Konversatorium

-Vorbereitung für die erste Diplomprüfung -

Stochastik

-Wahrscheinlichkeitstheorie-

Begriffsdefinition Stochastik

- altgriechisch stochastikē technē,
- lateinisch ars conjectandi,

„Die Kunst des Vermutens“

- Teilgebiet der Mathematik welches die Gebiete **Wahrscheinlichkeitstheorie** und **Statistik** zusammenfasst

Elementare Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ein **Wahrscheinlichkeitsraum** ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ bestehend aus den folgenden drei Komponenten.

▷ Die Menge Ω wird als **Ergebnismenge** oder **Menge der Elementarereignisse** bezeichnet, ein Element $\omega \in \Omega$ als **Elementarereignis** oder **Zustand**.

▷ Bei dem Mengensystem $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ handelt es sich um eine **σ-Algebra**, welche man auch den **Ereignisraum** nennt. Dementsprechend heißt eine Menge $A \in \mathcal{F}$ **Ereignis**, wobei man auch von einer **beobachtbaren** Teilmenge von Ω spricht.

▷ Das **Wahrscheinlichkeitsmaß** $\mathbb{P}$ ordnet jedem Ereignis $A \in \mathcal{F}$ seine Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$ zu, welche beschreibt, wie sicher das Ereignis A eintritt.

Ziel

Mit einem Wahrscheinlichkeitsraum wollen wir ein **Zufallsexperiment** modellieren, wobei es sich dabei um einen zufälligen Vorgang handelt, auf den folgendes zutrifft:

- ▷ Die Bedingungen, unter denen das Experiment durchgeführt wird, die sogenannten **Versuchsbedingungen**, sind genau festgelegt.
- ▷ Alle möglichen Ausgänge des Experiments sind im Vorhinein bekannt.
- ▷ Das Experiment kann, zumindest theoretisch, beliebig oft unter genau denselben Versuchsbedingungen wiederholt werden.

Zufallsvariable

Ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so spielen Abbildungen der Form $X\colon\, \Omega \to \mathbb{R}$ eine wesentliche Rolle zur Modellierung zufälliger Phänomene. Um die "Beobachtbarkeit" der beschriebenen Vorgänge sicherzustellen, muss die Messbarkeit solcher Abbildungen verlangt werden.

Definition 2.2 (Messbare Abbildungen)
Es seien $(\Omega_{\mathrm{D}}, \mathcal{F}_{\mathrm{D}})$ und $(\Omega_{\mathrm{B}}, \mathcal{F}_{\mathrm{B}})$ zwei messbare Räume. Eine Abbildung $X\colon\, \Omega_{\mathrm{D}} \to \Omega_{\mathrm{B}}$ heißt $(\mathcal{F}_{\mathrm{D}}, \mathcal{F}_{\mathrm{B}})$**-messbar**, falls

$$\forall\, A_{\mathrm{B}} \in \mathcal{F}_{\mathrm{B}}\colon\; X^{-1}(A_{\mathrm{B}}) \in \mathcal{F}_{\mathrm{D}}\,.$$

Definition 2.3 (Zufallsvariable)
Ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so nennt man eine $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-messbare Abbildung $X\colon\, \Omega \to \mathbb{R}$ auch eine (reellwertige) **Zufallsvariable**.

Verteilung einer Zufallsvariablen

Definition 2.17 (Verteilung einer Zufallsvariablen)
Ist die Abbildung $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, so heißt ihr Bildmaß $P_X := \mathbb{P} \circ X^{-1}$ **Verteilung** von X.

Bemerkung.

- ▷ Ist $P = P_X$, so schreibt man $X \sim P$ und nennt X dann P-**verteilt**.
- ▷ Zwei Zufallsvariablen $X, Y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißen **identisch verteilt**, falls $P_X = P_Y$. In diesem Fall schreiben wir $X \overset{\mathcal{D}}{=} Y$.

Wie wir sehen werden, ist die Verteilung einer Zufallsvariablen X eindeutig durch eine Funktion $F_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ bestimmt, der sogenannten Verteilungsfunktion von X.

Verteilungsfunktion

Definition und Satz 2.19 (Verteilungsfunktion)
Es sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Die Funktion

$$F_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]\colon\ x \mapsto \mathbb{P}\left(X \le x\right) = P_X\left((-\infty, x]\right)$$

heißt **Verteilungsfunktion** von X bzw. P_X . Diese hat folgende Eigenschaften:

$(F1)$ F_X ist monoton wachsend

$(F2)$ F_X ist rechtsseitig stetig

$(F3)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0 \quad$ und $\quad \lim\limits_{x\to\infty} F_X(x) = 1$

Binomialverteilung

DEFINITION 1.23 (BINOMIALVERTEILUNG)
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\Omega := \{0, \dots, n\}$ und weiters sei $p \in (0,1)$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$B_{n,p} := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$$

auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ heißt **Binomialverteilung** mit Parametern n, der Anzahl der Versuche, und p, der Erfolgswahrscheinlichkeit.

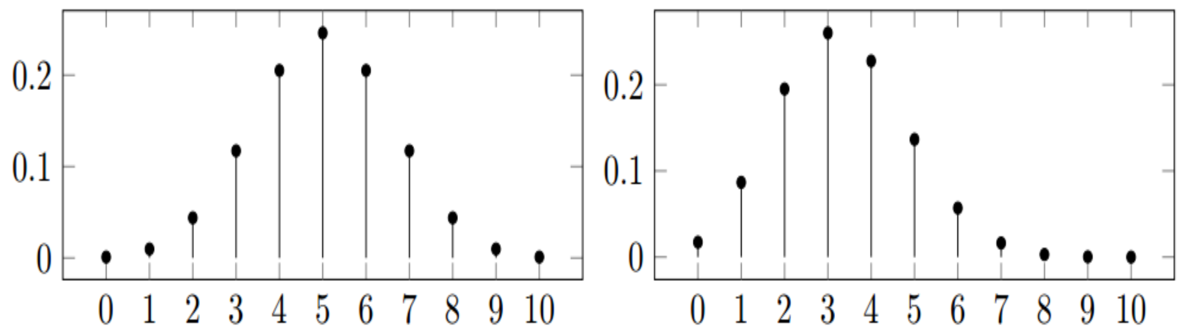


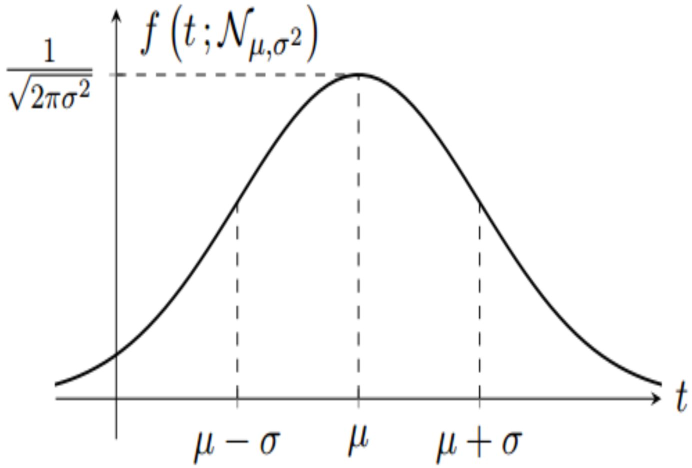
ABBILDUNG 1.1. Stabdiagramme zur Binomialverteilung $B_{10,p}$ mit $p = 1/2$ (links) und $p = 1/3$ (rechts)

Normalverteilung

Definition 1.67 (Normalverteilung)
Das durch

$$\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}\left((a,b]\right) := \int_a^b f\left(t\,;\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}\right)\,\mathrm{d}t \qquad \text{für } a,b \in \mathbb{R} \text{ mit } a \leq b$$

eindeutig bestimmte Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ heißt **Normalverteilung** oder **Gauß-Verteilung** mit **Erwartungswert** μ und **Varianz** σ^2. Man nennt σ die **Standardabweichung**.



Hypergeometrische Verteilung

Modellierung. Wir wählen wiederum $\Omega := \{0, \ldots, n\}$, dies entspricht dem gleichzeitigen Kauf aller n Lose, und $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$. Weiters gehen wir davon aus, dass jede Auswahl von n Losen dieselbe Wahrscheinlichkeit hat, von uns gekauft zu werden. Dann lautet die Wahrscheinlichkeit, dass k Gewinnlose unter den n gekauften Losen sind,

$$H_{n,N,G}(\{k\}) := \frac{\text{“Anzahl der günstigen Ereignisse“}}{\text{“Anzahl der möglichen Ereignisse“}} = \frac{\binom{G}{k}\binom{N-G}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Definition 1.25 (Hypergeometrische Verteilung)
Das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$H_{n,N,G} := \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{G}{k}\binom{N-G}{n-k}}{\binom{N}{n}} \delta_k$$

auf $(\{0, \ldots, n\}, \mathcal{P}(\{0, \ldots, n\}))$ nennt man **hypergeometrische Verteilung** mit Parametern n, N, G, vgl. Aufgabe (1.29).

Gleichverteilung

DEFINITION 1.63 (KONTINUIERLICHE GLEICHVERTEILUNG)
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mathcal{U}_I := \frac{\lambda|_{\mathcal{B}(I)}}{\lambda(I)}$$

auf $(I, \mathcal{B}(I))$ wird (kontinuierliche) **Gleichverteilung** oder **uniforme Verteilung** auf I genannt.

Beispiel 2.18 (Simulation eines Münzwurfs)
Wir wollen den Wurf einer Münze mittels eines Zufallszahlengenerators simulieren. Die generierte Zufallszahl sei annähernd gleichverteilt auf $[0,1]$, d. h. wir wählen den Wahrscheinlichkeitsraum $\big([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathcal{U}_{[0,1]}\big)$. Für $p \in (0,1)$ betrachten wir die Abbildung

$$X\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}\colon\ \omega \mapsto \chi_{[0,p)}(\omega)\,.$$

Da $[0,p) \in \mathcal{B}([0,1])$, ist X nach Beispiel 2.8 eine Zufallsvariable. Es ist

$$P_X(\{1\}) = \lambda([0,p)) = p \quad \text{und} \quad P_X(\{0\}) = \lambda([p,1]) = 1-p\,,$$

folglich

$$P_X = (1-p)\delta_0 + p\delta_1 = B_{1,p}\,.$$

Die Zufallsvariable X bzw. die Verteilung P_X modelliert daher den Wurf einer Münze. $\diamond$

Wie wir sehen werden, ist die Verteilung einer Zufallsvariablen X eindeutig durch eine Funktion $F_X\colon\ \mathbb{R} \to [0,1]$ bestimmt, der sogenannten Verteilungsfunktion von X.

Verteilung einer Zufallsvariable

- ▷ Ist $X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable und existieren ein $n \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ mit

$$P_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i} = \mathcal{U}_{\{x_1,\ldots,x_n\}}\,,$$

so heißt X **gleichverteilt** auf $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Ist $n = 6$ und $x_1 = 1, \ldots, x_6 = 6$, so dient die auf $\{1, \ldots, 6\}$ gleichverteilte Zufallsvariable X zum Beispiel der Modellierung eines fairen Würfels.

- ▷ Besitzt die Zufallsvariable $X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ die Verteilung

$$P_X = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{G}{k}\binom{N-G}{n-k}}{\binom{N}{n}}\delta_k = H_{n,N,G}\,,$$

so nennt man X **hypergeometrisch verteilt**. Mittels der hypergeometrischen Verteilung kann etwa das Ziehen ohne Zurücklegen von Kugeln aus einer Urne modelliert werden.

Begriff „Stochastik“ in der Schule

- Erwartungswert => Mittelwert
  Mittlewert : $x' = (x_1+x_2+....+x_n)/n$

- Varianz: $s^2 = ((x_1-x')^2+...+(x_n-x')^2)/n$ als Kennzahl für die Streuung der Ergebinsse
  Standartabweichtung = Quadratwurzel der Varianz

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit einem Spielwürfel eine „Zwei“ zu würfeln?

- Zufallsexperiment
- Elementarereignis
- Ereignisraum
- Wahrscheinlichkeit P(A) eines Ereignisses A

- Abhängig:
  $P(B \cap A)=P(B|A)*P(A)$ >>>> $P(B|A)=P(B \cap A)/P(A)$

- Unabhängig: $P(B \cap A)=P(B)*P(A)$

- Zufallsvariable: Eine Funktion, die jedem möglichen Ereignis eine reelle Zahl zuordnet.

Zufallsexperiment	Definitionsmenge	Diskret/stetig	Wertmenge
Würfelwurf	Geworfene Anz.		{1,2,3,4,5,6}
Körpergröße	Gemessene Kögr.		[0,....[

Gleichverteilung

- Ab 6. Klasse
  - ohne Definition (Verteilungen erst 7. Klasse)
  - Bsp. Würfeln, Urne, etc.

Als Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von E kann man den relativen Anteil von A in G verwenden, d.h.:

$$P(E) = \frac{|A|}{|G|}$$

Man sagt auch: $$P(E) = \frac{Anzahl\ der\ für\ E\ günstigen\ Ausfälle}{Anzahl\ aller\ möglichen\ Ausfälle}$$

Hypergeometrische Verteilung

- **Definition:** Sei X eine Zufallsvariable mit den möglichen Werten 0,1,2,…,N. Wird jedem Wert k die Wahrscheinlichkeit

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} * \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

(mit $1 \leq M \leq N$, $1 \leq n \leq N$, $0 \leq k \leq n$, $n\text{-}k \leq N\text{-}M$)

  zugeordnet, dann bezeichnet man die dadurch festgelegte Wahrscheinlichkeitsverteilung als **hypergeometrische Verteilung** mit den **Parametern N, M, und n**. Die Zufallsvariable X nennt man hypergeometrische verteilt mit den Parametern N,M und n.

- 7. Klasse **Vertiefung**

Binomialverteilung

Bernoulli-Experiment

Ein Experiment heißt Bernoulli Experiment, wenn es aus einer Folge von n Versuchen besteht, bei dem

1. jeder Versuch genau zwei mögliche Versuchsausgänge besitzt (z.B. Erfolg-Misserfolg, 1-0)
2. jeder Versuch die gleiche Wahrscheinlichkeit hat und die Versuche unabhängig voneinander sind

Beispiele: Münzwurf, Kugeln ziehen mit Zurücklegen, Würfeln einer bestimmten Zahl

Die **Binomialverteilung** gibt die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl des Auftretens eines Ereignisses bei einem Bernoulli-Experiment an.

Binomialverteilung

Allgemein

- Wahrscheinlichkeit für Ereignis: **p**
- Wahrsch.für Gegenereignis: **q = (1-p)**
- Anzahl der Versuche: **n**
- Anzahl des Auftretens des Ereignisses: **k**
- Häufigkeit des Nichtauftretens: **n-k**

- $\underbrace{p \cdot p \cdot \ldots . \cdot p}_{\text{k Mal}} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots . \cdot q}_{\text{n-k Mal}} = \mathbf{p^k \cdot q^{n-k}}$
- Anzahl Anordnungen = $\binom{n}{k}$
- Die Wahrscheinlichkeit dass bei einem Bernoulli Experiment mit n Wiederholungen und der „Erfolgs"-Wahrscheinlichkeit q die „Erfolgs"-Anzahl X genau k ist, ist also

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Beispiel Würfel

- Wahrscheinlichkeit für Eins: **p= 1/6**
- Wahrscheinlichkeit nicht Kopf: **q= 5/6**
- Wurfanzahl: **n= 10**
- Auftreten von Eins: **k= 2**
- Auftreten von nicht Eins: **n-k= 8**

- $1/6 \cdot 1/6 \cdot 5/6 \cdot \ldots . \cdot 5/6 = 1/6^2 \cdot 5/6^8$
- Anzahl Anordnungen = $\binom{10}{2}$
- P (X=2) = $\binom{10}{2} \cdot 1/6^2 \cdot 5/6^8$

  $= 45 \cdot 1/6^2 \cdot 5/6^8$

  $= 0{,}29$

Binomialverteilung

Allgemein

- Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

- für P(X = k) schreibt man auch $b_{n;p}(k)$
- Erwartungswert: $\mu = E(x) = n \cdot p$
- Varianz: $\sigma = Var(x) = n \cdot p \cdot (1-p)$

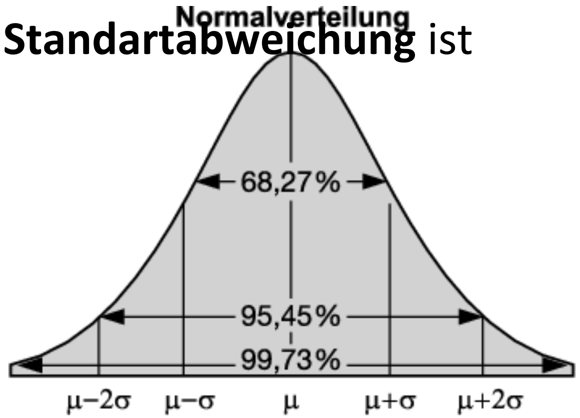
Normalverteilung

- Die durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

festgelegte stetige Verteilung heißt **Normalverteilung**

N(μ ,σ²), wobei **μ der Erwartungswert** und **σ die Standartabweichung** ist



- Der Graph von f heißt **Gauß'sche Glockenkurve**

- Ist **μ** =0 und **σ** =1, so sprechen wir von der Standartnormalverteilung N(0,1) und bezeichnen f mit **φ**

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Normalverteilung

- die Normalverteilung ist symmetrisch
- das Maximum der Normalverteilung liegt bei μ,
  die Wendepunkte bei $\mu \pm \sigma$
- die Fläche unter f ist immer 1
- ist eine Normalverteilung mit beliebigen μ und σ gegeben, so kann diese durch eine Transformation auf eine N(0,1)-Verteilung zurückgeführt werden

$$\underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}_{\text{Allgemeine Normalverteilung}} = \frac{1}{\sigma} \cdot \underbrace{\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}_{\text{Standardnormalverteilung}}$$

- die Normalverteilung kann zur Approximation der Binomialverteilung verwendet werden (n groß genug, p nicht zu klein). Als Faustregel dafür gilt: $n \cdot p \cdot (1-p) \geq 9$

Binomialverteilung

Aufgabennummer: 1_044	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: WS 3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Zufallsvariable X sei binomialverteilt mit $n = 25$ und $p = 0{,}15$.
Es soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, sodass die Zufallsvariable X höchstens den Wert 2 annimmt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie den zutreffenden Term an!

$\binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}$	☐
$0{,}85^{25} + \binom{25}{1} \cdot 0{,}15^1 \cdot 0{,}85^{24} + \binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}$	☐
$\binom{25}{1} \cdot 0{,}15^1 \cdot 0{,}85^{24} + \binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}$	☐
$1 - \binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}$	☐
$1 - \left[0{,}85^{25} + \binom{25}{1} \cdot 0{,}15^1 \cdot 0{,}85^{24} + \binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}\right]$	☐
$\binom{25}{2} \cdot 0{,}85^2 \cdot 0{,}15^{23}$	☐

Lösungsweg

$\binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}$	
$0{,}85^{25} + \binom{25}{1} \cdot 0{,}15^1 \cdot 0{,}85^{24} + \binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}$	☒
$\binom{25}{1} \cdot 0{,}15^1 \cdot 0{,}85^{24} + \binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}$	
$1 - \binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}$	
$1 - \left[0{,}85^{25} + \binom{25}{1} \cdot 0{,}15^1 \cdot 0{,}85^{24} + \binom{25}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^{23}\right]$	
$\binom{25}{2} \cdot 0{,}85^2 \cdot 0{,}15^{23}$	

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn genau die eine zutreffende Antwortmöglichkeit angekreuzt ist.

Schülerarbeit

Aufgabennummer: 1_294	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: WS 3.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die Spinde einer Schule werden mit Vorhängeschlössern gesichert, die im Eigentum der Schüler/innen stehen. Erfahrungsgemäß müssen 5 % aller Spindschlösser innerhalb eines Jahres aufgebrochen werden, weil die Schlüssel verloren wurden. Ein Schüler berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb eines Jahres von 200 Schlössern mindestens zwölf aufgebrochen werden müssen. Die nachstehenden Aufzeichnungen zeigen seine Vorgehensweise.

$P(x \geq 12)$ ... Berechnung bzw. Berechnung der Gegen-WSK zu umständlich!

$\mu = 200 \cdot 0{,}05 = 10$

$\sigma = \sqrt{200 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95} \sim 3{,}08 > 3$ ✓

$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{11{,}5-10}{\sigma} \approx 0{,}49$

$\phi(0{,}49) = 0{,}6879$

$\Rightarrow P(x \geq 12) \approx 1 - 0{,}6879 \approx 0{,}3121$

$\Rightarrow$ Zu $\approx 31\ \%$

$P(x \geq 12)$ ... Berechnung bzw. Berechnung der Gegen-WSK zu umständlich!

$$\mu = 200 \cdot 0{,}05 = 10$$

$$\sigma = \sqrt{200 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95} \sim 3{,}08 > 3$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{11{,}5 - 10}{\sigma} \approx 0{,}49$$

$$\phi(0{,}49) = 0{,}6879$$

$$\Rightarrow P(x \geq 12) \approx 1 - 0{,}6879 \approx 0{,}3121$$

$$\Rightarrow \text{zu} \approx 31\,\%$$

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Bei der Anzahl der Schlösser, die aufgebrochen werden müssen, handelt es sich um eine ____①____, und ____②____.

①	
gleichverteilte Zufallsvariable	☐
binomialverteilte Zufallsvariable	☐
normalverteilte Zufallsvariable	☐

②	
der Schüler rechnet mit der Normalverteilung, obwohl es nicht zulässig ist	☐
der Schüler verwechselt den Mittelwert mit dem Erwartungswert, also ist die Aufgabe deshalb nicht richtig gelöst	☐
der Schüler rechnet zulässigerweise mit der Normalverteilung	☐

Lösung

①	
binomialverteilte Zufallsvariable	☒

②	
der Schüler rechnet zulässigerweise mit der Normalverteilung	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

Farbenfrohe Gummibären

Gummibären werden in 5 unterschiedlichen Farben bzw. 6 unterschiedlichen Geschmacksrichtungen hergestellt: rot (Himbeere und Erdbeere), gelb (Zitrone), grün (Apfel), orange (Orange) und weiß (Ananas).

a) Die nachstehende Tabelle enthält eine Auflistung, wie viele weiße Gummibären in den untersuchten Packungen waren.

Anzahl weißer Gummibären pro Packung	17	20	21	22	24
Anzahl der Packungen	2	3	3	1	4

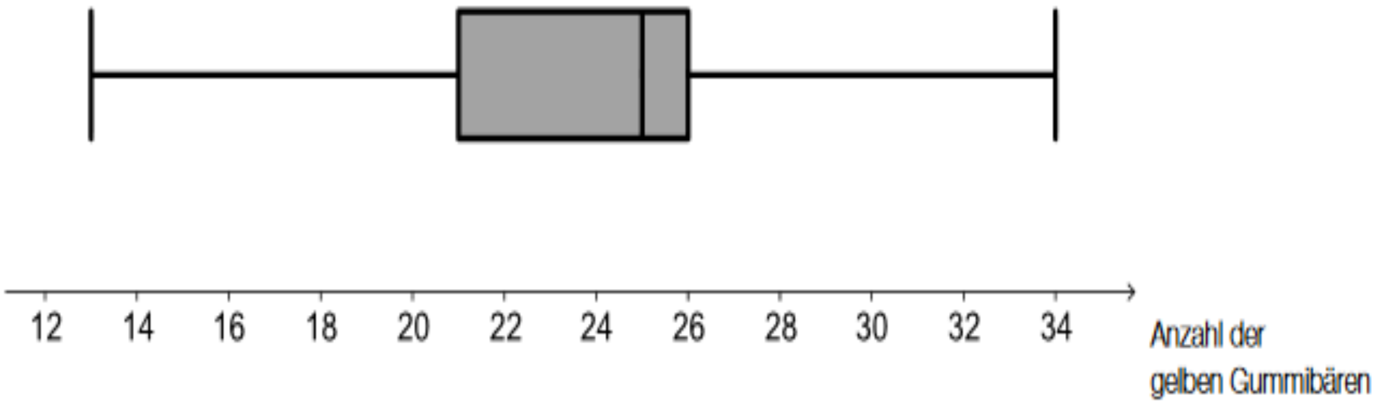
– Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Anzahlen weißer Gummibären pro Packung.
[1 Punkt]

Farbenfrohe Gummibären

Möglicher Lösungsweg

a) $$\bar{x} = \frac{17 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 21 \cdot 3 + 22 \cdot 1 + 24 \cdot 4}{2 + 3 + 3 + 1 + 4} = 21{,}153... \approx 21{,}15$$

b) Mehrere Packungen wurden hinsichtlich der Anzahl der gelben Gummibären pro Packung untersucht. Das Ergebnis dieser Untersuchung ist im nachstehenden Boxplot dargestellt.



Eine der untersuchten Packungen wird zufällig ausgewählt. Sie gehört zu jenem Viertel aller untersuchten Packungen, in dem die meisten gelben Gummibären zu finden waren.

– Lesen Sie aus dem Boxplot ab, in welchem Bereich die Anzahl der gelben Gummibären in der ausgewählten Packung liegen muss. *[1 Punkt]*

b) Diese Packung enthält mindestens 26 und höchstens 34 gelbe Gummibären.

c) In einer Packung sind alle Geschmacksrichtungen in gleichen Anteilen zu finden.

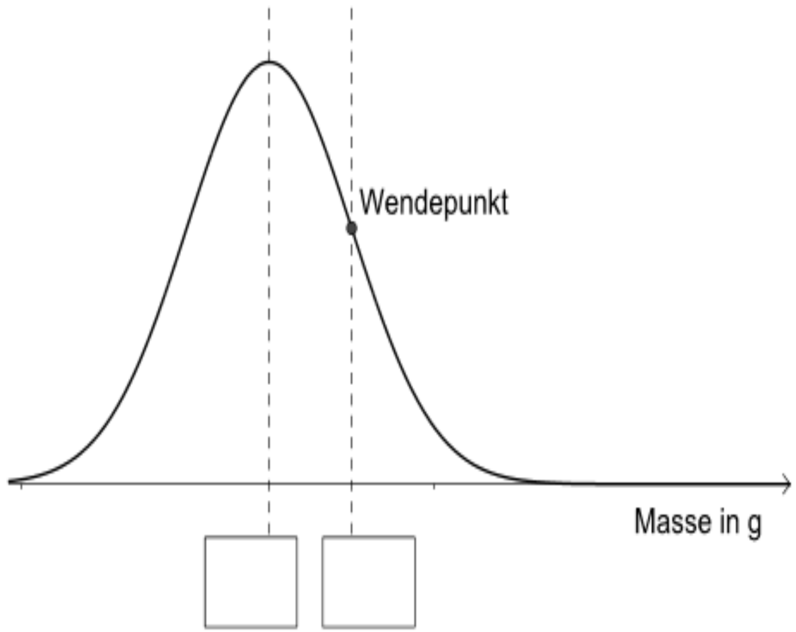
– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Gummibären in dieser Packung die Farbe Rot haben.
[1 Punkt]

c) Anteil einer Geschmacksrichtung: $\frac{1}{6}$

Da die Farbe Rot 2-mal vorkommt: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \approx 33{,}33\ \%$.

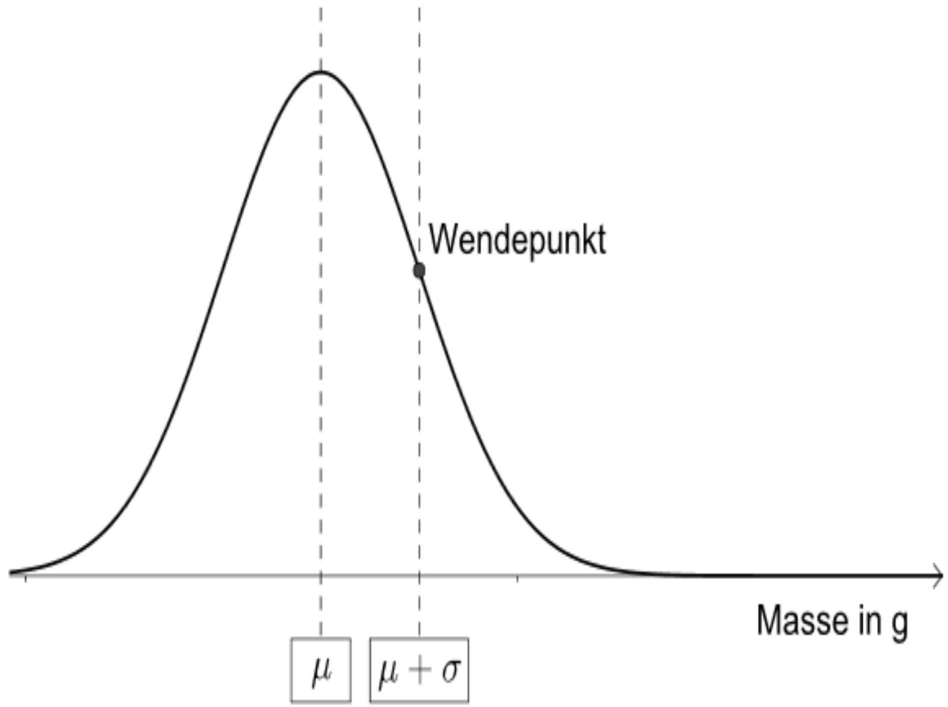
d) Die Masse von Gummibären ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 2{,}3$ g und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}1$ g. Der Graph der Wahrscheinlichkeitsdichte ist in der unten stehenden Abbildung dargestellt.

– Tragen Sie die fehlenden Beschriftungen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[1 Punkt]*



Gummibären, die zu leicht oder zu schwer sind, werden aussortiert. Abweichungen von bis zu ± 0,25 g vom Erwartungswert werden toleriert.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein zufällig ausgewählter Gummibär aussortiert wird. *[1 Punkt]* d)



$P(\text{„Gummibär wird aussortiert“}) = 1 - P(2{,}05 \leq X \leq 2{,}55) = 0{,}01241... \approx 0{,}0124$

Ein zufällig ausgewählter Gummibär wird mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 1,24 % aussortiert.