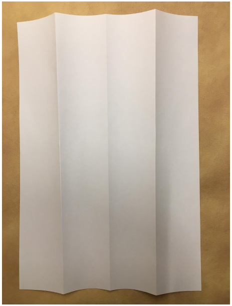
Lösung

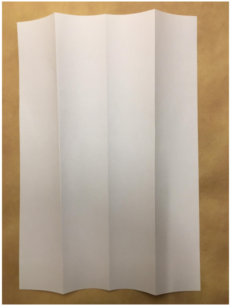
Überraschung ;-)

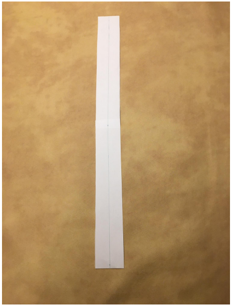
Das Möbiusband, benannt nach dem Mathematiker August Möbius, wurde erstmals 1858 beschrieben. Im Gegensatz zu einem Zylinder ist es eine Fläche, die eine einzige Kante und Seite hat und nicht orientierbar ist, also keine Innen- oder Außenseite hat. Dies sieht man, wenn man die Mittel-Linie kennzeichnet.

Anleitung und Lösung in Bildern

- Unterteile ein Blatt Papier durch Längsfalten in 4 gleiche Streifen.
- Schneide zwei Streifen zu, und kennzeichne mit einem Stift die Mittel-Linien.
- Klebe die beiden Streifen zu einem (fast doppelt so) langen Streifen zusammen.

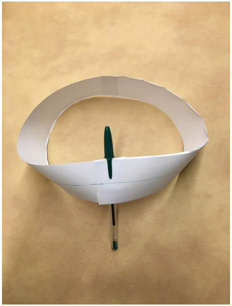






Anleitung und Lösung in Bildern

- Forme mit dem Streifen einen Zylinder, drehe ein Ende um 180 Grad und fixiere es mit Klebstoff.



Anleitung und Lösung in Bildern

- Kennzeichne nochmals die Mittel-Linie.

Du bekommst das Möbiusband mit nur einer einzigen Seite.
Überraschung ;-)

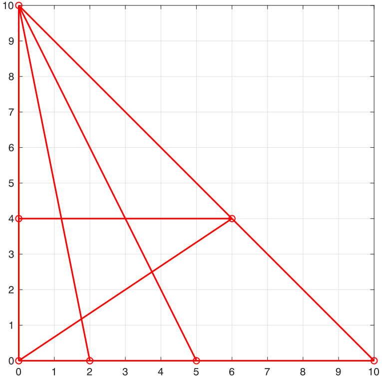
Forschungsfrage

- Was entdeckst Du, wenn Du am Streifen 2, 3 oder 4 parallele Linien kennzeichnest, ein Möbiusband formst und entlang der Linien schneidest?

Viel Spaß beim Ausprobieren!

Pause: Dreiecke

WieVIELE Dreiecke siehst Du?



Zurücklehnen und staunen

https://www.youtube.com/watch?v=F8g_ymJtvMA

Magische Quadrate

Benötigte Materialien

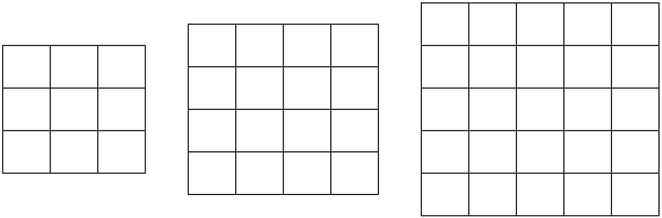
- Papier
- Bleistift
- Radiergummi ;-)

Anleitung

- Betrachte eine Quadratzahl $n \times n$, beispielsweise

$$3 \times 3 = 9\,, \quad 4 \times 4 = 16\,, \quad 5 \times 5 = 25\,.$$

Ordne die Zahlen von 1 bis $n \times n$ in einem Quadrat so an, dass die Summe entlang der Zeilen, Spalten und Diagonalen dieselbe Zahl ergibt. Diese Zahl und ein solches Quadrat heißen *magische Zahl* und *magisches Quadrat*.



- Zusatzüberlegungen, Spezialfälle und Lösungen sind im Folgenden angegeben.

Zusatzüberlegungen zur magischen Zahl

- Die Kenntnis der magischen Zahl erleichtert das Auffinden von magischen Quadraten.
- Betrachtet man für ein magisches Quadrat mit Seitenlänge $n = 3$

beispielsweise die Summen der Zeilen, so folgert man

$$\begin{aligned}
\text{Magische Zahl} &= \text{Summe Zeile 1} = \text{Summe Zeile 2} = \text{Summe Zeile 3}\,,\\
3 \times \text{Magische Zahl} &= \text{Summe Zeile 1 bis Zeile 3} = \text{Summe aller Zahlen von 1 bis 9}\,,\\
\text{Kleiner Gauß } 1+2+\cdots+9 &= (1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+5 = 45\,,\\
\text{Magische Zahl} &= \tfrac{1}{3}\,\big(1+2+\cdots+9\big) = 15\,.
\end{aligned}$$

- Analoge Überlegungen gelten für ein magisches Quadrat mit Seitenlänge n und zeigen

$$\text{Magische Zahl} = \tfrac{1}{n}\,\big(1+2+\cdots+n^2\big) = \frac{n^2\,(n^2+1)}{2n} = \frac{n\,(n^2+1)}{2}\,.$$

Magisches Quadrat für $n = 3$

- Ordne die Zahlen von 1 bis 9 so an, dass die Summe entlang der Zeilen, Spalten und Diagonalen dieselbe Zahl ergibt.

- Hinweise: Die magische Zahl ist

$$n = 3: \quad \frac{n\left(n^2+1\right)}{2} = 15\,.$$

Es gibt ein einziges magisches Quadrat (bei Identifikation unter Symmetrie-Operationen).

Zusatzüberlegung für $n = 3$

- Schreibt man alle Bedingungen an und bildet die Gesamtsumme (Einsetzen des kleinen Gauß)

$$\begin{array}{c}
\text{Summe Zeile 1} = 15\,, \quad \text{Summe Zeile 2} = 15\,, \quad \text{Summe Zeile 3} = 15\,, \\
\text{Summe Spalte 1} = 15\,, \quad \text{Summe Spalte 2} = 15\,, \quad \text{Summe Spalte 3} = 15\,, \\
\text{Summe Diagonale (links oben nach rechts unten)} = 15\,, \\
\text{Summe Diagonale (links unten nach rechts oben)} = 15\,, \\
\hline
\underbrace{2 \times \text{Summe aller Zahlen}}_{=2\times 3\times 15} + \text{Summe der beiden Diagonalen} = 8 \times 15\,,
\end{array}$$

so erhält man die Gleichung

$$2\times \text{ Zahl in der Mitte} + \text{Summe der 4 (verschiedenen) Zahlen in Ecken} = 30\,.$$

Im Wesentlichen mittels $2 \times 5 + 10 + 10 = 30$ folgert man, dass im Zentrum die Zahl 5 steht und in den Ecken die Zahlenpaare $(1,9), (2,8), (3,7), (4,6)$ vorkommen können.

	5	

Zusatzüberlegung für $n = 3$

- Der Versuch, die Zahl 1 (oder 9) in einer Ecke zu platzieren, funktioniert nicht. Ein möglicher Ausgangspunkt ist beispielsweise

	1	
	5	
	9	

Magisches Quadrat für $n = 3$ (Lösung)

- Ein magisches Quadrat mit Seitenlänge 3 ist

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Magisches Quadrat für $n = 4$

- Ordne die Zahlen von 1 bis 16 so an, dass die Summe entlang der Zeilen, Spalten und Diagonalen dieselbe Zahl ergibt.

	14		
2	11	5	
9			7

- Hinweise: Die magische Zahl ist

$$n = 4: \quad \frac{n\left(n^2+1\right)}{2} = 34\,.$$

Es gibt sehr viele magische Quadrate (880 bei Identifikation unter Symmetrie-Operationen). Im obigen Spezialfall wird die Anzahl der Möglichkeiten durch die Vorgabe von Einträgen eingeschränkt.

Magisches Quadrat für $n = 4$ (Lösung)

- Ein magisches Quadrat mit Seitenlänge 4 ist

	14		
2	11	5	
9			7

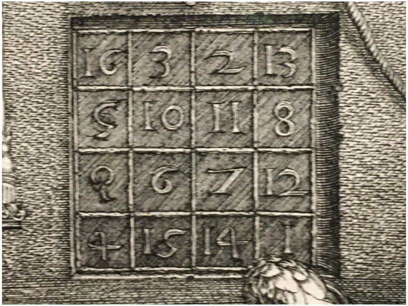
8	3	13	10
15	14	4	1
2	11	5	16
9	6	12	7

- Verwende beispielsweise

$$34 - 2 - 11 - 5 = 16\,, \quad 34 - 14 - 5 - 7 = 8\,,$$
$$34 - 8 - 2 - 9 = 15\,,$$
$$34 - 15 - 14 = 5 = 1 + 4\,, \quad 34 - 9 - 7 = 18 = 6 + 12\,,$$
$$34 - 14 - 11 = 9 = 3 + 6\,, \quad 34 - 16 - 7 = 11 = 1 + 10\,.$$

Magisches Quadrat für $n = 4$ (Lösung)

- Ein unter KunstliebhaberInnen berühmtes magisches Quadrat findet sich in einem Gemälde von Albrecht Dürer. Man beachte das Auftreten der Jahreszahl 1514. Es besteht kein offensichtlicher Zusammenhang mit dem zuvor angegebenen magischen Quadrat. Auch hier ergibt die Summe der Eckzahlen die magische Zahl 34.



https://de.wikipedia.org/wiki/Melencolia_I

Zum Ausprobieren für Daheim

- Ordne die Zahlen von 1 bis 16 so an, dass die Summe entlang der Zeilen, Spalten und Diagonalen dieselbe Zahl ergibt.

8				25
2			6	14
21		12	5	18
	3	16	24	

- Hinweise: Die magische Zahl ist

$$n = 5: \quad \frac{n\left(n^2+1\right)}{2} = 65\,.$$

Es gibt (bei Identifikation) 275 305 224 magische Quadrate.

- Mögliche Strategie: Durch Auflisten der verbleibenden Zahlen und zu erfüllenden Bedingungen Möglichkeiten einschränken.

Magisches Quadrat für $n = 5$ (Lösung)

- Ein magisches Quadrat mit Seitenlänge 5 ist

8				25
2			6	14
21		12	5	18
	3	16	24	

8	11	4	17	25
2	20	23	6	14
21	9	12	5	18
15	3	16	24	7
19	22	10	13	1

Pause: Eine eindrucksvolle Zahl

Eindrucksvolles exponentielles Wachstum

$$\sum_{j=0}^{63} 2^j = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615 \approx 1.8 \times 10^{19}$$

Zum Zurücklehnen und Staunen

https://www.youtube.com/watch?v=jWXLNPrVhfw

Schachbrett und Gesamtvolumen aller Reiskörner

Volumen eines Reiskorns $\approx 7 \text{ mm} \times 1.7 \text{ mm} \times 1.7 \text{ mm} \approx 20 \text{ mm}^3 = 2 \times 10^{-17} \text{ km}^3$

Volumen aller Reiskörner $\approx 1.8 \times 10^{19} \times 2 \times 10^{-17} = 3.6 \times 10^5 \text{ m} \times \text{km}^2$

Fläche Deutschlands $\approx 357386 \text{ km}^2 \approx 3.6 \times 10^5 \text{ km}^2$

(Reiskörner bedecken Deutschland mit 1 Meter Höhe)

Fläche Bezirk Reutte $\approx 1200 \text{ km}^2 = 0.012 \times 10^5 \text{ km}^2$

(Reiskörner bedecken Bezirk Reutte mit 300 Metern Höhe)

Türme von Hanoi (Logo) und Zeit zum Umlegen von 64 Scheiben

18446744073709551615 Sekunden $\approx 5.8 \times 10^{11}$ Jahre

Alter des Universums $\approx 1.4 \times 10^{10}$ Jahre = 14 Milliarden Jahre

Umschütten ...
... und was nur in der Vorstellung geht

Benötigte Materialien

- Papier
- Schreibstift
- 3 Gefäße oder Gläser
- Haftstreifen oder Ähnliches
  zur Markierung von 8 / 5 / 3 Einheiten
- Geschirrtuch für den Notfall ;-)

Rätselfrage

Ein Mann fährt zu einem Bergbauernhof, um Milch und Buttermilch zu besorgen. Er hat sich in den Kopf gesetzt, jeweils genau 4 Liter zu kaufen. Allerdings sind seine zwei eigenen Gefäße zu groß und die Füllmengen nicht bekannt. Die Bergbäuerin ist ratlos, denn sie hat im Moment nur drei Gefäße zur Hand, mit denen sie 8 Liter, 5 Liter und 3 Liter abmessen kann.

Kannst Du ihr helfen und durch Umschütten
die gewünschten 4 Liter bekommen?

Probiere es am besten selber mit 3 Gefäßen aus. Kennzeichne dazu mit Haftstreifen oder Ähnlichem beim ersten Gefäß 8 Einheiten, beim zweiten Gefäß 5 Einheiten und beim dritten Gefäß 3 Einheiten. Fülle in das erste Gefäß 8 Einheiten Wasser. Ziel ist es, durch Umschütten im ersten und zweiten Gefäß je 4 Einheiten Wasser zu bekommen.

Mögliche Lösung

8-Liter Gefäß	5-Liter Gefäß	3-Liter Gefäß	Erklärung
8	0	0	Ausgangssituation
3	5	0	5-Liter Gefäß füllen
3	2	3	3-Liter Gefäß füllen
$3 + 3 = 6$	2	0	3 Liter umschütten
6	0	2	2 Liter umschütten
1	5	2	5-Liter Gefäß füllen
1	4	$2 + 1 = 3$	3-Liter Gefäß füllen
$1 + 3 = 4$	4	0	3 Liter umschütten

Bedeutung der Farben:

- Rot – diese Menge wird umgeschüttet
- Blau – verbleibender Rest
- Grau – unverändert

Praktische Kurzschreibweise

Angabe der Mengen in den 8ℓ und 5ℓ Gefäßen, Menge im 3ℓ Gefäß ergibt sich daraus

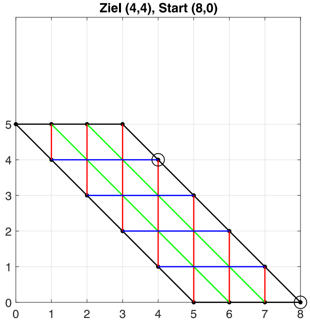
8-Liter Gefäß	5-Liter Gefäß	3-Liter Gefäß	Erklärung	Kurzschreibweise
8	0	0	Ausgangssituation	(8,0)
3	5	0	5-Liter Gefäß füllen	(3,5)
3	2	3	3-Liter Gefäß füllen	(3,2)
$3+3=6$	2	0	3 Liter umschütten	(6,2)
6	0	2	2 Liter umschütten	(6,0)
1	5	2	5-Liter Gefäß füllen	(1,5)
1	4	$2+1=3$	3-Liter Gefäß füllen	(1,4)
$1+3=4$	4	0	3 Liter umschütten	(4,4)

Hilfreiche Veranschaulichung

Kurzschreibweise

$$(8,0) \to (3,5) \to (3,2) \to (6,2) \to (6,0) \to (1,5) \to (1,4) \to (4,4)$$

Veranschaulichung mittels Koordinatensystem



Zusatzbemerkungen

Zur Veranschaulichung:

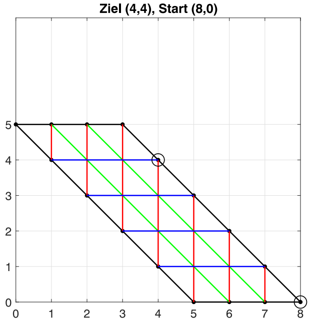
- Anders als in der Realität kann man diese Veranschaulichung (oder eine ähnliche) nützen, um die Lösung leicht zu rekonstruieren und andere Lösungen zu finden.
- Man erhält eine Lösung, indem man den gekennzeichneten Linien im gekennzeichneten Bereich folgt. Zu beachten ist, dass nicht alle Punkte *zulässige* Punkte sind (das kann man beispielsweise durch Umschütten ausprobieren).

Zur Lösbarkeit:

- Da wiederholte Subtraktionen der vorgegebenen Gefäßgrößen $8, 5, 3$ auf 1 führen, gibt es jedenfalls eine Lösung der Aufgabe

$$8 - 5 = 3\,, \quad 5 - 3 = 2\,, \quad 3 - 2 = 1\,.$$

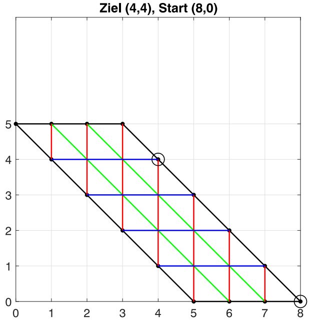
Unsere neue Strategie



In der Vorstellung kann man vom Ziel- zum Startpunkt gehen ...
... und findet so die angegebene Lösung

$$(4,4) \to (1,4) \to (1,5) \to (6,0) \to (6,2) \to (3,2) \to (3,5) \to (8,0)$$

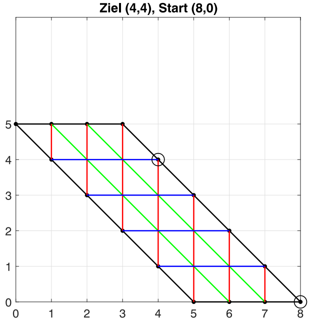
Aufgabe



Finde eine zweite Lösung und überprüfe sie durch Umschütten.

Viel Spaß!

Weitere Lösung



(4,4) → (4,1) → (7,1) → (7,0) → (2,5) → (2,3) → (5,3) → (5,0) → (8,0)

8-Liter Gefäß	5-Liter Gefäß	3-Liter Gefäß	Kurzschreibweise
8	0	0	(8,0)
5	0	3	(5,0)
5	3	0	(5,3)
2	3	3	(2,3)
2	3 + 2 = 5	1	(2,5)
2 + 5 = 7	0	1	(7,0)
7	1	0	(7,1)
4	1	3	(4,1)
4	1 + 3 = 4	0	(4,4)

Pause: Urlaub

Rätselfrage

https://www.mimikama.at/aktuelles/urlaub-daheim/

Ausprobieren ...

$$x \in \{1,2,\dots,9\} \to 3x \to 3x+3 = 3(x+1) \to 9(x+1)$$

Darstellung als Dezimalzahl: Zehnerstelle x und Einerstelle $10-x-1$

$$9(x+1) = (10-1)(x+1) = 10\,x + 9 - x \text{ (beachte: } 9-x \in \{0,1,\dots,8\})$$

Summe also immer $x+9-x=9$

$$x=1: 9\times 2 = 18 \to 1+8=9 \qquad x=8: 9\times 9 = 81 \to 8+1=9$$
$$x=2: 9\times 3 = 27 \to 2+7=9 \qquad x=7: 9\times 8 = 72 \to 7+2=9$$
$$x=3: 9\times 4 = 36 \to 3+6=9 \qquad x=6: 9\times 7 = 63 \to 6+3=9$$
$$x=4: 9\times 5 = 45 \to 4+5=9 \qquad x=5: 9\times 6 = 54 \to 5+4=9$$

**Das Umsetzen von Themen ist sehr willkommen!
Alle von mir selbst erstellten Unterlagen können gerne für den eigenen Unterricht verwendet werden.
Ich freue mich über Rückmeldungen an mechthild.thalhammer@uibk.ac.at.**

Dankeschön!

Ist für heute wirklich Schluss?
Ja, aber zum Ausprobieren für Daheim
gäbe es noch etwas ...

Benötigte Materialien

- Schnur
- Klebeband
- (Mozart-)Kugel oder Apfel oder Ähnliches
- Metronom oder https://www.musicca.com/de/metronom

Versuchsanleitung

- Fixiere einen (kugelförmigen) Körper an einer Schnur.
- Gib zwei unterschiedliche Schnurlängen vor, bringe das Pendel zum Schwingen, und bestimme mittels Metronom die zugehörige Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit.
- Berechne folgende Verhältnisse

$$V_1 = \frac{\text{Länge 1}}{\text{Länge 2}}\,, \qquad V_2 = \frac{\text{Schwingungszahl 1}}{\text{Schwingungszahl 2}}\,.$$

Forschungsfrage

- Erkennst Du einen Zusammenhang zwischen den Verhältnissen?

$$V_1 = \frac{\text{Länge 1}}{\text{Länge 2}}$$

$$V_2 = \frac{\text{Schwingungszahl 1}}{\text{Schwingungszahl 2}}$$

Auflösung

- Für die Verhältnisse von Längen und Schwingungszahlen

$$V_1 = \frac{\text{Länge 1}}{\text{Länge 2}}\,, \quad V_2 = \frac{\text{Schwingungszahl 1}}{\text{Schwingungszahl 2}}\,,$$

gilt folgender Zusammenhang

$$\frac{1}{\sqrt{V_1}} = V_2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{V_1} = V_2^2\,.$$

Mein Ergebnis

- Versuchsergebnis

$$\begin{aligned} &\text{Länge (in etwa) } 15\,\text{cm}: \quad &&\text{(in etwa) } 152 \text{ Schwingungen pro Minute}\,, \\ &\text{Länge (in etwa) } 30\,\text{cm}: \quad &&\text{(in etwa) } 108 \text{ Schwingungen pro Minute}\,. \end{aligned}$$

- Beobachtung: Bei Berechnung von Verhältnissen erkennt man näherungsweise Übereinstimmung

$$\sqrt{\frac{\text{Länge 2}}{\text{Länge 1}}} = \sqrt{\frac{30}{15}} = \sqrt{2} = 1.414\ldots \quad \approx \quad \frac{\text{Anzahl 1}}{\text{Anzahl 2}} = \frac{152}{108} = 1.407\ldots$$

Einzelfall oder allgemein gültiger Zusammenhang?

Allgemein gültiger Zusammenhang

Versuch und Modell für Schwingungsvorgang.

- Im Versuch wurde passable Übereinstimmung beobachtet

$$\begin{aligned} \text{Verhältnis Frequenzen} &\approx \frac{1}{\sqrt{\text{Verhältnis Längen}}}\,, \\ 1.407 &\approx 1.414\,. \end{aligned}$$

- Wird beispielsweise durch einfaches mathematisches Modell für Schwingungsvorgang bestätigt, welches besagt

$$\text{Frequenz der Schwingung} = \sqrt{\frac{\text{Fallbeschleunigung}}{\text{Länge des Pendels}}}\,.$$