

Kapitel 1

Grundlegende Resultate zu monotonen Operatoren

1.1 p -Laplace-Operator

p -Laplace-Operator. Ein bedeutsames Beispiel eines monotonen Operators ist der p -Laplace-Operator (für reellwertige Funktion $w : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, euklidische Norm)

$$A_p : D(A_p) \subseteq X \longrightarrow X : w \longmapsto -\operatorname{div}\left(\|\nabla w(\cdot)\|^{p-2} \nabla w(\cdot)\right), \quad p \in (1, \infty).$$

In zwei Raumdimensionen erhält man die Relation

$$d = 2: \quad (A_p(w))(x) = -\partial_{x_1}\left(\|\nabla w(x)\|^{p-2} \partial_{x_1} w(x)\right) - \partial_{x_2}\left(\|\nabla w(x)\|^{p-2} \partial_{x_2} w(x)\right), \\ \|\nabla w(x)\| = \sqrt{(\partial_{x_1} w(x))^2 + (\partial_{x_2} w(x))^2}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;$$

in einer Raumdimension vereinfacht sich diese zu

$$d = 1: \quad -\partial_x\left(|\partial_x w(x)|^{p-2} \partial_x w(x)\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Der p -Laplace-Operator tritt beispielsweise bei der Modellierung von Diffusionsvorgängen, welche durch den Gradienten der Lösung bestimmt werden, auf. Abhängig vom Wert des Exponenten spricht man von Newtonschen-Fluiden¹ und Nicht-Newtonschen-Fluiden²; im einfachsten Spezialfall ergibt sich der negative Laplace-Operator³

$$A_2 : D(A_2) \subseteq X \longrightarrow X : w \longmapsto -\Delta w.$$

¹Exponent $p \in (1, 2)$. Im dilatantischen Fall nimmt die Viskosität (Zähflüssigkeit) des Fluides mit dem Gradienten der Geschwindigkeit ab. Ein Beispiel ist Zahnpasta, die erst zu fließen beginnt, wenn die ausgeübten externen Kräfte größer als die internen Strukturkräfte sind.

²Exponent $p \in (2, \infty)$. Im pseudo-plastischen Fall nimmt die Viskosität des Fluides mit dem Gradienten der Geschwindigkeit zu. Man beobachtet dies beispielsweise bei einer flüssigen Mischung aus Wasser und Speisestärke; das Fluid verfestigt sich, wenn die ausgeübten externen Kräfte größer als die internen Strukturkräfte sind. Siehe <https://www.youtube.com/watch?v=f2XQ97XHjVw>.

³Exponent $p = 2$. Im Newtonschen Fall, beispielsweise bei Luft und Wasser, ist die Scherspannung proportional zum Gradienten der Geschwindigkeit.