Exponentialfunktion
und
Differentialgleichung

Definition

Die natürliche Exponentialfunktion zur Basis e:

$$\exp\colon\ \mathbb{R} \to (0,\infty)\colon\ x \mapsto \mathrm{e}^x := \sup\{\mathrm{e}^q\colon\ q \in \mathbb{Q} \text{ mit } q \le x\}$$

wobei die Eulersche Zahl e folgendermaßen definiert ist:

$$\mathrm{e} := \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2.71828182\ldots$$

Definition

- die Exponentialfunktion zur Basis a :

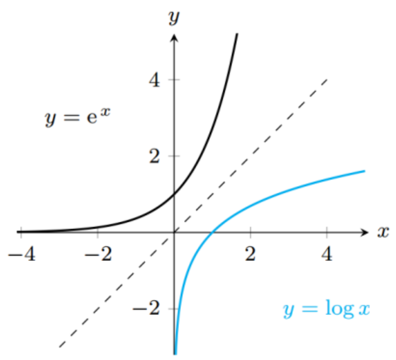
$$\mathbb{R} \to (0,\infty) \colon x \mapsto a^x := \mathrm{e}^{x \log a}$$

- Umkehrfunktion:

$\log \colon (0,\infty) \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \log x$ (Logarithmus Naturalis)

$\log_a \colon (0,\infty) \to \mathbb{R} \colon x \mapsto \log_a x$ (Logarithmus zur Basis a)

Graph

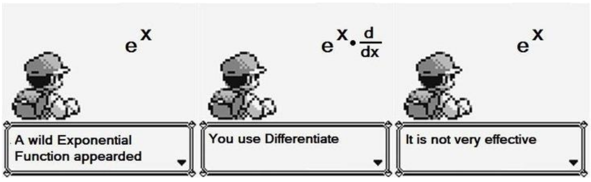


Graphen der Exponential- und der Logarithmusfunktion

Ableitungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x\Big|_{x=\xi} = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\xi+h}-\mathrm{e}^{\xi}}{h} = \mathrm{e}^{\xi}\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{h}-1}{h}}_{=1} = \mathrm{e}^{\xi}.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log x = \frac{1}{\mathrm{e}^{\log x}} = \frac{1}{x}$$



Exponentialfunktion in der Schule

Die Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = a^x$ heißt Exponentialfunktion.
Bedingungen: $a > 0; x \in \mathbb{R}$

Für Exponentialfunktionen $y = a^x$ gilt:
1. Exponentialfunktionen nähern sich **asymptotisch an die x-Achse** , d.h. Exponentialfunktionen schneiden die x-Achse nicht.
2. Exponentialfunktionen sind nach oben **nicht beschränkt**
3. Der Punkt $P(0|1)$ liegt immer auf dem Funktionsgraphen einer Exponentialfunktion.
4. Die Funktionsgraphen $y = a^x$ und $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{(} - x)$ sind symmetrisch zur y-Achse.

Exponentialfunktion in der Schule

Die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = e^x$ heißt natürliche Exponentialfunktion

$$\textbf{Wachstumsfunktion:} \quad N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$$

$$\textbf{Zerfallsfunktion:} \quad N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$

Exponentialfunktion: Schulbeispiel

Musterbeispiel aus dem Schulbuch

Unter bestimmten Bedingungen (Wärme, Feuchtigkeit, Nährboden- stoffe etc.) nimmt die Anzahl von Bakterien rasch zu. Angenommen, die Bakterien des Zahnbelags verdoppeln sich nach jeweils 30 Minuten.
Wie viele Bakterien entstehen von 07:00 Uhr bis 14:00 Uhr aus 1 Bakterium (1 B), wenn während dieser Zeit die Zähne nicht mit Zahnpasta, Kaugummi o. ä. gereinigt werden?

Lernziel: Beschreibung eines Wachstums durch ein geeignetes Modell und Berechnung mit diesem.

Lösung

1. Schritt: Erstellung einer Wertetabelle

Zeit t [min]	Anzahl n	Zeit t [1 h ≙ 1 cm]	Anzahl n [1 B ≙ 1 mm]	Anzahl n [1 000 B ≙ 1 cm]
x-Wert	y-Wert	x-Achse	y-Achse	y-Achse
0	1	0	1 mm	0,01 mm
30	2			
60	**4**	1	4 mm	
90	8			
120	**16**	2	16 mm = 1,6 cm	
150	32			
180	**64**	3	64 mm = 6,4 cm	
210	128			1,28 mm
240	**256**	4	25,6 cm	2,56 mm
270	512			
300	**1 024**	5	1,024 m	1,024 cm
330	2 048			
360	**4 096**	6	4,096 m	4,096 cm
390	8 192			
420	**16 384**	7 cm	16,384 m	16,384 cm

2. Schritt: Die **graphische Darstellung** in einem geeigneten Koordinatensystem ist hier nur sehr schwer möglich, weil die y-Werte sehr groß werden. Durch „geschickte" Wahl der Einheitsstrecken für die x- bzw. y-Achse können evtl. auch große Zahlen sinnvoll dargestellt werden. Im konkreten Fall z. B.:

für die x-Achse: 1 Stunde ≙ 1 cm → Gesamtlänge 7 cm
für die y-Achse: 1 Bakterium ≙ 1 mm → Gesamtlänge ca. 16 m
1 000 Bakterien ≙ 1 cm → Gesamtlänge ca. 16 cm

Die graphische Darstellung ist hier eine ungeeignete Methode zur Beantwortung der Fragestellung, weil die y-Achse entweder viel zu lang oder der Funktionsgraph zu ungenau würde, um verlässliche und genaue Werte ablesen zu können.

3. Schritt: Beantwortung durch Rechnung

Das Bakterienwachstum erfolgt exponentiell:

$n(t) = n \cdot a^t$ *Gleichung 1*

n ... ursprüngliche Anzahl, t ... Zeit in Minuten

Zeitpunkt t	Anzahl der Bakterien n
0	1
30	2

Aufgrund der angegebenen Werte für die Verdopplungszeit und die ursprüngliche Anzahl der Bakterien erhält man durch Einsetzen in *Gleichung 1*:

$2 = a^{30}$ bzw. $\sqrt[30]{2} = a \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{30}} = 1{,}02337 = a$

→ die Anzahl der Bakterien steigt um ca. **2,34%** pro Minute.

Somit lautet die Gleichung für das Wachstum der Bakterien:

$n(t) = 1 \cdot 1{,}02337^t = 1{,}02337^t$

$n(420) = 1{,}02337^{420} = 16\,384$

4. Schritt: Beantwortung der Frage.

Um 14.00 Uhr, also nach 7 Stunden (= 420 Minuten), beträgt die Anzahl der Bakterien 16384 Bakterien.

Bifie Aufgaben

Aufgabe 11

Technetium

Für eine medizinische Untersuchung wird das radioaktive Isotop ${}^{99m}_{43}Tc$ (Technetium) künstlich hergestellt. Dieses Isotop hat eine Halbwertszeit von 6,01 Stunden.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, wie lange es dauert, bis von einer bestimmten Ausgangsmenge Technetiums nur noch ein Viertel vorhanden ist!

Aufgabe 2

Altersbestimmung

Die Radiokohlenstoffdatierung, auch ${}^{14}C$-Methode genannt, ist ein Verfahren zur Altersbestimmung von kohlenstoffhaltigen Materialien. Das Verfahren beruht darauf, dass in abgestorbenen Organismen die Menge an gebundenen radioaktiven ${}^{14}C$-Atomen gemäß dem Zerfallsgesetz exponentiell abnimmt, während der Anteil an ${}^{12}C$-Atomen gleich bleibt. Lebende Organismen sind von diesem Effekt nicht betroffen, da sie ständig neuen Kohlenstoff aus der Umwelt aufnehmen, sodass der ${}^{14}C$-Anteil nahezu konstant bleibt und somit auch das Verhältnis zwischen ${}^{14}C$ und ${}^{12}C$.

Die Anzahl der noch vorhandenen ${}^{14}C$-Atome in einem abgestorbenen Organismus wird durch die Funktion N beschrieben. Für diese Anzahl $N(t)$ der ${}^{14}C$-Atome t Jahre nach dem Tod des Organismus gilt daher näherungsweise die Gleichung $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$, wobei N_0 die Anzahl der ${}^{14}C$-Atome zum Zeitpunkt $t = 0$ angibt und die Zerfallskonstante für ${}^{14}C$ den Wert $\lambda = 1{,}21 \cdot 10^{-4}$ pro Jahr hat.

Eine frische Probe enthält pro Billion (10^{12}) Kohlenstoffatomen nur ein ${}^{14}C$-Atom. Die Nachweisgrenze von ${}^{14}C$ liegt bei einem Atom pro Billiarde (10^{15}) Kohlenstoffatomen (also einem Tausendstel der frischen Probe).

Aufgabenstellung:

a) $\boxed{A}$ Berechnen Sie die Halbwertszeit von ${}^{14}C$!

Zeigen Sie, dass nach zehn Halbwertszeiten die Nachweisgrenze von ${}^{14}C$ unterschritten ist!

b) Im Jahr 1991 wurde in den Ötztaler Alpen von Wanderern die Gletschermumie „Ötzi" entdeckt. Die ${}^{14}C$-Methode ergab, dass bereits 47 % ± 0,5 % der ursprünglich vorhandenen ${}^{14}C$-Atome zerfallen waren (d. h., das Messverfahren hat einen Fehler von ± 0,5 % der in der frischen Probe vorhandenen Anzahl an ${}^{14}C$-Atomen).
Berechnen Sie ein Intervall für das Alter der Gletschermumie zum Zeitpunkt ihres Auffindens!

Differentialgleichungen

Jede Gleichung, die mindestens einen Differentialquotienten enthält, heißt Differentialgleichung. Sie heißt von n-ter Ordnung, falls die höchste vorkommende Ableitung von Ordnung n ist (Gleichung mit Funktionen und deren Ableitungen)

Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $F\colon D \subset \mathbb{R}^{m+2} \to \mathbb{R}$. Eine Gleichung der Form

$$F\big(t, x, x', \dots, x^{(m)}\big) = 0 \qquad (\star)$$

heißt *Differentialgleichung m-ter Ordnung*. Gesucht ist eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte m-mal differenzierbare Funktion $\mu\colon I \to \mathbb{R}$ mit

(1) $\big(t, \mu(t), \mu', \dots, \mu^{(m)}\big) \in D$ für alle $t \in I$,
(2) $F\big(t, \mu(t), \mu', \dots, \mu^{(m)}\big) = 0$ für alle $t \in I$.

Differentialgleichungen

Beispiel (Differentialgleichung erster Ordnung). Wir betrachten die Differentialgleichung

$$xx' + t = 0.$$

Offenbar ist für jedes $R > 0$ sowohl die durch

$$\mu_1(t) = \sqrt{R^2 - t^2} \quad \text{für } |t| < R$$

definierte Funktion als auch

$$\mu_2(t) = -\sqrt{R^2 - t^2} \quad \text{für } |t| < R$$

Lösung dieser Differentialgleichung. $\square$

14.1.14

DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

Gleichungen mit Funktionen und deren Ableitungen

z.B. Gesucht ist $g(x)$, für die gilt

$$2 \cdot g''(x) - 3 \cdot g'(x) + g(x) = 2x + 1$$

Interpretation der Differenzen- und Differenzialquotienten in der Physik u. den Naturwissenschaften

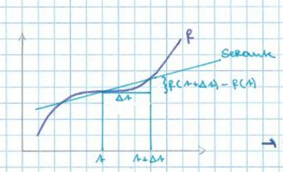
- als Variable wird statt x die Zeit t verwendet

z.B. $s(t)$ ... Ort eines Objektes zum Zeitpunkt t

$B(t)$ ... Anzahl v. Menschen ——— " ———

$N(t)$ ... Anzahl v. radioaktiven Teilchen —"—

→ es wird zeitliche Veränderung einer Größe beschrieben



Differenzenquotient:

$$\boxed{k = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}}$$

→ mittlere zeitliche Änderung der Größe f !

Differenzialquotient: $\boxed{f'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}}$

→ entspricht momentaner Änderung der Größe f !

Beispiele:

- Konstantes Wachstum: $B(t)$...

Bevölkerung in diesem Land soll konstant zunehmen → $\boxed{B'(t) = k}$

! Differenzialgleichung erster Ordnung (1. Ableitung) !

Lösungsmöglichkeit: integrieren

$$B(t) = \int B'(t)\,dt = \int k\,dt = kt + d$$

$$B(t) = kt + d$$

Startbedingung: $B(0) = B_0$

$$B(0) = k \cdot 0 + d = B_0$$

$$d = B_0 \quad \rightarrow \boxed{B(t) = kt + B_0}$$

- Exponentielles Wachstum:

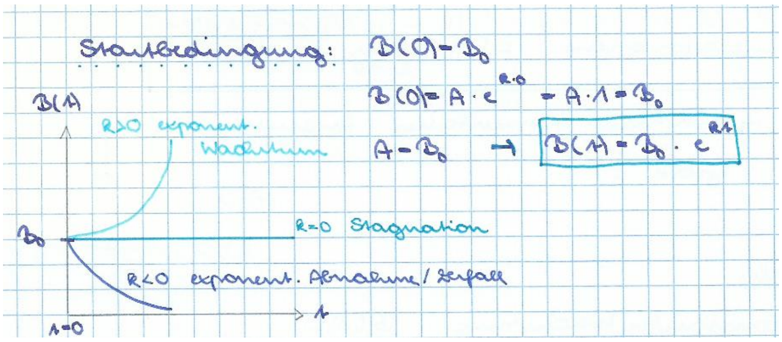
Differenzialgleichung: $\boxed{B'(t) = k \cdot B(t)}$

Änderung der Bevölkerung ist direkt proportional zur Anzahl der Bevölkerung → je mehr Individuen, umso größer Wachstum

Lösungsmöglichkeit: Ansatz - Einsetzen

$$B(t) = A \cdot e^{kt}$$

$$B'(t) = \underbrace{A \cdot e^{kt}}_{B(t)} \cdot k \rightarrow B'(t) = k \cdot B(t) \checkmark$$



Schulbeispiel

Durch Abwanderung von 120 Menschen pro Jahr nimmt die Bevölkerung eines 2000-Einwohner-Dorfes regelmäßig ab.

Erkläre, dass diese Änderung der Dorfbevölkerung durch die Differentialgleichung $B'(t) = k$ beschrieben werden kann. Wie groß ist die Konstante k in diesem Fall?

Zeige, dass der Ansatz $B(t) = B_0 + kt$ eine Lösung dieser Differenzialgleichung mit $B(0) = B_0$ ist.

Wann wird das Dorf ausgestorben sein? Stelle den Rückgang der Bevölkerung graphisch dar.

Schulbeispiel

Lösung:

$B'(t) = k$ beschreibt konstantes Wachstum bzw. konstante Abnahme — geeignet für diese Problemstellung
$k = -120$

$B(t) = \int B'(t)\,dt = \int k\,dt = kt + d$
$B(t) = kt + d$
$B(0) = B_0 = k0 + d \rightarrow B_0 = d = 2000$
$B(t) = -120t + 2000$

$B(t) = 0$
$-120t + 2000 = 0$
$t = 50/3 \approx 16$ Jahre, 8 Monate
Nach 16 Jahren und 8 Monaten ist das Dorf ausgestorben

Exponentialgleichung

Aufgabennummer: 1_104	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 5.2	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist der Funktionswert $\sqrt[3]{4}$ der Exponentialfunktion $f(x) = 2^x$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die rationale Zahl x so, dass sie die Gleichung $2^x = \sqrt[3]{4}$ erfüllt!

$x =$ ___________

Lösungsweg

$x = \frac{2}{3}$

Lösungsschlüssel

Die Angabe eines Lösungsweges ist nicht erforderlich.

Exponentielle Abnahme

Aufgabennummer: 1_020	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 5.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die angegebenen Funktionsgleichungen beschreiben exponentielle Zusammenhänge.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Funktionsgleichungen an, die eine exponentielle Abnahme beschreiben!

$f(x) = 100 \cdot 1{,}2^x$	☐
$f(x) = 100 \cdot e^{0{,}2x}$	☐
$f(x) = 100 \cdot 0{,}2^x$	☐
$f(x) = 100 \cdot 0{,}2^{-x}$	☐
$f(x) = 100 \cdot e^{-0{,}2x}$	☐

Lösungsweg

$f(x) = 100 \cdot 1{,}2^x$	☐
$f(x) = 100 \cdot e^{0{,}2x}$	☐
$f(x) = 100 \cdot 0{,}2^x$	☒
$f(x) = 100 \cdot 0{,}2^{-x}$	☐
$f(x) = 100 \cdot e^{-0{,}2x}$	☒

Lösungsschlüssel

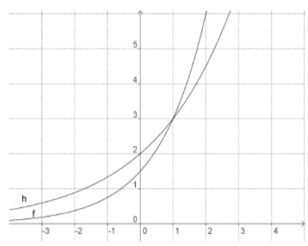
Die Lösung gilt nur dann als richtig, wenn genau die zwei zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Exponentialfunktionen vergleichen

Aufgabennummer: 1_106	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 5.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben sind zwei Exponentialfunktionen f und h mit $f(x) = a \cdot b^x$ und $h(x) = c \cdot d^x$.
Dabei gilt: $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$.



Aufgabenstellung:

Welche der nachstehenden Aussagen über die Parameter a, b, c und d sind zutreffend?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$a > c$	☐
$b > d$	☐
$a < c$	☐
$b < d$	☐
$a = c$	☐

Lösungsweg

$b > d$	☒
$a < c$	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die beiden zutreffenden Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Exponentialfunktion

Aufgabennummer: 1_021	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: FA 5.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 0$ des Graphen hat den Wert 0.	☐
Wird das Argument x um 1 erhöht, dann steigen die Funktionswerte auf das e-Fache.	☐
Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 1$ des Graphen hat den Wert e.	☐
Wird das Argument x um 1 vermindert, dann sinken die Funktionswerte auf das $\frac{1}{e}$-Fache.	☐
Der Graph von f hat an jeder Stelle eine positive Krümmung.	☐

Lösungsweg

Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 0$ des Graphen hat den Wert 0.	
Wird das Argument x um 1 erhöht, dann steigen die Funktionswerte auf das e-Fache.	☒
Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 1$ des Graphen hat den Wert e.	☒
Wird das Argument x um 1 vermindert, dann sinken die Funktionswerte auf das $\frac{1}{e}$-Fache.	☒
Der Graph von f hat an jeder Stelle eine positive Krümmung.	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die vier zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Exponentielles Wachstum

Aufgabennummer: 1_023		Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)		Grundkompetenz: FA 5.4
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Funktion f mit $f(x) = 100 \cdot 2^x$ beschreibt einen exponentiellen Wachstumsprozess.
Wie verändert sich der Funktionswert, wenn x um 1 erhöht wird?

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Der Funktionswert $f(x+1)$ ist ...

um 1 größer als $f(x)$	☐
doppelt so groß wie $f(x)$	☐
um 100 größer als $f(x)$	☐
um 200 größer als $f(x)$	☐
um 100 % größer als $f(x)$	☐

Lösungsweg

Der Funktionswert $f(x+1)$ ist ...

um 1 größer als $f(x)$	☐
doppelt so groß wie $f(x)$	☒
um 100 größer als $f(x)$	☐
um 200 größer als $f(x)$	☐
um 100 % größer als $f(x)$	☒

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die beiden zutreffenden Aussagen angekreuzt sind.

Exponentialfunktion*

Aufgabennummer: 1_145		Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)		Grundkompetenz: FA 5.4
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist eine reelle Funktion f mit der Gleichung $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die für die Funktion f zutreffende(n) Aussage(n) an!

$f'(x) = a \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x}$	☐
Für $a > 0$ sind alle Funktionswerte negativ.	☐
Die Funktion f hat mindestens eine reelle Nullstelle.	☐
Die Funktion f schneidet die y-Achse bei $(0 \mid a)$.	☐
Die Funktion f ist streng monoton fallend, wenn $\lambda < 0$ und $a \neq 0$ ist.	☐

Lösungsweg

$f'(x) = a \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x}$	☒
Die Funktion f schneidet die y-Achse bei $(0\|a)$.	☒
Die Funktion f ist streng monoton fallend, wenn $\lambda < 0$ und $a \neq 0$ ist.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau drei Aussagen angekreuzt sind und alle Kreuze richtig gesetzt sind.