Partielle Differentialgleichungen PS WS2017

Schwingungsgleichungen

Quelle. Skriptum von Peter Wagner[1] zur Vorlesung *Mathematik A*.

Kapitel IV.17 Die Schwingungsgleichung

[1] Siehe http://mat1.uibk.ac.at/wagner/skripten.html

Wesentliche Inhalte.

(1) *Physikalisches Modell.*

- *Klassische Mechanik (Newtonsche Axiome).*
  Die Bewegung eines Körpers wird mittels einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben

  $$\text{Masse} \times \text{Beschleunigung} \;=\; \text{Summe der einwirkenden Kräfte}\,.$$

  Bei Vorgabe zusätzlicher Anfangsbedingungen (Anfangsposition und Anfangsgeschwindigkeit) ist die Bewegung des Körpers eindeutig bestimmt.
  Dies führt auf ein Anfangswertproblem der Form

  $$\begin{cases} y''(t) = F\big(t, y(t), y'(t)\big)\,, & t \in [0,T]\,, \\ y(0) \ \text{gegeben}\,, \quad y'(0) \ \text{gegeben}\,. \end{cases}$$

- *Spezielle Situation (Schwingungsgleichung).*
  Körper der Masse $m > 0$ (zur Vereinfachung Normierung $m = 1$).
  Einwirkung einer linearen Federkraft (Rückstellkraft proportional zur Auslenkung der Feder aus der Ruhelage, Federkonstante $k > 0$)

  $$F_{\text{Feder}}(t) = -\,k\,y(t)\,.$$

  Einwirkung einer linearen Reibungskraft (dämpfende Kraft proportional zur Geschwindigkeit, Reibungskonstante $r > 0$, Spezialfall $r = 0$ bei einer ungedämpften Schwingung)

  $$F_{\text{Reibung}}(t) = -\,r\,y'(t)\,.$$

  Zusätzliche Einwirkung einer zeitabhängigen äußeren Kraft $f : [0,T] \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t)$.
  Zu bestimmen ist die Auslenkung des Körpers aus der Ruhelage bei Vorgabe der Anfangsposition und der Anfangsgeschwindigkeit, d.h. eine zeitabhängige Funktion $y : [0,T] \to \mathbb{R} : t \mapsto y(t)$, welche das Anfangswertproblem

  $$\begin{cases} y''(t) + r\,y'(t) + k\,y(t) = f(t)\,, & t \in [0,T]\,, \\ y(0) \ \text{gegeben}\,, \quad y'(0) \ \text{gegeben}\,, \end{cases}$$

  erfüllt. Insbesondere im Spezialfall einer ungedämpften Schwingung (d.h. $r = 0$) erwartet man eine periodische Funktion als Lösung.

(2) *Umformulierung als Differentialgleichungssystem erster Ordnung.* Zur Bestimmung der Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist es zweckmäßig, diese als ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung zu formulieren. Mittels

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix},$$

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -k\,y_1(t) - r\,y_2(t) + f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

ergibt sich das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} Y'(t) = A\,Y(t) + b(t), & t \in [0,T], \\ Y(0) \text{ gegeben}, \end{cases}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -r \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

(3) *Eigenwertzerlegung.* Im generischen Fall $r^2 - 4k \neq 0$ besitzt die Matrix A zwei voneinander verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2$, die ein Eigensystem des $\mathbb{C}^2$ bilden, und somit ergibt sich die Zerlegung

$$r^2 - 4\,k \neq 0: \qquad A = V \Lambda V^{-1},$$

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}\,r < 0, \quad \beta = \tfrac{1}{2}\sqrt{r^2 - 4k} = \mathrm{i}\gamma,$$

$$\lambda_1 = \alpha - \beta = \alpha - \mathrm{i}\gamma, \quad \lambda_2 = \alpha + \beta = \alpha + \mathrm{i}\gamma,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \tfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei findet man die Eigenwerte von A über die folgende Gleichung

$$\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -k & -r - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda r + k$$

$$\Longrightarrow 0 = \lambda^2 + \lambda r + k$$

$$\Longrightarrow \lambda_{1,2} = \tfrac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4k}}{2}$$

Analog dazu werden die Eigenvektoren berechnet über die folgende Gleichung

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Man löst diese Gleichung getrennt für jedes λ.

$$(A - \lambda_1 I)x = \begin{pmatrix} \frac{r}{2} + \frac{\sqrt{r^2-4k}}{2} & 1 \\ -k & \frac{-r}{2} + \frac{\sqrt{r^2-4k}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Lösen des Gleichungssystems über den Gauss-Algorithmus (LinAlg1) ergibt

$$\rightsquigarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Analog bekommt man den zweiten Eigenvektor

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\implies V = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Beachte, daß im Spezialfall einer ungedämpften Schwingung die Relationen

$$r = 0: \qquad \alpha = 0, \quad \beta = \mathrm{i}\sqrt{k}, \quad \gamma = \sqrt{k}.$$

folgen.

Exponentialfunktion. Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit Eigenzerlegung $A = V\Lambda V^{-1}$ ist die zugehörige Matrixexponentialfunktion gegeben durch (wegen $A^j = V\Lambda^j V^{-1}$ für $j \in \mathbb{N}$)

$$\mathrm{e}^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \tfrac{1}{j!}\, t^j A^j = V \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tfrac{1}{j!}\, t^j \Lambda^j \right) V^{-1} = V\, \mathrm{e}^{t\Lambda}\, V^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Inbesondere ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA} &= V\, \mathrm{e}^{t\Lambda}\, V^{-1} \\
&= \tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2\, \mathrm{e}^{t\lambda_1} & -\mathrm{e}^{t\lambda_1} \\ -\lambda_1\, \mathrm{e}^{t\lambda_2} & \mathrm{e}^{t\lambda_2} \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2\, \mathrm{e}^{t\lambda_1} - \lambda_1\, \mathrm{e}^{t\lambda_2} & \mathrm{e}^{t\lambda_2} - \mathrm{e}^{t\lambda_1} \\ \lambda_1 \lambda_2 \left(\mathrm{e}^{t\lambda_1} - \mathrm{e}^{t\lambda_2}\right) & \lambda_2\, \mathrm{e}^{t\lambda_2} - \lambda_1\, \mathrm{e}^{t\lambda_1} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

und mittels $\lambda_1 = \alpha - \beta$ sowie $\lambda_2 = \alpha + \beta$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA} &= \tfrac{1}{2\beta}\, \mathrm{e}^{t\alpha} \begin{pmatrix} \left(\alpha+\beta\right) \mathrm{e}^{-t\beta} - (\alpha-\beta)\, \mathrm{e}^{t\beta} & \mathrm{e}^{t\beta} - \mathrm{e}^{-t\beta} \\ \left(\beta-\alpha\right)\left(\alpha+\beta\right)\left(\mathrm{e}^{t\beta} - \mathrm{e}^{-t\beta}\right) & \left(\alpha+\beta\right) \mathrm{e}^{t\beta} - \left(\alpha-\beta\right) \mathrm{e}^{-t\beta} \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{2\beta}\, \mathrm{e}^{t\alpha} \begin{pmatrix} -\alpha\left(\mathrm{e}^{t\beta} - \mathrm{e}^{-t\beta}\right) + \beta\left(\mathrm{e}^{t\beta} + \mathrm{e}^{-t\beta}\right) & \mathrm{e}^{t\beta} - \mathrm{e}^{-t\beta} \\ \left(\beta^2 - \alpha^2\right)\left(\mathrm{e}^{t\beta} - \mathrm{e}^{-t\beta}\right) & \alpha\left(\mathrm{e}^{t\beta} - \mathrm{e}^{-t\beta}\right) + \beta\left(\mathrm{e}^{t\beta} + \mathrm{e}^{-t\beta}\right) \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{\beta}\, \mathrm{e}^{t\alpha} \begin{pmatrix} -\alpha \sinh(t\beta) + \beta \cosh(t\beta) & \sinh(t\beta) \\ \left(\beta^2 - \alpha^2\right) \sinh(t\beta) & \alpha \sinh(t\beta) + \beta \cosh(t\beta) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Resultat (Verschiedene Eigenwerte). Multiplikation mit $C = (C_1, C_2)^T \in \mathbb{R}^2$ führt auf

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA} C &= \tfrac{1}{\beta}\, \mathrm{e}^{t\alpha} \begin{pmatrix} -\alpha \sinh(t\beta) + \beta \cosh(t\beta) & \sinh(t\beta) \\ \big(\beta^2 - \alpha^2\big) \sinh(t\beta) & \alpha \sinh(t\beta) + \beta \cosh(t\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{t\alpha} \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta}\big(-C_1\,\alpha + C_2\big) \sinh(t\beta) + C_1 \cosh(t\beta) \\ \frac{1}{\beta}\Big(C_1\,\big(\beta^2 - \alpha^2\big) + C_2\,\alpha\Big) \sinh(t\beta) + C_2 \cosh(t\beta) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Resultat (Doppelter Eigenwert). Im Spezialfall eines doppelten Eigenwertes existiert kein Eigensystem, jedoch führt dann der Grenzübergang $\beta \to 0$ und somit $\frac{\sinh(t\beta)}{t\beta} \to 1$ und $\cosh(t\beta) \to 1$ auf das Ergebnis

$$\mathrm{e}^{tA} C = \mathrm{e}^{t\alpha} \begin{pmatrix} \big(-C_1\,\alpha + C_2\big)\, t + C_1 \\ \Big(C_1\,\big(\beta^2 - \alpha^2\big) + C_2\,\alpha\Big)\, t + C_2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

(4) *Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems.* Die Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems, genauer des Anfangswertproblems (mit $Y = (y, y')^T$)

$$\begin{cases} Y'(t) = A\,Y(t)\,, & t \in [0, T]\,, \\ Y(0) \ \text{gegeben}\,, \end{cases}$$

ist gegeben durch

$$Y(t) = \mathrm{e}^{tA}\, Y(0)\,, \quad t \in [0, T]\,.$$

In Hinblick auf das Lösungsverhalten unterscheidet man folgende Fälle.

(i) *Periodischer Fall.* Falls $r^2 - 4k < 0$ bzw. $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{4k - r^2} > 0$ ergibt sich aus den obigen Überlegungen (zusätzliches Ersetzen $\beta = \mathrm{i}\,\gamma$ und $2\sinh(\mathrm{i}\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi} = 2\mathrm{i}\sin\xi$ sowie $2\cosh(\mathrm{i}\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi} = 2\cos\xi$)

$$\begin{gathered}
\alpha = -\tfrac{1}{2}\, r \le 0\,, \qquad \gamma = \tfrac{1}{2}\sqrt{4k - r^2} > 0\,, \\
\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{t\alpha} \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma}\big(-y(0)\,\alpha + y'(0)\big) \sin(t\gamma) + y(0) \cos(t\gamma) \\ \frac{1}{\gamma}\Big(-y(0)\,\big(\alpha^2 + \gamma^2\big) + y'(0)\,\alpha\Big) \sin(t\gamma) + y'(0) \cos(t\gamma) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T]\,.
\end{gathered}$$

(ii) *Aperiodischer Fall.* Falls $r^2 - 4k > 0$ bzw. $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - 4k} > 0$ erhält man die Lösungsdarstellung

$$\begin{gathered}
\alpha = -\tfrac{1}{2}\, r < 0\,, \qquad \beta = \tfrac{1}{2}\sqrt{r^2 - 4k} > 0\,, \\
\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{t\alpha} \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta}\big(-y(0)\,\alpha + y'(0)\big) \sinh(t\beta) + y(0) \cosh(t\beta) \\ \frac{1}{\beta}\Big(y(0)\,\big(\beta^2 - \alpha^2\big) + y'(0)\,\alpha\Big) \sinh(t\beta) + y'(0) \cosh(t\beta) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T]\,.
\end{gathered}$$

(iii) *Aperiodischer Grenzfall.* Speziell für $r^2 - 4k = 0$ bzw. $\beta = 0 = \gamma$ folgt

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}\, r < 0\,, \qquad \beta = 0 = \gamma\,,$$
$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{t\alpha} \begin{pmatrix} y(0) + \big(-\, y(0)\,\alpha + y'(0)\big)\, t \\ y'(0) + \big(-\, y(0)\,\alpha^2 + y'(0)\,\alpha\big)\, t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T]\,.$$

(5) *Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems.* Für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} Y'(t) = A\, Y(t) + b(t)\,, & t \in [0, T]\,, \\ Y(0) \;\text{gegeben}\,, \end{cases}$$
$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -r \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

ergibt sich mittels der linearen Variation-der-Konstanten Formel die Lösungsdarstellung

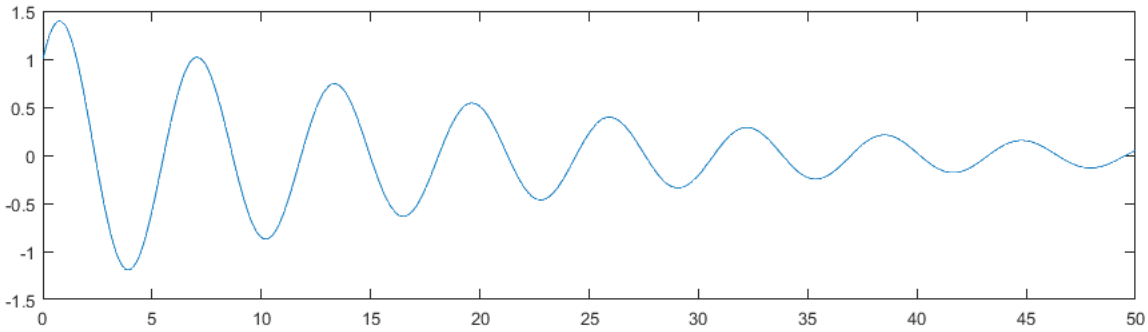
$$Y(t) = \mathrm{e}^{tA}\, Y(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)A}\, b(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,, \quad t \in [0, T]\,.$$

Spezialfall. Setzt man speziell $Y(0) = 0$ so ergibt sich die Lösungsdarstellung

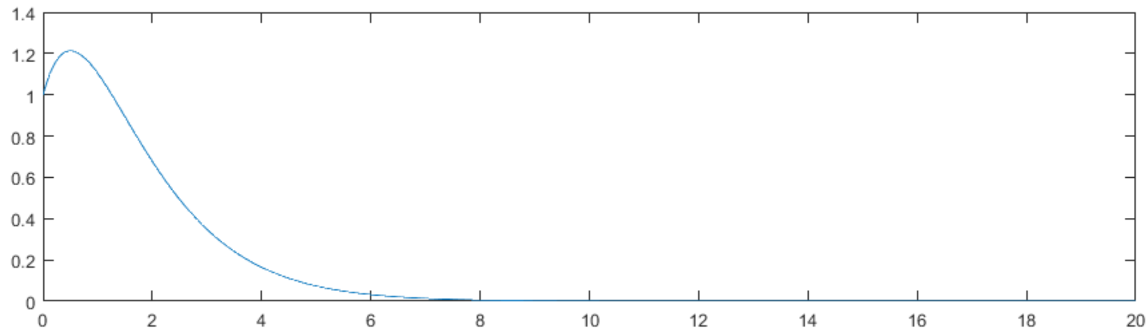
$$Y(0) = 0: \qquad y(t) = \tfrac{1}{\gamma} \int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\alpha}\, \sin\big((t-\tau)\gamma\big)\, f(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,, \quad t \in [0, T]\,.$$

Illustration der homogenen Lösungsfälle.

(1) *Periodischer Fall.* In der folgenden Abbildung ist die Lösung für den homogenen Fall mit $k = 1$ und $r = 0.1$ dargestellt.



(2) *Aperiodischer Grenzfall.* In der nächsten Abbildung ist die Lösung für den homogenen Fall mit Parametern $k = 1$ und $r = 2$ dargestellt.



(3) *Aperiodischer Fall.* In der letzten Abbildung ist die homogene Lösung für den Fall $k = 1$ und $r = 10$ dargestellt.