Differenzierbarkeit

C. Kogler, D. Mader, J. Massoudy, L. Pittner,
S. Trailovic & I. Wohlgemuth

Inhalt

- Definition
- Ableitungsregeln
- Sätze
- Zentralmatura Beispiele

Definition

Definition 3.1 (Ableitung). Es sei $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

- ▷ Der Definitionsbereich D sei eine Umgebung des Punktes $\xi \in D$. Die Funktion f heißt *differenzierbar* im Punkt ξ, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} =: f'(\xi)$$

  existiert und man nennt im Fall der Existenz $f'(\xi)$ *Ableitung* von f im Punkt ξ.
- ▷ Ist D offen, so heißt f *differenzierbar*, wenn f in allen Punkten $\xi \in D$ differenzierbar ist. Im Fall der Differenzierbarkeit, nennt man die Abbildung

$$f'\colon D \to \mathbb{R}\colon x \mapsto f'(x)$$

  die *Ableitung* von f.

Definition

Definition 3.25 (Einseitige Ableitungen). Der Defintionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ der Funktion $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine rechtsseitige bzw. linksseitige Umgebung des Punktes ξ. Dann heißt f in ξ *rechtsseitig* bzw. *linksseitig differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} =: f'_+(\xi) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{h\to 0-} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} =: f'_-(\xi)$$

existiert. Im Fall der Existenz nennt man $f'_+(\xi)$ bzw. $f'_-(\xi)$ die *rechtsseitige* bzw. *linksseitige Ableitung* von f in ξ.

Produktregel

Der Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ der Funktionen $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine Umgebung des Punktes $\xi \in D$. Weiters seien f und g in ξ differenzierbar. Dann ist auch f, g in ξ differenzierbar und es gilt

$$(f \cdot g)'(\xi) = f'(\xi) \cdot g(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi)$$

Quotientenregel

Der Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ der Funktionen $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine Umgebung des Punktes $\xi \in D$.
Weiters seinen f und g in ξ differenzierbar. Für $g(\xi) \neq 0$ ist f/g in ξ differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g(\xi)^2}$$

Kettenregel

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Umgebung des Punktes $\xi \in D$ und $g : D \to \mathbb{R}$ eine in ξ differenzierbare Funktion.

Weiters sei $E \subset \mathbb{R}$ eine Umgebung von $g(\xi)$ und $f : E \to \mathbb{R}$ in $g(\xi)$ differenzierbar. Dann ist $f \circ g$ in ξ differenzierbar und es gilt

$$(f \circ g)'(\xi) = f'(g(\xi))g'(\xi)$$

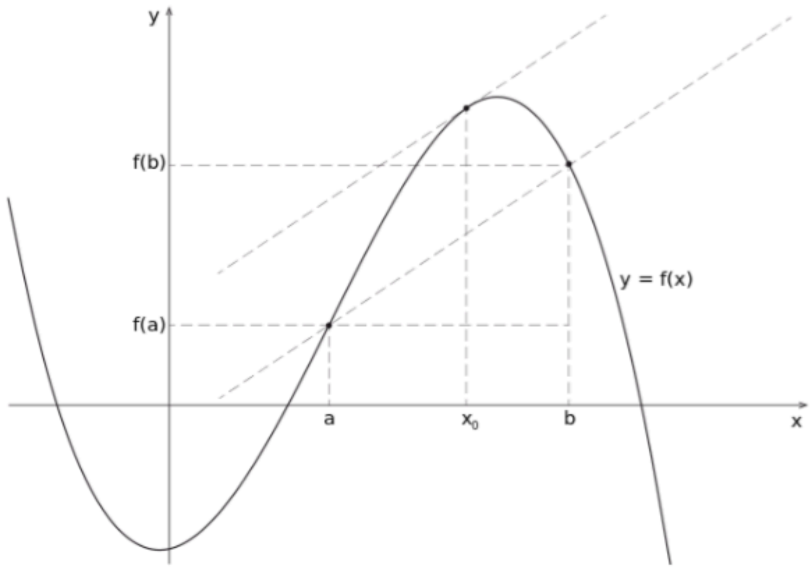
Umkehrregel

Es sei $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ eine Umgebung von $\xi \in \mathbb{D}$ die auf $\mathbb{D}$ definierte Funktion f bijektiv. Weiters setzen wir $\eta := f(\xi)$. Ist f in ξ differenzierbar und gilt $f'(\xi) \neq 0$, so ist f^{-1} in η differenzierbar und es gilt
$(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))} = \frac{1}{f'(\xi)}$

Mittelwertsatz

Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und auf (a,b) differenzierbar.

Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Verallgemeinerter MWS

Die beiden Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig und auf (a, b) differenzierbar.
Weiters gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$.
Dann ist

i) $g(a) \neq g(b)$

ii) $\exists \xi \in (a, b) : \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Wachstumsatz

Die stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei auf (a, b) differenzierbar.

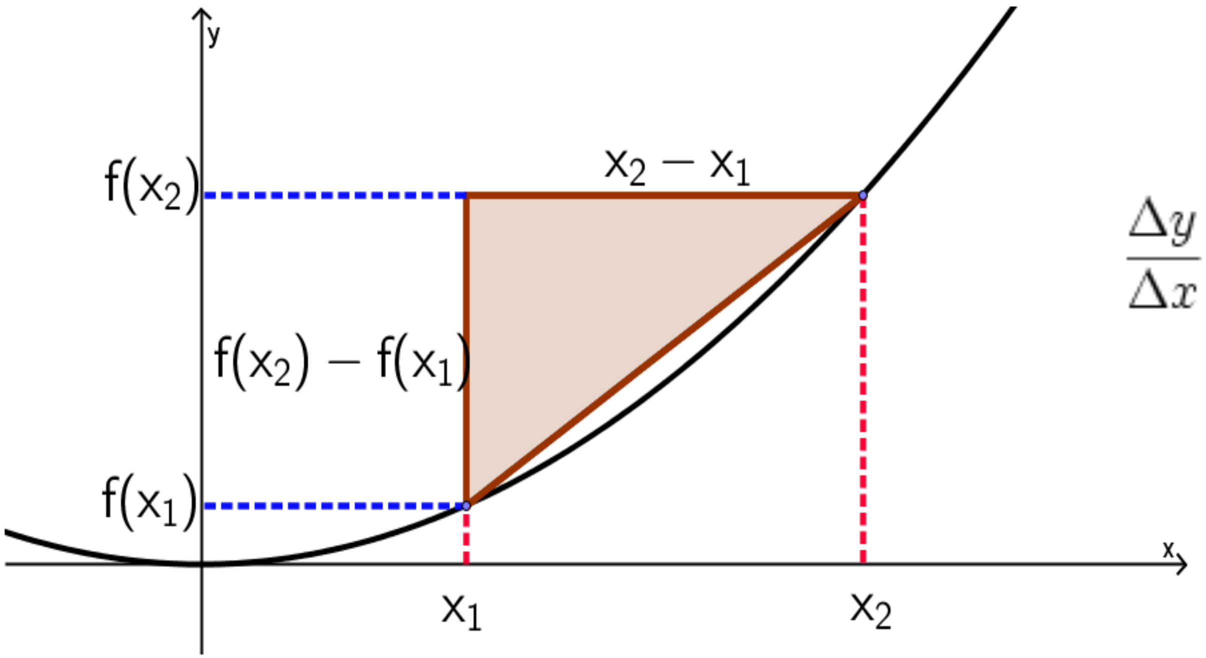
Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
&(1)\ f' > 0 \text{ auf } (a,b) \ \Rightarrow f \text{ streng monoton wachsend}\\
&(2)\ f' \geq 0 \text{ auf } (a,b) \ \Leftrightarrow f \text{ monoton wachsend}\\
&(3)\ f' = 0 \text{ auf } (a,b) \ \Leftrightarrow f \text{ konstant}
\end{aligned}
$$

Gegenbeispiel (1) $\Leftarrow$:

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ gilt $f'(x) = 3x^2$ und somit $f'(0) = 0$. Die Funktion f ist jedoch trotzdem streng monoton steigend.

Differenzenquotient



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Differenzenquotient*

Aufgabennummer: 1_151	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.3	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Eine Funktion s: $[0; 6] \to \mathbb{R}$ beschreibt den von einem Radfahrer innerhalb von t Sekunden zurückgelegten Weg.

Es gilt: $s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t$.

Der zurückgelegte Weg wird dabei in Metern angegeben, die Zeit wird ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$ in Sekunden gemessen.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Differenzenquotienten der Funktion s im Intervall $[0; 6]$ und deuten Sie das Ergebnis!

Möglicher Lösungsweg

$$\frac{s(6)-s(0)}{6-0}=\frac{30-0}{6}=5$$

Das Ergebnis bedeutet, dass die mittlere Geschwindigkeit (auch Durchschnittsgeschwindigkeit) des Radfahrers im Zeitintervall [0; 6] 5 m/s beträgt.

Lösungsschlüssel

Die Lösung gilt als richtig, wenn der Differenzenquotient richtig berechnet und gedeutet wurde.

Freier Fall – Momentangeschwindigkeit

Aufgabennummer: 1_094	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.3	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Für einen frei fallenden Körper ist eine Zeit-Weg-Funktion $s(t)$ durch $s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$ gegeben. Dabei ist $g \approx 10$ m/s² die Fallbeschleunigung.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Momentangeschwindigkeit in m/s zum Zeitpunkt $t = 2$ Sekunden!

Möglicher Lösungsweg

$v(t) = s'(t) = 10t$

$v(2) = 20$

Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 2$ Sekunden beträgt 20 m/s.

Lösungsschlüssel

Es muss ein Lösungsweg erkennbar sein. Die Angabe der korrekten Maßzahl ohne entsprechende Einheit ist ausreichend.

Ableitung von Sinus- und Cosinus-Funktion

Aufgabennummer: 1_010	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: AN 2.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind vier Funktionen und sechs Ableitungsfunktionen.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den Funktionen die richtige Ableitungsfunktion f' zu!

$f(x) = 2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$	
$f(x) = \cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$	
$f(x) = -2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$	
$f(x) = -\cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$	

A	$f'(x) = -\cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$
B	$f'(x) = 2 \cdot \cos(x) + \sin(x)$
C	$f'(x) = 2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$
D	$f'(x) = -\cos(x) - 2 \cdot \sin(x)$
E	$f'(x) = \cos(x) - 2 \cdot \sin(x)$
F	$f'(x) = 2 \cdot \sin(x) + \cos(x)$

Lösungsweg

$f(x) = 2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$	D
$f(x) = \cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$	C
$f(x) = -2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$	A
$f(x) = -\cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$	B

A	$f'(x) = -\cos(x) + 2 \cdot \sin(x)$
B	$f'(x) = 2 \cdot \cos(x) + \sin(x)$
C	$f'(x) = 2 \cdot \cos(x) - \sin(x)$
D	$f'(x) = -\cos(x) - 2 \cdot \sin(x)$
E	$f'(x) = \cos(x) - 2 \cdot \sin(x)$
F	$f'(x) = 2 \cdot \sin(x) + \cos(x)$

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn die vier Zuordnungen richtig erfolgt sind.

Wendepunkt

Aufgabennummer: 1_037	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x + 5$ sowie die Gleichung der dritten Ableitungsfunktion $f'''(x) = \frac{3}{2} \neq 0$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes der Funktion f!

Möglicher Lösungsweg

$f''(x) = \frac{3}{2}x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = -2$

$f(-2) = \frac{1}{4} \cdot (-8) + \frac{3}{2} \cdot 4 + 4 \cdot (-2) + 5 = 1 \;\Rightarrow$

Die Koordinaten des Wendepunktes lauten daher $W = (-2|1)$.

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn beide Koordinaten des Wendepunktes korrekt angegeben sind.

Monotonie*

Aufgabennummer: 1_154	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AN 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Die Funktion f ist im Intervall [2; 3] ____①____, weil ____②____.

①	
streng monoton fallend	☐
konstant	☐
streng monoton steigend	☐

②	
für alle $x \in [2; 3]$ $f''(x) > 0$ gilt	☐
für alle $x \in [2; 3]$ $f'(x) > 0$ gilt	☐
es ein $x \in [2; 3]$ mit $f'(x) = 0$ gibt	☐

Lösungsweg

①	
streng monoton steigend	☒

②	
für alle $x \in [2; 3]$ $f'(x) > 0$ gilt	☒

Lösungsschlüssel

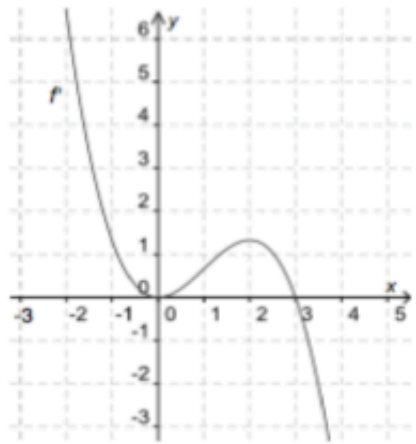
Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn für beide Lücken jeweils der richtige Satzteil angekreuzt ist.

Funktionseigenschaften*

Aufgabennummer: 1_149	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer Polynomfunktion f.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Funktion f hat an der Stelle $x = 3$ einen lokalen Hochpunkt.	☐
Die Funktion f ist im Intervall $[2; 5]$ streng monoton fallend.	☐
Die Funktion f hat an der Stelle $x = 0$ einen Wendepunkt.	☐
Die Funktion f hat an der Stelle $x = 0$ eine lokale Extremstelle.	☐
Die Funktion f ist im Intervall $[-2; 0]$ links gekrümmt.	☐

Lösungsweg

Die Funktion f hat an der Stelle $x = 3$ einen lokalen Hochpunkt.	☒
Die Funktion f hat an der Stelle $x = 0$ einen Wendepunkt.	☒

Lösungsschlüssel

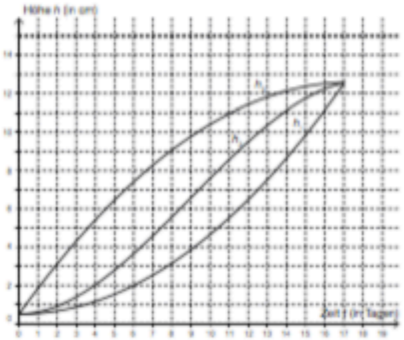
Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Pflanzenwachstum*

Aufgabennummer: 1_147	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Höhe h (in cm) von drei verschiedenen Pflanzen in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen) wurde über einen längeren Zeitraum beobachtet und mittels geeigneter Funktionen h_1 (für Pflanze 1), h_2 (für Pflanze 2) und h_3 (für Pflanze 3) modelliert. Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen der drei Funktionen h_1, h_2 und h_3.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Der Graph der Funktion h_1 ist im Intervall [1; 5] links gekrümmt.	☐
Die Wachstumsgeschwindigkeit von Pflanze 1 nimmt im Intervall [11; 13] ab.	☐
Während des Beobachtungszeitraums [0; 17] nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit von Pflanze 2 ständig zu.	☐
Für alle Werte $t \in [0; 17]$ gilt $h_3''(t) \leq 0$.	☐
Für alle Werte $t \in [3; 8]$ gilt: $h_1'(t) < 0$.	☐

Lösungsweg

Der Graph der Funktion h_1 ist im Intervall [1; 5] links gekrümmt.	☒
Für alle Werte $t \in [0; 17]$ gilt $h_3''(t) \leq 0$.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Danke für eure Aufmerksamkeit!