

Zertifikat Lehrkompetenz: Praxisarbeit zum Thema  
Interaktion, Synchronisation und Netzwerke  
als Zielsetzungen in Forschung und Lehre  
Rückblick, Reflexion und Ausblick

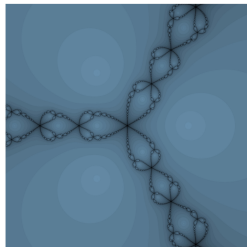
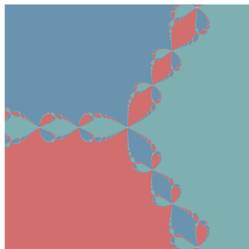


Illustration des Newton-Fraktales für die Gleichung  $z^3 = 1$ .

# Zielsetzung und Eckdaten

# Zentrale Aspekte

In dieser Praxisarbeit sollte reflektiert werden, wie sich folgende zentrale Aspekte im Rahmen von grundlegenden Lehrveranstaltungen im Bereich Mathematik konkret umsetzen lassen.

- Förderung von individuellen Interessen und Fähigkeiten
- Anleitung zu eigenständiger und selbstkontrollierter Arbeitsweise
- Heranbildung zukunftsweisender algorithmischer Kompetenzen

# Sinnbilder

Im Sinne einer forschungsgeleiteten Lehre wurden mathematische Fachbegriffe, welche für wissenschaftliche Tätigkeiten wesentlich waren, mit sinnbildlichen Darstellungen verknüpft und in den Kontext der universitären Lehre übertragen.

- Interaktion
- Synchronisation
- Netzwerke

# Zeitraahmen

- Das Zertifikat Lehrkompetenz wurde im Herbst 2021 begonnen.
- Die kollegialen Hospitationen von Robert Hafner und Fabian Ochs fanden im Jänner 2022 statt.
- Die Praxisarbeit wurde im Feber 2023 fertiggestellt.

# Fokus

Im Fokus der Praxisarbeit stand die Lehrveranstaltung

- **Numerische Mathematik 1** (VO 3 & PS 2, 4.5 & 3 ECTS)  
Wintersemester 2022/23  
Bachelorstudium Mathematik, Pflichtmodul 11 (3. Semester)

Entsprechende Überlegungen galten für die Fortführung

- **Numerische Mathematik 2** (VO 3 & PS 2, 4.5 & 3 ECTS)  
Sommersemester 2023  
Bachelorstudium Mathematik, Pflichtmodul 14 (4. Semester)

Es wurden Vorlesungsskripten und Lehrunterlagen für die begleitenden Proseminare erstellt.

# Voraussetzungen

Da die Lehrveranstaltungen *Numerische Mathematik 1 & 2* wesentlich auf Kenntnissen aufbauen, die sich Studierende in grundlegenden Lehrveranstaltungen des ersten Studienjahres angeeignet haben, wurden weitere Lehrveranstaltungen in die Überlegungen miteinbezogen.

- Analysis 1 (PS 2, 2.5 ECTS)  
Wintersemester 2021/22  
Bachelorstudium Atmosphärenwissenschaften / Physik (1. Semester)
- Analysis 2 (PS 2, 4 ECTS-AP)  
Sommersemester 2022  
Bachelorstudium Atmosphärenwissenschaften / Physik (2. Semester)
- Lineare Algebra (PS 2, 3 ECTS)  
Wintersemester 2022/23  
Bachelorstudium Informatik (1. Semester)

# Inhaltliche Richtlinien

Die **Inhalte** der Lehrveranstaltungen sind **international standardisiert** und umfassen insbesondere

- Grundlagen der Linearen Algebra  
(Lineare Gleichungssysteme, Eigenwertprobleme)
- Grundlagen der Analysis  
(Differential- und Integralrechnung in mehreren Veränderlichen)
- **Neue Sichtweisen im Rahmen der Numerik**  
(Methoden zur näherungsweise Lösung, Algorithmen, Implementierung)

Als Richtlinien wurden die geltenden

- Studienpläne

herangezogen.



# Grundprinzip

## Lehrkonzepte benötigen inhaltliche Konzepte

(vgl. Lernforscherin Elisabeth Stern (2003): *Es gibt kein Lernen ohne Inhalt.*)

# Studium und Berufsfelder

# Studium und Berufsfelder

Das Kapitel **Studium und Berufsfelder** widmete sich drei Aspekten.

Zunächst wurde reflektiert, welche der in einem Mathematikstudium erworbenen **Kenntnisse** und **Kompetenzen** wesentlich in Hinblick auf naheliegende Berufsfelder sind.

In Folge wurde dargestellt, dass Studierende des Faches Mathematik (oder verwandter Fächer, die mathematische Grundkenntnisse in ihren Curricula verankert haben), in den ersten Semestern fortwährend mit **Perspektivenwechseln** und neuen **Herausforderungen** konfrontiert sind.

Auf die vorangegangenen Überlegungen aufbauend wurden sechs **Leitgedanken** formuliert und Reflexionen zur konkreten **Umsetzung** angegeben.

# Einzelne Aspekte

## Leitgedanken

Begabungen, Aktives Tun, Fähigkeiten, Mut zu Fehlern, Fortschritte, Bilder und Buntheit

## Situation

**Heterogenität** (Studienrichtungen, **Semester**)

**Diversität** (Interesse an / Kenntnisse zu Informatik / Algorithmen / Matlab)

## Umsetzung (Heranbildung algorithmischer Kompetenzen)

Übungsblätter mit Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades und Zeitaufwandes  
Individuelle Wahl von Testbeispielen und Projektarbeiten  
Vorstellung und Wiederaufgreifen von zentralen Aufgabenstellungen und Lösungsstrategien  
(Vorlesung, erste / letzte Proseminareinheiten)  
Möglichkeit für Nachbereitungen (bis Mitte Feber 2023)

## Unerwartete Beobachtung

(Kaum) Austausch zwischen Studierenden (Teamarbeit bei Projekten)

# Situation – Heterogenität

Pflichtmodul *Numerische Mathematik 1*, vorgesehen für 3. Semester  
46 zur Vorlesung angemeldete Studierende  
41 Studierende sind für das Bachelorstudium Mathematik inskribiert  
35 Studierende haben die Steop abgeschlossen

1. Semester	1 Studierender
2. Semester	3 Studierende
<b>3. Semester</b>	<b>5 Studierende</b>
4. Semester	10 Studierende
5. Semester	6 Studierende
6. Semester	5 Studierende
7. Semester	8 Studierende
8. Semester	2 Studierende
9. Semester	2 Studierende
12. Semester	2 Studierende
14. Semester	1 Studierender
34. Semester	1 Studierender

Die Daten wurden vis:online entnommen (14. Februar 2023).

# Umsetzung – Freiräume durch Projektarbeiten (Auswahl)

Themenwahl der Projektarbeit	Programmiersprache
Hermite-Interpolation	Matlab
Bogenlängen von Kurven	Python
Nullstellen von Polynomen	Matlab
Bairstow-Verfahren und Fraktale	Matlab
Kettenbruchentwicklungen	Matlab
Gauß–Chebychev-Quadratur	Python
Orthogonale Legendre-Polynome	Python
Schiefer Wurf ohne / mit Luftwiderstand	Python
Zeitreihenanalyse Tagestemperaturen	Python
Vollständige Pivotsuche	Matlab
Primzahlenberechnungen	Python
Euklidischer Algorithmus	Python
Positionsbestimmungen aus Daten	C++
Explizites Eulerverfahren	Python
Heron-Verfahren	Python
Auswertung der Exponentialfunktion	Python
Bézier-Kurven	Python
Zweidimensionale Integration	Matlab
Vektoriteration	Python
Numerisches Differenzieren	Python
Gram–Schmidt-Orthogonalisierung	Matlab
Monte–Carlo-Methoden	Python
Jacobi-Iteration	Matlab

# Leitgedanken – Fortschritte

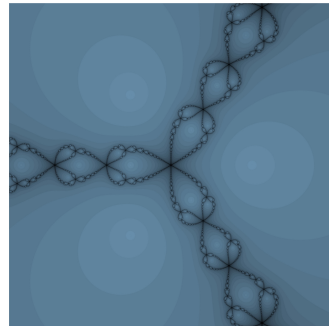
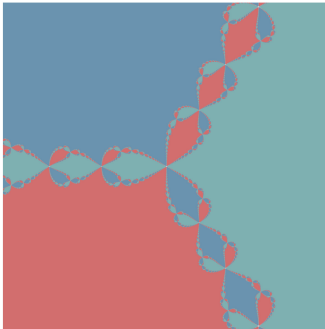


Illustration des Newton-Fraktales für die Gleichung  $z^3 = 1$ .

# Umsetzung – Beurteilungen (Stand 17. Feber 2023)

Die Beurteilungen der Vorlesung erfolgte aufgrund einer mündlichen (!) Prüfung, jene des Proseminares aufgrund der regelmäßigen Mitarbeit, einer Projektarbeit und deren Präsentation.

*Proseminar zur Numerischen Mathematik 1 (32 angemeldete Studierende)*

*Keine eindeutige Gruppenzuordnung (Wechsel während des Semesters)*

*Positive Beurteilung (21): Sehr gut 13, Gut 6, Befriedigend 1, Genügend 1 (2.-12. Sem.)*

*Offen (1): Genügend 1*

*Negative Beurteilung / Abbruch (10): Nicht Genügend 1, Stornierung der Anmeldung 9 (Abbruch teils krankheitsbedingt kurz vor Semesterende)*

*Vorlesung zur Numerischen Mathematik 1 (Stand Mitte Feber 2023)*

*Positive Beurteilung (14): Sehr gut 6, Gut 4, Befriedigend 1, Genügend 3 (2.-12. Sem.)*

*Negative Beurteilung / Wiederholung / Nicht-Erscheinen: Nicht Genügend 1, Wiederholung 4 (Gewährung einer zweiten Chance bei ausreichend vorhandenen Grundkenntnissen und deutlichen Lernlücken), Ausfall 1*

**Impulsfragen.** Geringere Belastbarkeit und abnehmendes Durchhaltevermögen? Nicht nur bei Studienanfänger:innen?  
Unterschiedliche Prägung in angewandten Studienrichtungen?



# Fachbegriffe und Sinnbilder

# Neue Sichtweisen und wissenschaftlicher Kontext

Wenn man sich als Forschende mathematischen Theorien und Problemstellungen widmet, Zugänge entwickelt und analysiert, so erweitert und vertieft dies persönliche Interessen und Kenntnisse.

Gleichzeitig führt die intensive Befassung mit verschiedenen Themenbereichen auch zu neuen Sichtweisen und Gewichtungen grundlegender Lehrinhalte.

Forschungstätigkeiten mit Kollegen aus Deutschland, Großbritannien und Spanien dienten als

- persönliche Inspiration und Motivation

sowie zur fortwährenden Reflexion

- der entstehenden Berufsfelder für Absolvent:innen,
- der Relevanz von Inhalten im internationalen Kontext,
- der verwendeten mathematischen Methoden und digitalen Mittel.

# Neue Sichtweisen und wissenschaftlicher Kontext

Die Fachbegriffe Interaktion, Synchronisation und Netzwerke wurden insbesondere in zwei wissenschaftlichen Arbeiten untersucht.

- T. Böhle, Ch. Kühn, M. Thalhammer  
On the reliable and efficient numerical integration of the Kuramoto model and related dynamical systems on graphs.  
International Journal of Computer Mathematics (2021).
- T. Böhle, Ch. Kühn, M. Thalhammer  
Community integration algorithms (CIAs) for dynamical systems on networks.  
Journal of Computational Physics (2022).

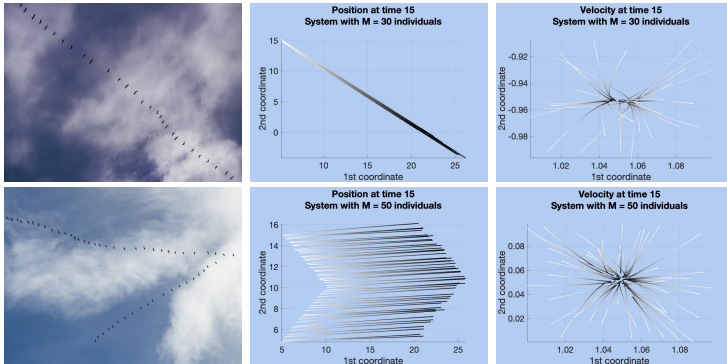
# Interaktion

## Fachliche Aspekte

Mathematische Modelle, die Interaktionen einer Gruppe von Individuen bzw. eines aus verschiedenen Komponenten zusammengesetzten komplexen Systemes beschreiben, haben vielfältige Anwendungen in verschiedenen Lebensbereichen.

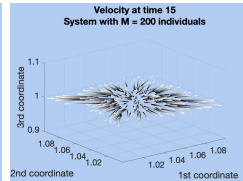
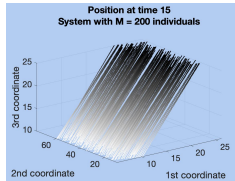
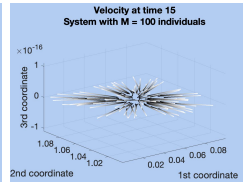
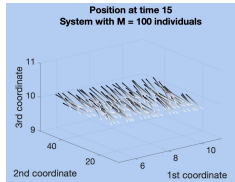
Aus persönlichem Interesse wurden zusätzliche Simulationen für Vogelschwärme durchgeführt. Man stellt dabei fest, dass trotz zunehmender Komplexität der Gruppenstruktur die Bewegungen der Vögel in allen Fällen koordiniert sind. Die Positionen und Geschwindigkeiten werden so abgestimmt, dass sich momentane Flugbahnen nicht kreuzen.

# Sinnbilder, Mathematische Modelle und Simulationen



First column: Visualisations of flocks of birds (Kranich17 and Minka2507 at pixabay.com). Second and third columns: Numerical simulations of Cucker–Smale systems modelling the collective behaviour of groups of individuals with pairwise interactions. The numbers of individuals and the positions at the initial time are inspired by real world situations. Varying colors from white to black represent the evolution of the positions and the associated velocities till the final time.

# Sinnbilder, Mathematische Modelle und Simulationen



First column: Visualisations of flocks of birds (Kranich17 and Minka2507 at pixabay.com). Second and third columns: Numerical simulations of Cucker–Smale systems modelling the collective behaviour of groups of individuals with pairwise interactions. The numbers of individuals and the positions at the initial time are inspired by real world situations. Varying colors from white to black represent the evolution of the positions and the associated velocities till the final time.

# Sinnbild und Umsetzung im Lehrkontext

Die angegebenen Graphiken von Vogelschärmen eignen sich als Sinnbilder für gruppendynamische Prozesse und das Erreichen von Lernzielen.

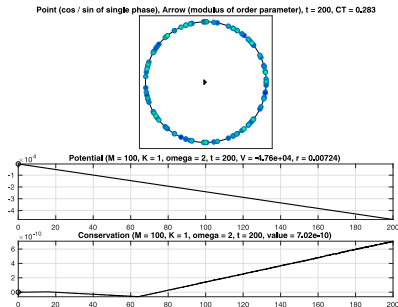
**Impulsfrage.** In Hinblick auf die Förderung von individuellen Interessen und Fähigkeiten, die Anleitung zu einer eigenständigen und selbstkontrollierten Arbeitsweise – welche Darstellung eignet sich als Sinnbild für (m)eine Lehrveranstaltung?



# Synchronisation

# Fachliche Aspekte

Illustration der Evolution von Systemen mit geringer, partieller und signifikanter Synchronisation. Die signifikante Veränderung eines einzigen Parameters hat zur Folge, dass sich die zunächst am Kreisrand stark variierenden Komponenten des Systemes synchronisieren.



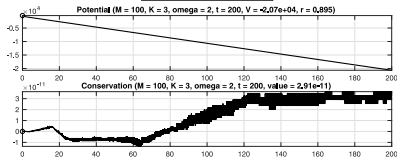
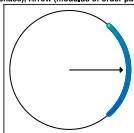
[techmath.uibk.ac.at/mecht/MyHomepage/Research/MovieKuramotoClassicalK1.m4v](http://techmath.uibk.ac.at/mecht/MyHomepage/Research/MovieKuramotoClassicalK1.m4v)

[techmath.uibk.ac.at/mecht/MyHomepage/Research/MovieKuramotoClassicalK3.m4v](http://techmath.uibk.ac.at/mecht/MyHomepage/Research/MovieKuramotoClassicalK3.m4v)

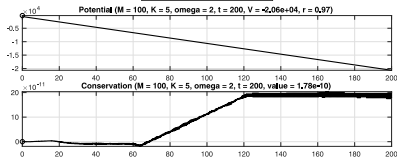
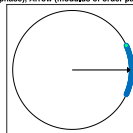
[techmath.uibk.ac.at/mecht/MyHomepage/Research/MovieKuramotoClassicalK5.m4v](http://techmath.uibk.ac.at/mecht/MyHomepage/Research/MovieKuramotoClassicalK5.m4v)

# Fachliche Aspekte

Point (cos / sin of single phase), Arrow (modulus of order parameter),  $t = 200$ ,  $CT = 0,22$



Point (cos / sin of single phase), Arrow (modulus of order parameter),  $t = 200$ ,  $CT = 0,216$



# Sinnbild und Umsetzung im Lehrkontext

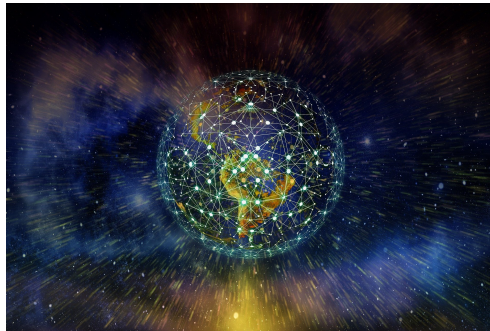
Angesichts der sehr divers zusammengesetzten Gruppe von Studierenden, wurde entschieden, einheitliche Regeln und quantitative sowie qualitative Beurteilungskriterien vorzugeben. Beispielsweise wurden für die Bewertung der Projektarbeiten als direkte Vergleichskriterien Korrektheit, Sorgfalt und Komplexität herangezogen. Die Gruppe wurde also in dieser Hinsicht synchronisiert.

**Impulsfrage.** Welcher Grad der Synchronisation soll bei einer heterogenen Studierendengruppe (in einer grundlegenden Lehrveranstaltung) angestrebt werden?

# Netzwerke

## Fachliche Aspekte

Netzwerke und Graphen werden verwendet, um sämtliche Verknüpfungen zwischen interagierenden Individuen zu beschreiben. Insbesondere im Zusammenhang mit komplexen Systemen und Vorgängen geht es darum, gewisse Strukturen zu erkennen und diese bei der Entwicklung praktikabler und effizienter Methoden zu nützen.



Gerd Altmann pixabay.com

# Netzwerke – Sinnbild und Umsetzung im Lehrkontext

Netzwerke eignen sich augenscheinlich als Sinnbilder für komplexe Inhalte, vielfältige thematische Verknüpfungen und diverse Sichtweisen, um auf mathematische Methoden zu kommen.

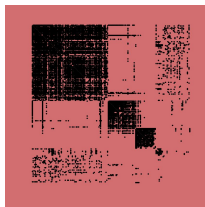
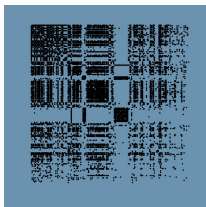
Als Interpretationen bieten sich auch Gruppenstrukturen oder die verbale und nonverbale Kommunikation zwischen Lernenden und Lehrenden an.

Netzwerke können ebenfalls herangezogen werden, um mögliche Perspektivenwechsel zu veranschaulichen. So kann man beispielsweise aus mehreren Wegen einen auswählen, um von einem Knoten zu einem entfernter liegenden Knoten zu gelangen.

Auch für Lehrende ist es lohnenswert, bekannte Inhalte unter neuen Perspektiven zu sehen.

# Sinnbild und Umsetzung im Lehrkontext

Neuartige Anordnungen ermöglichen es, spezielle Strukturen in (mathematischen) Netzwerken zu identifizieren. Als sinnbildliche Darstellungen dienen zwei Graphiken, wo links das ursprüngliche Netzwerk und rechts ein äquivalentes Netzwerk mit erkennbaren Strukturen zu sehen ist (vgl. Publikationen).

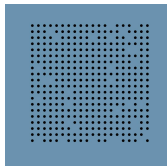


The graph of a real data network ([networkrepository.com/aves-wildbird-network.php](http://networkrepository.com/aves-wildbird-network.php)) is captured by the associated adjacency matrix comprising coefficients equal to one and zero. Left: Original representation, where the structure of the underlying communities and interactions is not evident. Right: An equivalent representation obtained by community detection and suitable permutation renders it possible to identify a block structure with relatively dense and sparse submatrices.



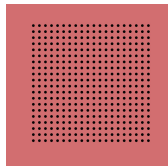
# Sinnbild und Umsetzung im Lehrkontext

Illustration einer entwickelten mathematischen Methode  
(vgl. Publikationen).



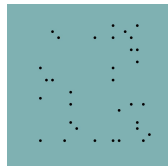
dense submatrix

=



full matrix

-



sparse submatrix

The key idea for the efficient evaluation of large-scale subsystems defined by relatively dense submatrices is to trace them back to full matrices. These correspond to classical subsystems and are solved in an efficient manner by global approximations and precomputations. Remaining contributions of relatively sparse submatrices require the summation of relatively few components.

## Sinnbild und Umsetzung im Lehrkontext

Die obige Darstellung zur Zerlegung eines Netzwerkes kann man auch im alltäglichen Kontext nachvollziehen.

- Falls beispielsweise eine Schilehrerin eine Gruppe mit **wenigen (erwachsenen) Mitgliedern** betreuen soll, so hat sie die Möglichkeit auf jede einzelne Person individuell einzugehen. Sie kann Abfahrten unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades empfehlen, jene begleiten, die auf der blauen Piste unterwegs sind, und mit den anderen Treffpunkte vereinbaren.
- Bei einer **größeren Gruppe** von Erwachsenen, die **homogene Voraussetzungen** vorweisen und ähnliche Interessen teilen, kann ebenfalls ein hoher Grad an Zufriedenheit erreicht werden.
- Entsprechend ist es in einer **größeren**, jedoch **weitgehend homogenen Gruppe**. Wenn nur wenige Personen andere Voraussetzungen mitbringen, kann man auf deren spezielle Bedürfnisse eingehen.

## Sinnbild und Umsetzung im Lehrkontext

- Signifikante Reibungsverluste sind hingegen bei größeren und inhomogenen Gruppen zu erwarten. Orientiert man sich an der Mitte, so ist es naturgemäß für die Mehrheit unpassend (Überforderung oder Unterforderung, Resignation oder Langeweile). Hier erscheint es sinnvoller, die gesamte Vielfalt und Freiraum für individuelle Zugänge zuzulassen.

In den Lehrveranstaltungen *Numerische Mathematik 1 & 2* wurde dies in Hinblick auf die Beurteilungen durch mündliche Prüfungen (VO) und individuell angepasste Projektarbeiten (PS) in die Praxis umgesetzt.

**Impulsfrage.** Welche (neuartigen) Formate fördern die Teamarbeit und den Diskurs in heterogenen Studierendengruppen? Ist es eine Chance für Universitäten, einer vermehrten Normierung entgegenzuwirken?

# Fazit und Impulsfragen

# Schlussfolgerung

Die vorangegangenen Beobachtungen und damit verbundenen Überlegungen (im Lehrkontext) können mit einem wissenschaftlichen Grundprinzip, welches sich speziell im Bereich der Numerischen Mathematik immer wieder bestätigt, verknüpft werden.

- Es ist nicht möglich, eine im universellen Sinn *beste* (didaktische) Methode anzugeben.
- Es geht vielmehr darum, situationsbezogen mehrere zuverlässige Zugänge miteinander zu vergleichen und dann eine Methode hervorzuheben, die unter einem bestimmten Gesichtspunkt von Vorteil ist.
- Wenn allerdings eine Situation sehr vielfältige Ausprägungen zulässt, ist die Reduktion auf ein einzelnes Kriterium oder eine einzelne Kennzahl nicht sinnvoll. Hier ist es passender, verschiedene Perspektiven in Betracht zu ziehen und entsprechende Erkenntnisse umfassend darzustellen.

Dies gilt ebenfalls für die Anwendung statistischer Methoden auf wenige, stark variierende Daten. Es ist allgemein bekannt, dass es kein valider statistischer Zugang ist, die in einem Datensatz vorhandene Vielfalt auf einzelne Kennwerte zu reduzieren.

## Persönliches Fazit

Die Teilnahme am Zertifikat Lehrkompetenz führte zu neuen Kenntnissen, neuen Perspektiven, neuen Kontakten und Kooperationen.

- Julia Strauhal (Fortbildung zu Kommunikation)
- Johannes Leitner (Lagerfeuergespräch)
- Iris Ruhmann (Springer Nature, Lehrbuch)
- Robert Hafner, Fabian Ochs

Was ich mitnehme?

- Auf positive Verstärkung setzen. Manches offen lassen.
- Für mich als Mathematikerin, geprägt durch fortwährendes kritisches Hinterfragen und die Klassifizierung in richtig / falsch, bleibt dies eine Herausforderung!

**Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!**