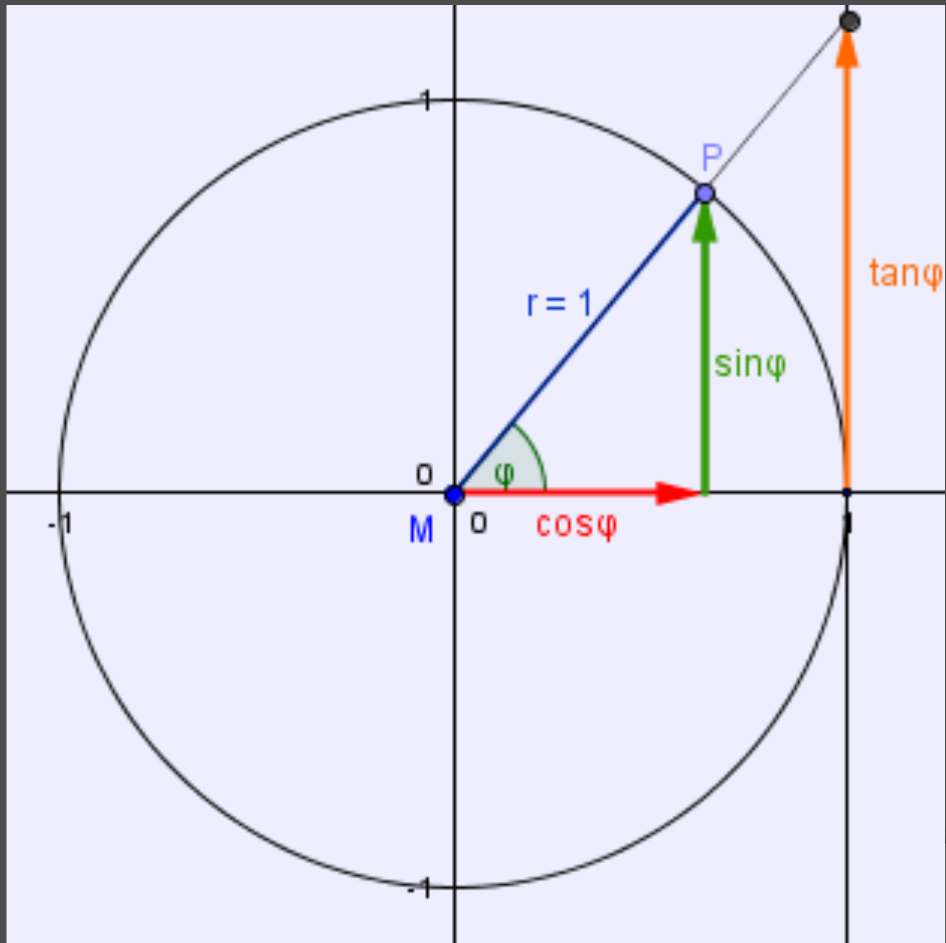
TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

EINFÜHRUNG TRIGONOMETRISCHER FUNKTIONEN IN DER SCHULE

Vorwissen:
rechtwinkliges Dreieck
Steigungsdreieck
Kreis

Der Einheitskreis



Definitionen:

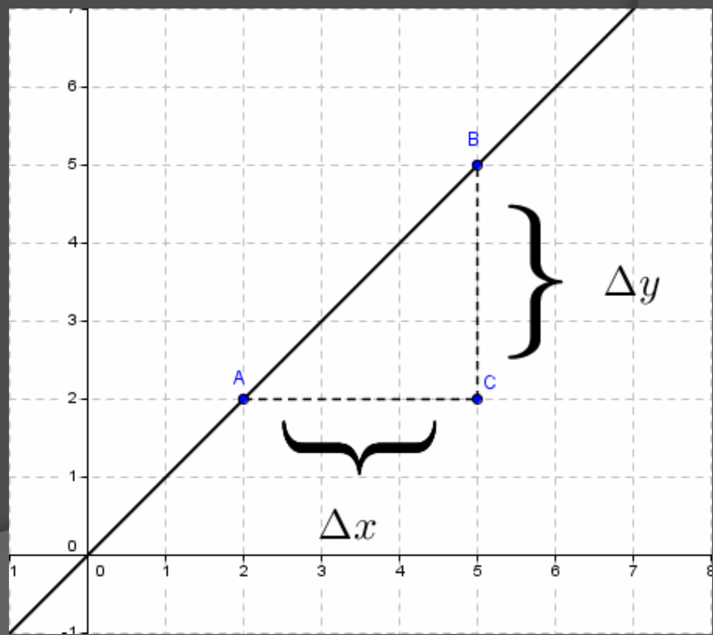
- Sin(α) = y-Koordinate
- Sin(α)= $Gegenkathete/Hypotenuse$
- Cos(α) = x-Koordinate
- Cos(α)= $Ankathete/Hypotenuse$

- Für α: 0°≤ α ≤ 360°

Die Tangensfunktion

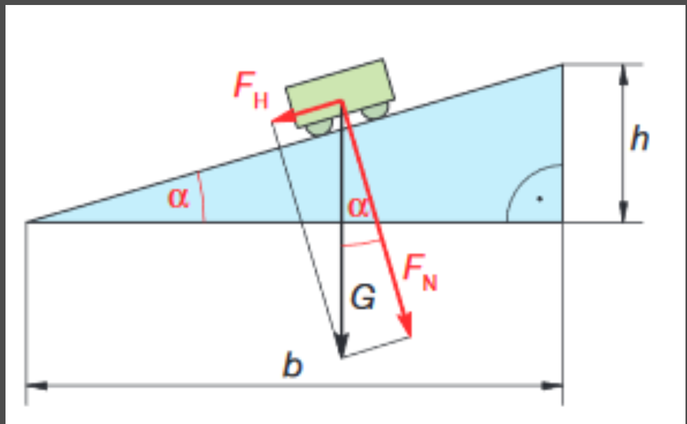
- Wird eingeführt über die Steigung einer Geraden: tan(α)= $\Delta y/\Delta x$
- Wird definiert durch:

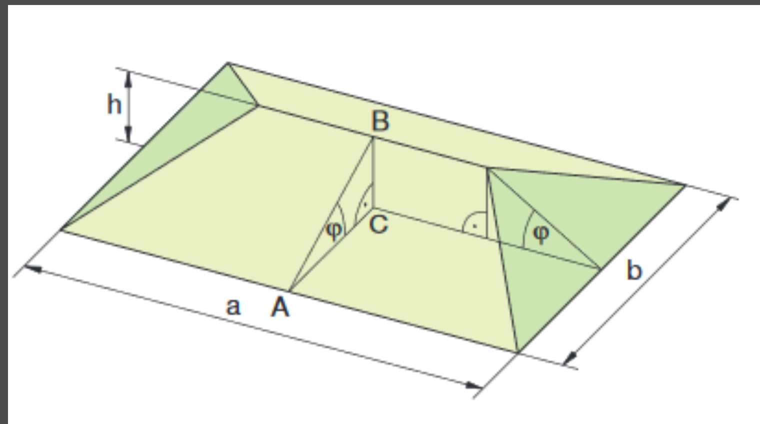
$\tan(\alpha) = Gegenkathete/Ankathete = \sin(\alpha)/\cos(\alpha)$



Anwendungsgebiete

- Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks
  - Vermessung, Kräfte, Projektionen, etc.



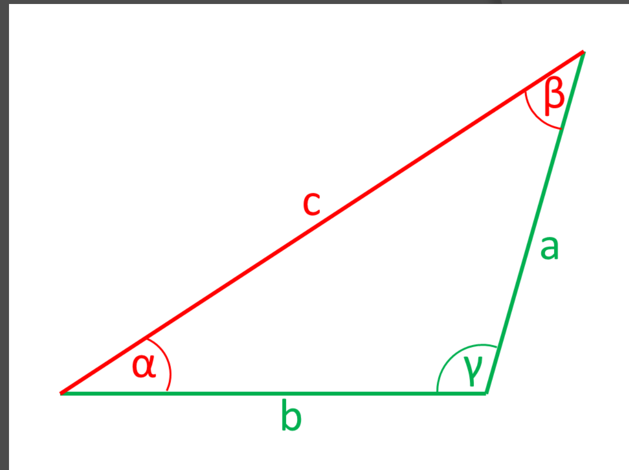


Weiterführendes in der HTL

- Kreisfunktionen mit negativen Winkeln
  - $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
  - $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
  - $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
- Rechnen mit Winkeln in Radiant und Grad
- Zusammenhang zwischen Kreisfunktionen
  - $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
  - $\tan(\alpha) = \sin(\alpha)/\cos(\alpha)$

Weiterführendes in der HTL

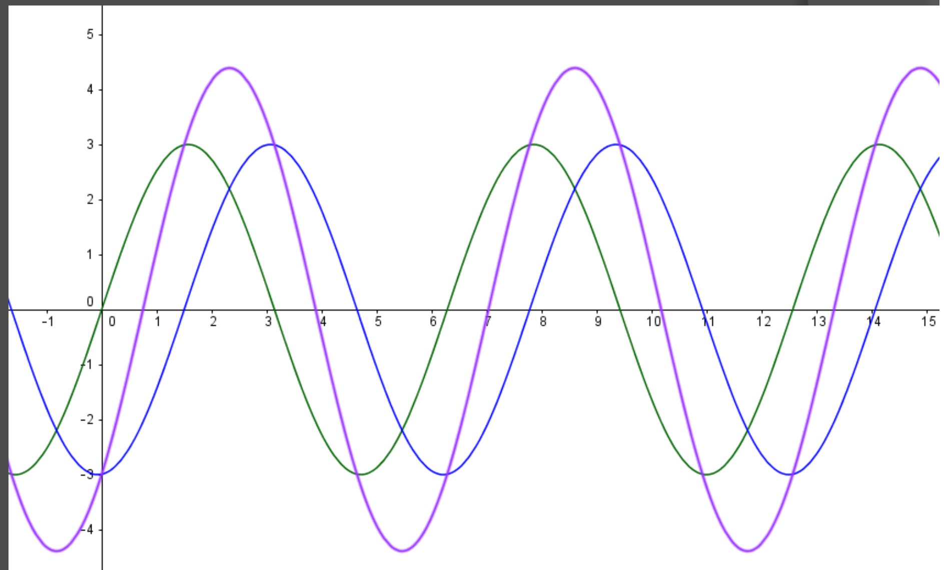
- Kosinussatz
  - $a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * \cos(\alpha)$
- Sinussatz
  - $a / \sin(\alpha) = b / \sin(\beta) = c / \sin(\gamma)$
- Summensätze
- Trigonometrische Gleichungen



Weiterführendes in der HTL

- Die allgemeine Sinusfunktion
  - y = A*sin(ωt+ϕ)
  - Zeigerdarstellung
  - Überlagerung von Sinusschwingungen

$$f(x) = 3\ \sin(x)$$
$$g(x) = 3\ \sin(x - 1.5)$$
$$h(x) = 3\ \sin(x) + 3\ \sin(x - 1.5)$$

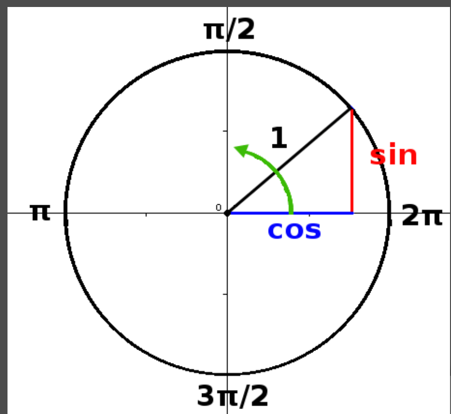


Einführung an der Uni

- Der Winkel wird in Bogenmaß angegeben:

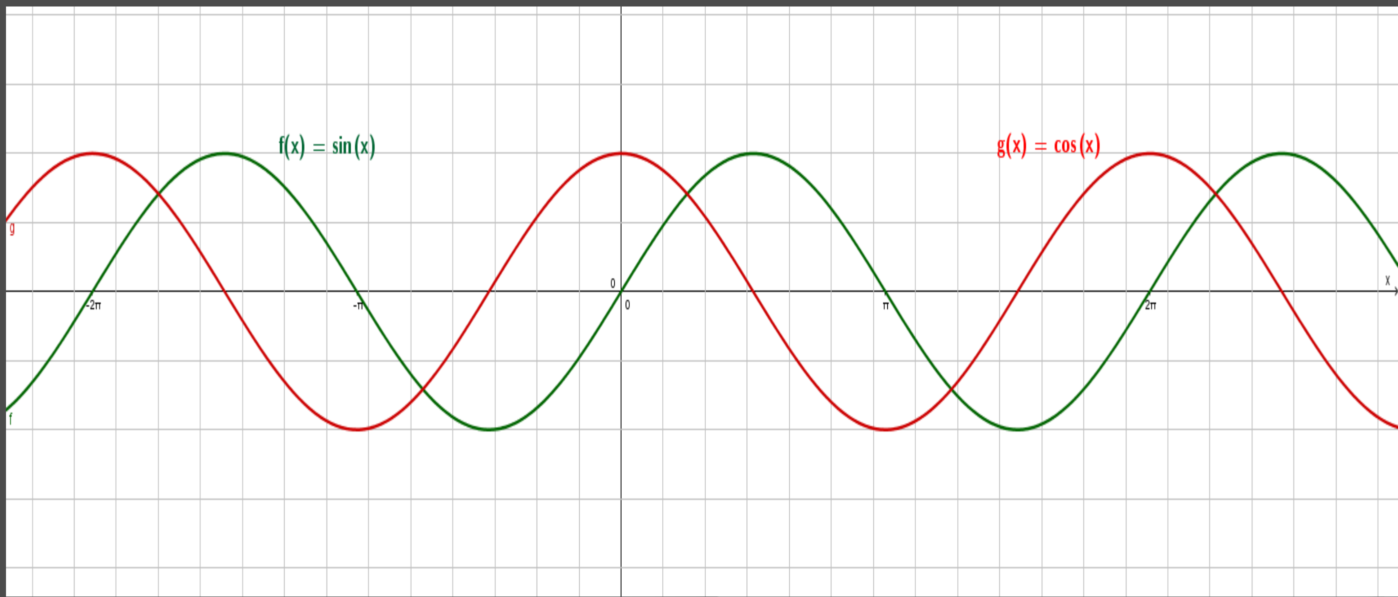
Grad	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Radianten	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π

- Einheitskreis: $\mathbb{S}^1 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$



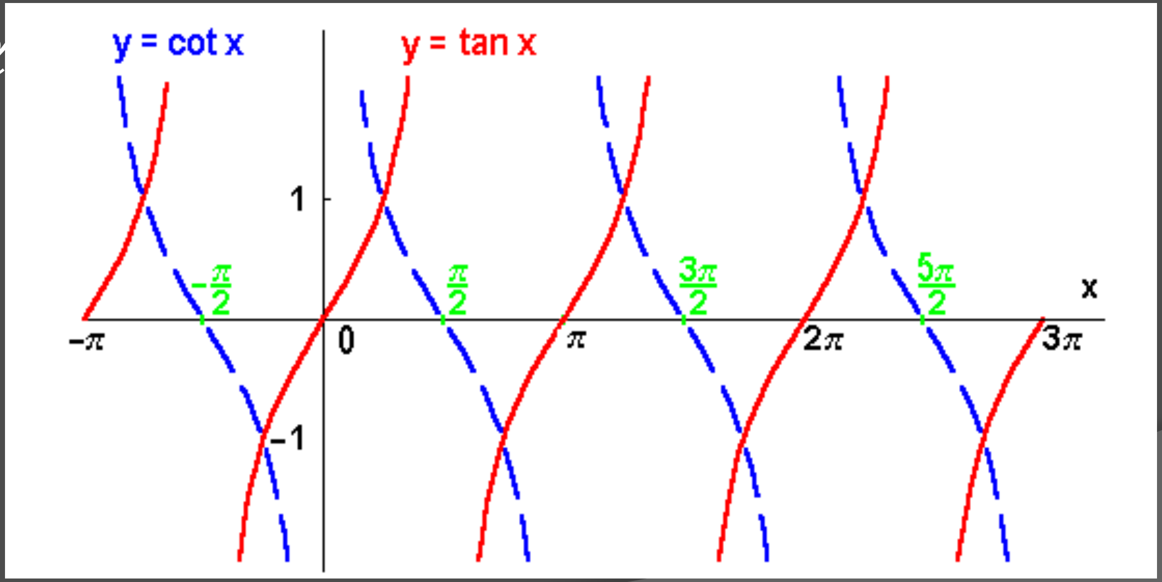
Sinus und Cosinus

- $\cos: \mathbb{R} \to [-1,1]: \alpha \longmapsto \cos\alpha$
- $\sin: \mathbb{R} \to [-1,1]: \alpha \longmapsto \sin\alpha$



Tangens und Cotangens

- tan: $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$: $\alpha \longmapsto \tan\alpha := \sin\alpha / \cos\alpha$
- cot: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$: $\alpha \longmapsto \cot\alpha := \cos\alpha / \sin\alpha$

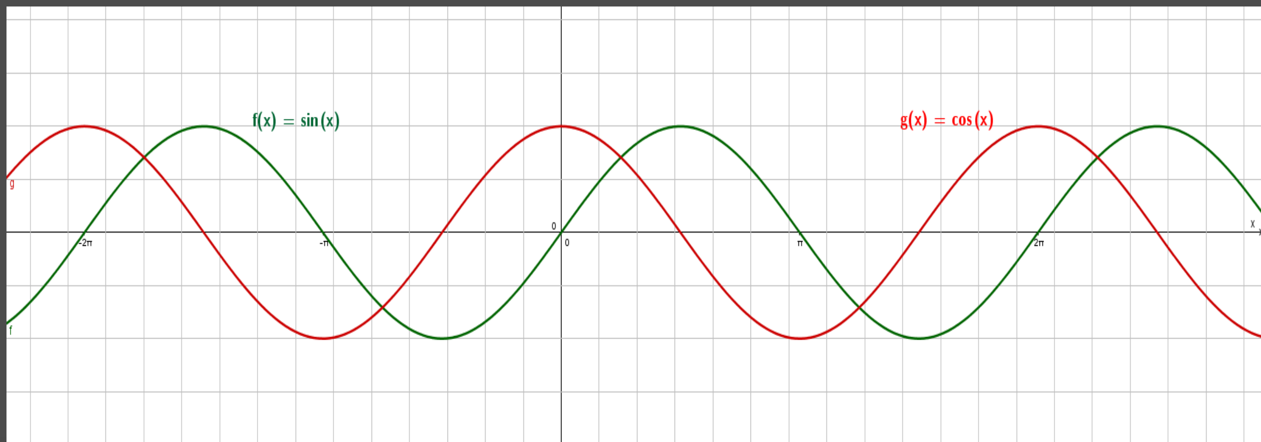


Elementare Identitäten zu Sinus und Cosinus

Elementare Identitäten zu Sinus und Cosinus

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

- ▷ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (Satz des Pythagoras)
- ▷ $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$ und $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$ (2π-periodisch)
- ▷ $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ (sin ist eine ungerade Funktion)
- ▷ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (cos ist eine gerade Funktion)
- ▷ $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$ und $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha$
- ▷ $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$ und $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$



Additionstheoreme

Additionstheoreme für Sinus und Cosinus und Folgerungen

Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

- $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
- $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$
- $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$

Spezielle Werte der trigonometrischen Funktionen:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$/$
$\cot\alpha$	$/$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

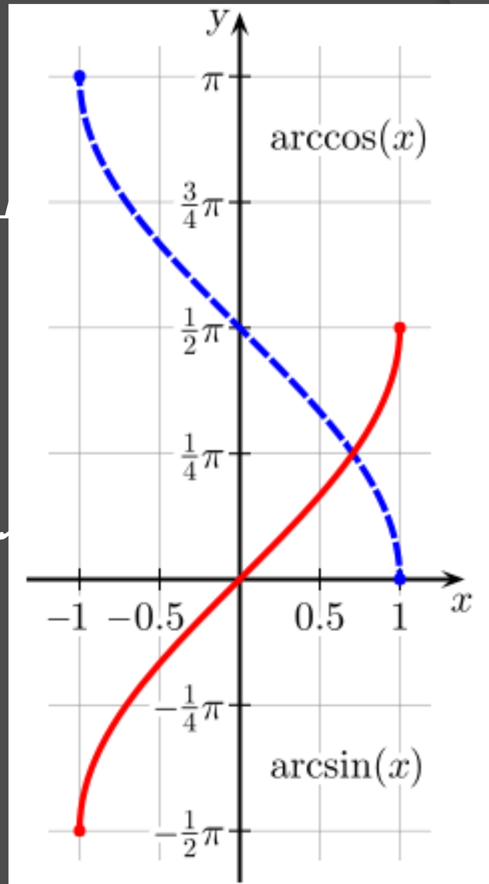
Umkehrfunktionen

- arcsin: $[-1,1] \to [-\pi/2\ ,\ \pi/2\ ]$:

$x \longmapsto \arcsin x := (\sin|\downarrow[-\pi/2\ ,\ \pi/2\ ]$

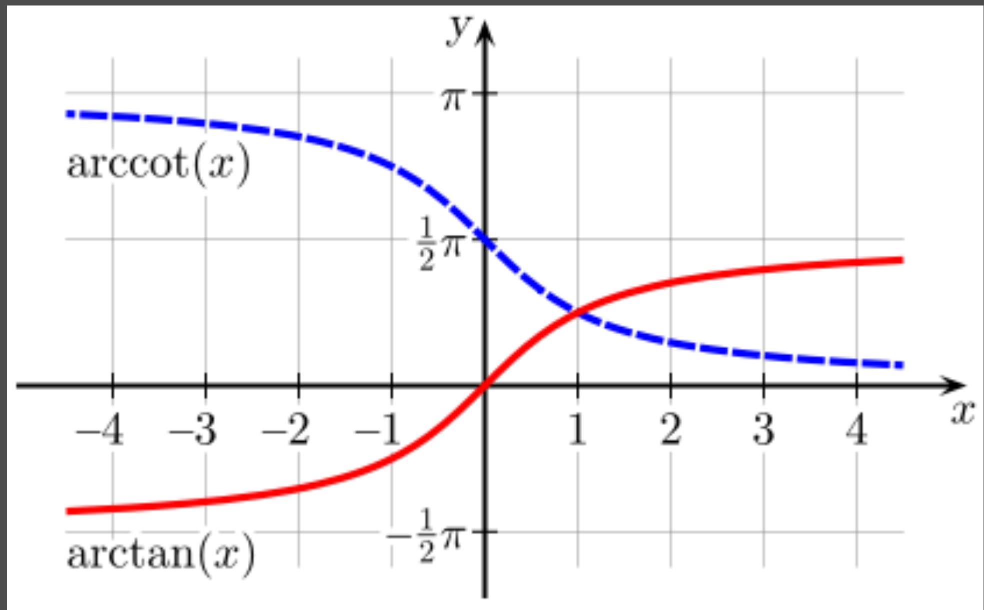
- arccos: $[-1,1] \to [0, \pi]$:

$x \longmapsto \arccos x := (cos|\downarrow[0, \pi]\ )\uparrow -1\ ($



- $\arctan:\mathbb{R}\to(-\pi/2\ ,\ \pi/2\ )$:

$x \longmapsto \arctan x := (tan|_{(-\pi/2\ ,\ \pi/2\ )})^{-1}(x)$



Eulersche Formeln

- $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$

- $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$

Taylorentwicklung

- Approximation durch Taylorentwicklung:

$$T_m(x\,;f,\xi) := \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k, \quad x \in \mathbb{R},$$

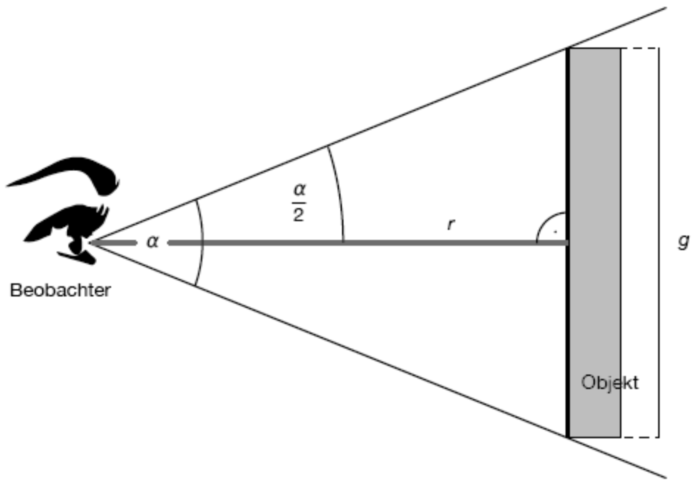
- Reihendarstellung:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{und} \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Beispiele aus der Schule

Sehwinkel

Der Sehwinkel ist derjenige Winkel, unter dem ein Objekt von einem Beobachter wahrgenommen wird. Die nachstehende Abbildung verdeutlicht den Zusammenhang zwischen dem Sehwinkel α, der Entfernung r und der realen („wahren") Ausdehnung g eines Objekts in zwei Dimensionen.



Quelle: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d3/ScheinbareGroesse.png [22.01.2015] (adaptiert)

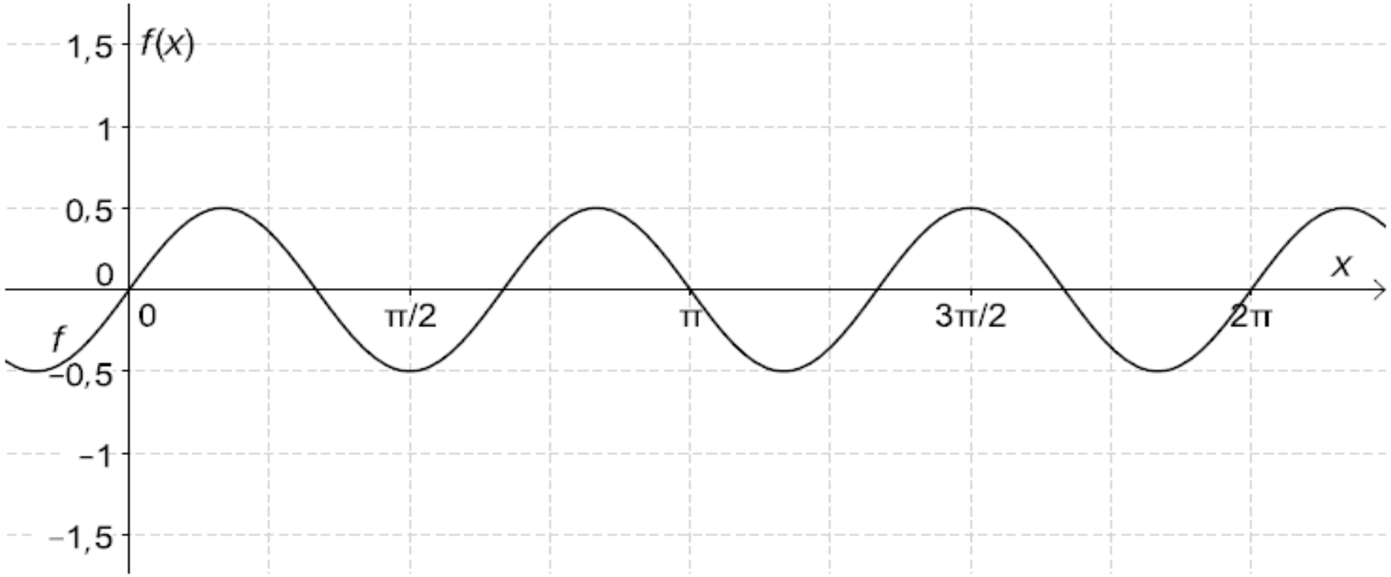
Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Formel an, mit der die reale Ausdehnung g dieses Objekts mithilfe von α und r berechnet werden kann!

$g =$ ______________________________

Sinusfunktion

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.



Aufgabenstellung:

Geben Sie die für den abgebildeten Graphen passenden Parameterwerte von f an!

a = ____________________________________

b = ____________________________________

Cosinus im Einheitskreis

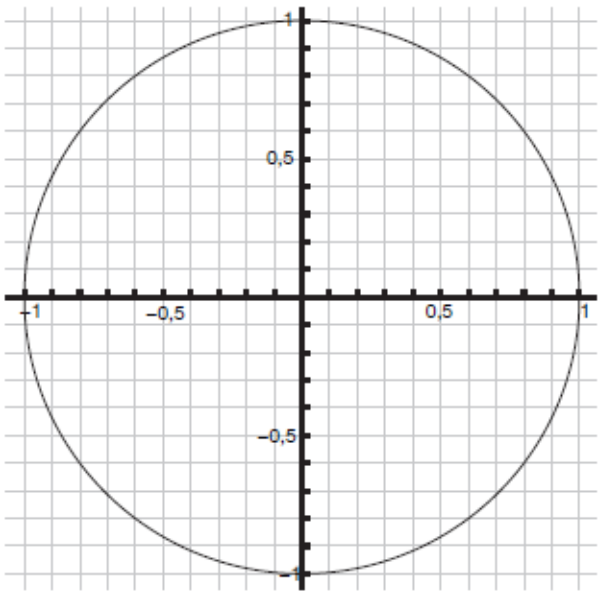
Aufgabennummer: 1_075	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AG 4.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie im Einheitskreis alle Winkel aus [0°; 360°] ein, für die $\cos \beta = 0{,}4$ gilt!

Achten Sie auf die Kennzeichnung der Winkel durch Winkelbögen.

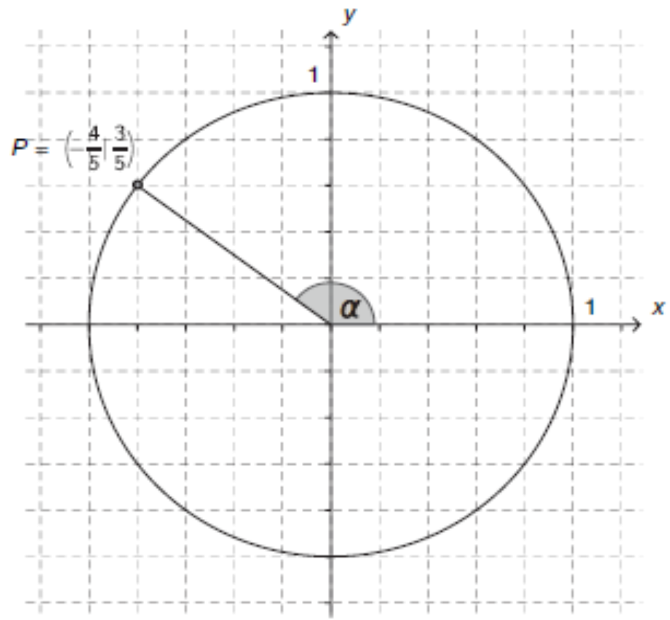


Einheitskreis*

Aufgabennummer: 1_160	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 4.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Der Punkt $P = \left(-\frac{4}{5} \,\middle|\, \frac{3}{5}\right)$ liegt auf dem Einheitskreis.



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie für den in der Abbildung markierten Winkel α den Wert von $\sin(\alpha)$!

$\sin(\alpha)$ = ______________________________

Quellen

- Einheitskreis: http://www.mathe-online.at/materialien/julian.langmann/files/Winkelfunktionen_am_EHK/ehk5.png
- Periodizität: http://grund-wissen.de/mathematik/_images/sinus-cosinus.png
- Steigungsdreieck: http://i.stack.imgur.com/Jtgdu.png
- Schiefwinkliges Dreieck: http://elsenaju.info/Rechnen/Trigonometrie.htm
- Schulbücher:
  - Dimensionen Mathematik 5 E.Dorner Verlag
  - Timischl, Kaiser; Ingenieurmathematik 1
  - Timischl, Kaiser; Ingenieurmathematik 2

- Skriptum zur Vorlesung Analysis 1 von Tobias Hell & Alexander Ostermann
- Praktikumsaufgaben zur Analysis von Tobias Hell & Georg Spielberger
- https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_uebungsaufgaben_gesamt_2014-09-15.pdf
- https://www.bifie.at/system/files/dl/KL15_PT1_AHS_MAT_T1_CC_AU_0.pdf