Integralrechnung

Alexander F,Christoph K, Jasmin L,
Dominik M, Monica P & Sarah S.

20. April 2016

Riemann-Integral

Eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow R$ heißt $Riemann - integrierbar$, wenn es ein $I \in \mathbb{R}$ mit

$$lim_{|\mathcal{Z}| \to 0} S(f, \mathcal{Z}, \xi) = I$$

gibt, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$ mit zugehörigen Stützstellen ξ gilt, dass

$$|\mathcal{Z}| < \delta \Longrightarrow |S(f, \mathcal{Z}, \xi) - I| < \varepsilon.$$

In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f(x) dx := I$$

das $Riemann - Integral$ von f.

Riemann-Integral

- Eine Riemann-integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir auch einfach als *integrierbar*. Das Riemann-Integral $\int_a^b f(x)dx$ nennt man auch *bestimmtes Integral*.
- Speziell setzt man

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

und, falls $a < b$,

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Linearität, Monotonie und Positivität

Es seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei integrierbare Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- Die Linearkombination $\alpha f + g$ ist integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

- Aus $f \leq g$ folgt

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Für $f \geq 0$ gilt somit insbesondere

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$$

Ober- und Untersumme

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und

$$\mathcal{Z} := X_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b, n \in \mathbb{N},$$

eine Zerlegung von [a,b], so setzen wir

$$m_i = \inf f([x_{i-1}, x_i]) \quad \text{und} \quad M_i = \sup f([x_{i-1}, x_i])$$

für $i = 1, \ldots, n$. Man nennt

$$U(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

Untersumme von f zur Zerlegung Z und

$$O(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Obersumme von f zur Zerlegung $\mathcal{Z}$.

Stammfunktion

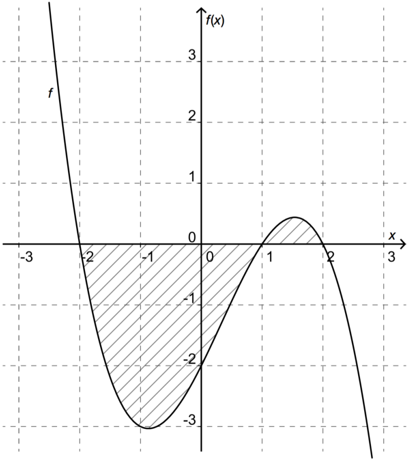
Es sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Eine differenzierbare Funktion $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von f, falls $F' = f$ gilt.

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion und zwar die Summenfunktion

$$F_\xi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \int_\xi^x f(x)\mathrm{d}x \ \mathit{mit}\ \xi \in [a, b]$$

Es sei $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sowie $G : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine weitere differenzierbare Funktion. Dann gilt:

$$G \textit{ ist Stammfunktion von } f \ \Leftrightarrow\ F - G \textit{ ist konstant}$$



Aufgabenstellung:

Geben Sie einen korrekten Ausdruck für A mithilfe der Integralschreibweise an!

A = ____________________

Bestimmte Integrale

Aufgabennummer: 1_060	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: AN 4.3	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

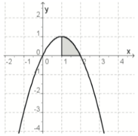
Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 2x$.

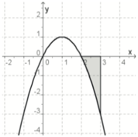
Die nachstehende Tabelle zeigt Graphen der Funktion mit unterschiedlich schraffierten Flächenstücken.

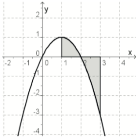
Aufgabenstellung:

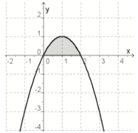
Beurteilen Sie, ob die nachstehend angeführten Integrale den Flächeninhalt einer der markierten Flächen ergeben, und ordnen Sie entsprechend zu!

Beispiele





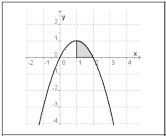
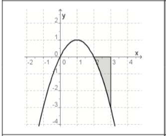
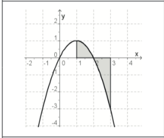
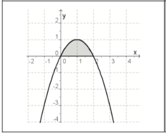




A	$2 \cdot \int_1^2 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x$
B	$\int_1^3 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x$
C	$\int_1^2 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x + \left\lvert \int_2^3 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x \right\rvert$
D	$\int_0^1 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x - \int_1^2 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x$
E	$\left\lvert \int_2^3 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x \right\rvert$
F	$\int_1^2 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x$

Beispiele

Lösungsweg

	F
	E
	C
	A

A	$2 \cdot \int_1^2 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x$
B	$\int_1^3 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x$
C	$\int_1^2 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x + \left\|\int_2^3 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x\right\|$
D	$\int_0^1 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x - \int_1^2 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x$
E	$\left\|\int_2^3 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x\right\|$
F	$\int_1^2 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x$

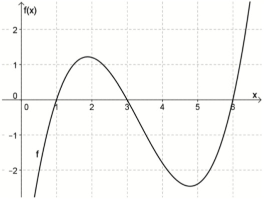
Beispiele

Aussagen über bestimmte Integrale

Aufgabennummer: 1_113	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: AN 4.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die stetige reelle Funktion f mit dem abgebildeten Graphen hat Nullstellen bei $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 6$.



Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Aussagen ist/sind zutreffend?
Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x < 2$	☐
$\int_1^6 f(x)\mathrm{d}x < 0$	☐
$\left\| \int_3^6 f(x)\mathrm{d}x \right\| < 6$	☐
$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x + \int_3^6 f(x)\mathrm{d}x > 0$	☐
$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x > 0$ und $\int_3^6 f(x)\mathrm{d}x < 0$	☐

Lösungsweg

$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x < 2$	☒
$\int_1^6 f(x)\mathrm{d}x < 0$	☒
$\lvert \int_3^6 f(x)\mathrm{d}x \rvert < 6$	☒
$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x > 0$ und $\int_3^6 f(x)\mathrm{d}x < 0$	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die vier zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Substitutionsregel

Satz 4.28 (Substitutionsregel). Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ zwei Intervalle sowie $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige und $g\colon J \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $g(J) \subset I$. Dann gilt

$$\int f\left(g(x)\right) g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=g(x)}.$$

Beweis. Ist $F\colon I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, so gilt nach der Kettenregel

$$(F \circ g)'(x) = F'\left(g(x)\right) g'(x) = f\left(g(x)\right) g'(x).$$

Demnach erhalten wir

$$\int f\left(g(x)\right) g'(x)\,\mathrm{d}x = (F \circ g)(x) + C = \int f(y)\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=g(x)}. \qquad \square$$

Substitutionsregel

- $\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,dx = \left[y = \arctan x,\ dy = \frac{dx}{1+x^2} \right] = \int e^y\,dy$

Satz 4.31 (Partielle Integration). Es seien $f, g \in \mathcal{C}^1(I)$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall bezeichne. Dann gilt

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus der *Produktregel*, denn es gilt

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Bemerkung 4.32. Ist $[a, b] \subset I$, so erhält man für bestimmte Integrale die Formel

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

für die *partielle Integration.*

Partielle Integration

$$\triangleright \int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (x-1)\mathrm{e}^x + C$$

Volumen

Durch die Drehung eines Funktionsgraphen um eine Achse des Koordinatensystems entsteht ein Rotationskörper.
Die Volumsberechnung verfolgt folgende Idee:
Man zerlegt den entstandenen Körper in beliebig viele beliebig dünne Scheiben. Diese werden mithilfe der Integralrechnung aufsummiert.

Volumen

Das Volumen dieses, um die x-Achse rotierten Funktionsgraphen, lässt sich wie folgt berechnen:
Formel eines Zylinders:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V_x = f(x)^2 \cdot \pi \cdot \Delta x$$

Somit entstehen Zylinder mit Radius $f(x)$ und Höhe Δx. Mit der Integralrechnung können wir nun alle Scheiben aufsummieren. Das Intervall a bis b stellt dabei die Gesamthöhe des Körpers dar.

$$V = \int_a^b f(x)^2 \cdot \pi \mathrm{dx}$$

Volumen eines Drehkegels

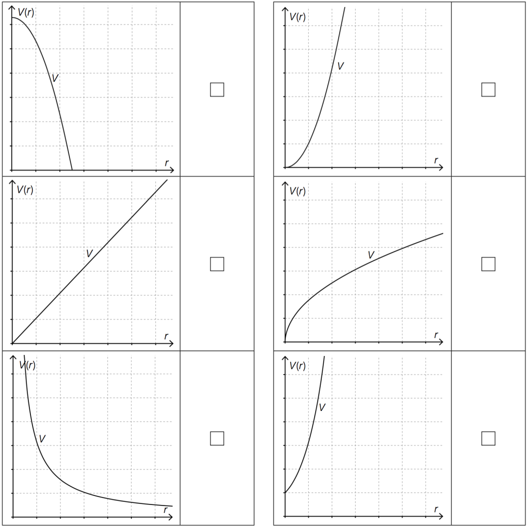
Das Volumen V eines Drehkegels hängt vom Radius r und der Höhe h ab. Es wird durch die Formel

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

beschrieben.

Aufgabenstellung:
Eine der nachstehenden Abbildungen stellt die Abhängigkeit des Volumens eines Drehkegels vom Radius bei konstanter Höhe dar. Kreuzen Sie die entsprechende Abbildung an!

Volumen eines Drehkegels

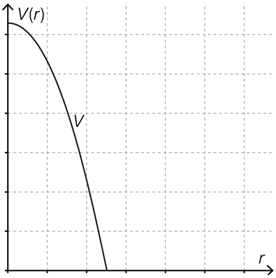


Welcher Graph stellt die Lösung dar?
Man kann hier sehr gut mit einem Ausschlussverfahren arbeiten.

Ankreuzaufgabe

Folgende Punkte sprechen für/gegen dieses Bild als richtige Lösung:

- Die Funktion bildet 0 nicht auf 0 ab.
- Das Volumen nimmt mit steigendem Radius ab.



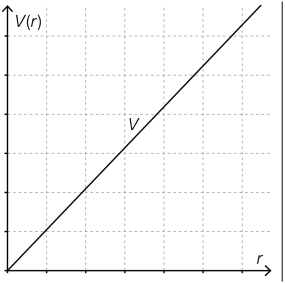
☐

- Durch die Drehung um die y-Achse würde ein sektglasartiger Körper entstehen.

Ankreuzaufgabe

Folgende Punkte sprechen für/gegen dieses Bild als richtige Lösung:

- Die Funktion bildet 0 auf 0 ab. ✓
- Der Funktionsgraph ist eine Gerade - das Volumen muss aber quadratisch zunehmen.



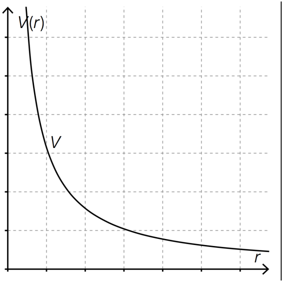
☐

- Durch die Drehung um die x-Achse würde ein Kegel entstehen.

Ankreuzaufgabe

Folgende Punkte sprechen für/gegen dieses Bild als richtige Lösung:

- Die Funktion bildet 0 nicht auf 0 ab.
- Ein Volumen von 0 wäre nicht definiert.
- Das Volumen nimmt mit steigendem Radius ab.



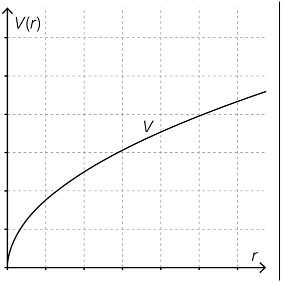
☐

- Eine Rotation würde nur ohne 0 einen Sinn machen.

Ankreuzaufgabe

Folgende Punkte sprechen für/gegen dieses Bild als richtige Lösung:

- Die Funktion bildet 0 auf 0 ab. ✓
- Der Funktionsgraph nimmt nicht quadratisch zu.
- Das Volumen nimmt mit steigendem Radius zu.✓



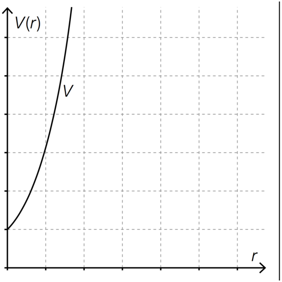
☐

- Durch Die Drehung würde ein sektglasartiger Körper entstehen.

Ankreuzaufgabe

Folgende Punkte sprechen für/gegen dieses Bild als richtige Lösung:

- Die Funktion bildet 0 nicht auf 0 ab - hat ein Anfangsvolumen.
- Die Funktionswerte nehmen quadratisch zu. ✓
- Das Volumen nimmt mit steigendem Radius zu. ✓



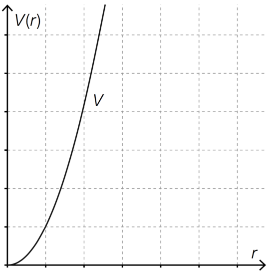
☐

- Durch Die Drehung würde ein sektglasartiger Körper entstehen.

Ankreuzaufgabe

Folgende Punkte sprechen für dieses Bild als richtige Lösung:

- Die Funktion bildet 0 auf 0 ab. ✓
- Die Funktionswerte nehmen quadratisch zu.✓
- Das Volumen nimmt mit steigendem Radius zu.✓



☐

- Durch Die Drehung würde ein sektglasartiger Körper entstehen.

Volumen eines Drehkegels

Herleitung:

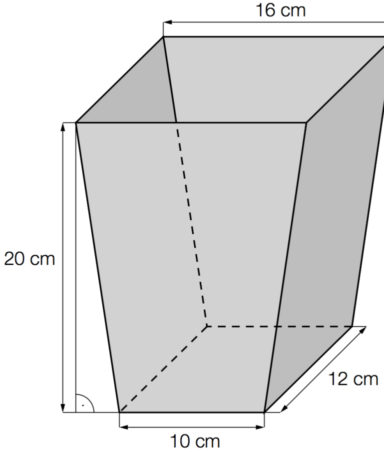
$$V = \pi \int_0^h (\frac{r}{h} \cdot x)^2 \mathrm{dx} = \pi \int_0^h (\frac{r^2}{h^2} \cdot x^2) \mathrm{dx}$$

$$= \pi \left[\frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \pi \left(\frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} \right)$$

$$= \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Aufgabe 3 - Füllen eines Gefäßes

Aufgabenstellung: Der Innenraum eines 20 cm hohen Gefäßes hat in jeder Höhe h eine rechteckige, horizontale Querschnittsfläche. Ihre Länge beträgt am Boden 10 cm und nimmt dann mit der Höhe linear bis auf 16 cm zu, ihre Breite beträgt in jeder Höhe 12 cm.



Aufgabe 3 - Füllen eines Gefäßes

(a) Geben Sie eine Formel für die Länge $a(h)$ der rechteckigen Querschnittsfläche in der Höhe h an!
In das Gefäß wird Flüssigkeit gefüllt. Geben Sie an, was der Ausdruck $12 \cdot \int_0^{15} \mathrm{a}(h)\,\mathrm{d}h$ in diesem Zusammenhang bedeutet!

Aufgabe 3 - Füllen eines Gefäßes

Lösung:

Die minimale und die maximale Länge der rechteckigen Querschnittsfläche treten bei den beiden Höhen $h = 0$ und $h = 20$ cm auf:

$$\begin{aligned} a(0) &= 10 \\ a(20) &= 16 \\ a(h) &= k \cdot h + c \qquad\qquad k, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Durch einfaches Umformen erhalten wir die Gleichung für $a(h)$:

$$10 = k \cdot 0 + c \iff c = 10$$

$$16 = k \cdot 20 + 10 \iff k = \frac{16 - 10}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$\implies a : [0; 20] \to \mathbb{R}, h \mapsto a(h) := \frac{3}{10} \cdot h + 10$$

Aufgabe 3 - Füllen eines Gefäßes

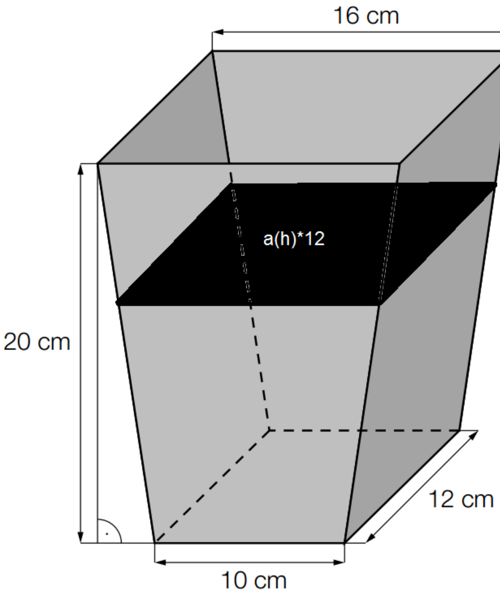
(a) Geben Sie eine Formel für die Länge $a(h)$ der rechteckigen Querschnittsfläche in der Höhe h an!
In das Gefäß wird Flüssigkeit gefüllt. Geben Sie an, was der Ausdruck $12 \cdot \int_0^{15} \mathrm{a}(h)\,\mathrm{d}h$ in diesem Zusammenhang bedeutet!

Lösung:

In diesem Zusammenhang gibt der oben genannte Ausdruck das Volumen (in cm^3), der in das Gefäß eingefüllten Flüssigkeit bei einem Wasserstand von 15 cm an:

$$\begin{aligned} V := 12 \cdot \int_0^{15} \mathrm{a}(h)\,\mathrm{d}h &= 12 \cdot \int_0^{15} \left(\frac{3}{10} \cdot h + 10\right) \mathrm{d}h \\ &= 12 \cdot \left[\frac{3}{10} \cdot \frac{h^2}{2} + 10 \cdot h\right]_0^{15} \\ &= 12 \cdot \left(\frac{3 \cdot 15^2}{20} + 10 \cdot 15 - 0\right) \\ &= \underline{2205\ cm^3} \end{aligned}$$

Veranschaulichung (1)



(b) Das leere Gefäß wird bis zum Rand mit Flüssigkeit gefüllt.
Nach t Sekunden befindet sich die Wassermenge $q(t)$ (in ml) im Gefäß. Die Füllung dauert 39 Sekunden. Für $t \in [0; 39]$ gilt:
$q'(t) = 80$.
Interpretieren Sie $q'(t) = 80$ im gegebenen Zusammenhang!
Ermitteln Sie $\dfrac{q(t_2) - q(t_1)}{t_2 - t_1}$ für beliebige t_1, t_2 mit $t_1 < t_2$ aus dem gegebenen Zeitintervall!

Aufgabe 3 - Füllen eines Gefäßes

Lösung:

Die Funktion q gibt die Menge an Wasser (in ml) an, mit dem das Gefäß nach t Sekunden gefüllt wurde:

$$q(t) = \int q'(t)\,\mathrm{d}t = 80 \cdot t + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$q(0) = 0\,ml \implies c = 0 \qquad \implies q : [0;39] \to \mathbb{R}, t \mapsto q(t) := 80 \cdot t$$

Probe :

$$\implies q(39) = 80 \cdot 39 = \underline{3120\,ml} \qquad \equiv \quad 12 \cdot \int_0^{20} \left(\frac{3}{10} \cdot h + 10\right) \mathrm{d}h \quad \checkmark$$

Aufgabe 3 - Füllen eines Gefäßes

(b) Das leere Gefäß wird bis zum Rand mit Flüssigkeit gefüllt. Nach t Sekunden befindet sich die Wassermenge $q(t)$ (in ml) im Gefäß. Die Füllung dauert 39 Sekunden. Für $t \in [0; 39]$ gilt: $q'(t) = 80$.

Interpretieren Sie $q'(t) = 80$ im gegebenen Zusammenhang!

Ermitteln Sie $\dfrac{q(t_2) - q(t_1)}{t_2 - t_1}$ für beliebige t_1, t_2 mit $t_1 < t_2$ aus dem gegebenen Zeitintervall!

Aufgabe 3 - Füllen eines Gefäßes

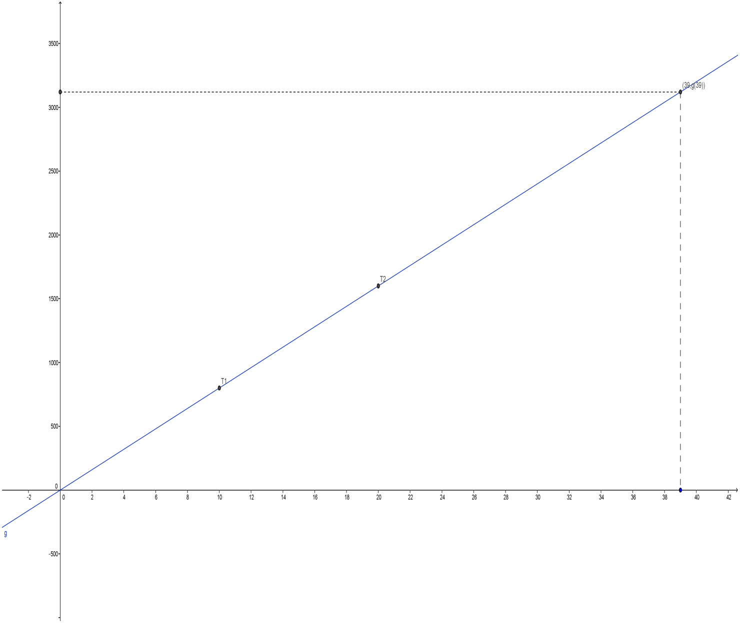
Lösung:

Die Ableitung $q'(t) = 80$ gibt somit die Wassermenge an, die pro Sekunde in das Gefäß eingefüllt wird ($80\frac{ml}{s}$).

Damit kann behauptet werden:

- $q'(t) = 80 \rightarrow$ momentane Änderungsrate der Wassermenge zur Zeit t entspricht der Zahl 80 (konstante Füllgeschwindigkeit von $80\frac{ml}{s}$)
- Folgerung: der Differenzenquotientient für beliebige t_1, t_2 mit $t_1 < t_2$ aus dem gegebenen Zeitintervall entspricht der Zahl 80, also: $\frac{q(t_2)-q(t_1)}{t_2-t_1} = 80$

Veranschaulichung



Aufgabe 3 - Füllen eines Gefäßes

(c) Das Fassungsvermögen des Gefäßes (in ml) bis zur Höhe x kann durch das Integral
$\int_0^x (3.6 \cdot h + 120)\,\mathrm{d}h$ dargestellt werden.
Ermitteln Sie, bei welcher Höhe x das Wasser im Gefäß steht, wenn man 2,5 Liter Wasser in das Gefäß gießt!
Interpretieren Sie den im Integral vorkommenden Wert 3,6 im gegebenen Kontext!

Aufgabe 3 - Füllen eines Gefäßes

Lösung:

- Überlegung: $2,5$ Liter entsprechen $2500\,Millilitern$.
- Weiters gilt: $\int_0^x (3,6 \cdot h + 120)dh = 1,8x^2 + 120x$. Also muss eine Lösung der quadratischen Gleichung $1,8x^2 + 120x = 2500$ gefunden werden.

$$1,8x^2 + 120x = 2500 \Leftrightarrow$$
$$x^2 + \frac{200}{3}x - \frac{12500}{9} = 0 \Leftrightarrow$$
$$x_{1,2} = -\frac{100}{3} \pm \sqrt{\frac{10000}{9} + \frac{12500}{9}} = \frac{50}{3}, \left(-\frac{250}{3}\right)$$

- Also: Das Wasser steht bei einer Höhe von $\frac{50}{3} \approx 16,7$cm, wenn man $2,5$ Liter Wasser ins Gefäß gießt.

Lösung:

Woher kommt der Wert 3,6 im Integral und was bedeutet er?

- in Aufgabe a): Funktion a mit $a(h) := \frac{3}{10}h + 10$ ordnet jeder Höhe h die Länge der rechteckigen Querschnittsfläche zu.
- für $0 \leq h \leq 20$ beschreibt also $a(h) \cdot 12 = 3,6 \cdot h + 120$ die Querschnittsfläche in dieser Höhe
- damit ist also $3,6$ die Steigung der Funktion, die jeder Höhe h die Querschnittfläche zuordnet
- Interpretation: $3,6$ beschreibt diejenige Fläche, um welche die Querschnittsfläche mit jedem zustätzlichen cm Höhe zunimmt

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit!