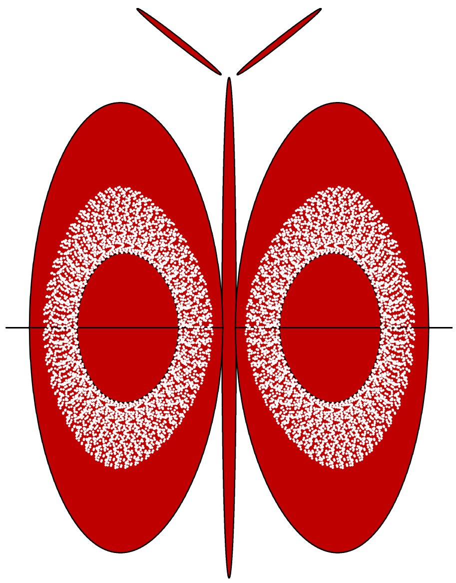
Kompendium zur Lehrveranstaltung

Stochastische partielle Differentialgleichungen

Mechthild Thalhammer



Leopold–Franzens Universität Innsbruck

Sommersemester 2018

Das vorliegende Kompendium faßt die im Rahmen der Lehrveranstaltung **Spezielle Themen und Methoden: Stochastische partielle Differentialgleichungen** (VU4) im Sommersemester 2018 an der Universität Innsbruck behandelten Themen zusammen. Ohne Anspruch auf Allgemeinheit und Vollständigkeit werden theoretische Grundlagen zur Einführung und Analyse von stochastischen partiellen Differentialgleichungen angegeben. Als Illustrationen werden einfache Modellprobleme betrachtet und deren charakteristisches Lösungsverhalten mit jenem der entsprechenden deterministischen Spezialfälle verglichen.

Das Kompendium beruht vorwiegend auf dem von Robert Denk verfaßten Vorlesungsskriptum, welches unter

> ROBERT DENK
> *Stochastische partielle Differentialgleichungen*
> https://www.mathematik.uni-konstanz.de/denk/forschung/publikationen/skripten/

frei verfügbar ist. Im Rahmen des Übungsteiles werden in

> ANSGAR JÜNGEL
> *Partielle Differentialgleichungen*
> https://www.asc.tuwien.ac.at/~juengel/scripts/PDE.pdf

angegebene Grundlagen zu partiellen Differentialgleichungen besprochen.

Als ergänzende und weiterführende Literatur werden insbesondere die von Martin Hairer und Jan van Neerven verfaßten Unterlagen

> MARTIN HAIRER
> *An introduction to stochastic PDEs*
> http://www.hairer.org/notes/SPDEs.pdf
>
> JAN VAN NEERVEN
> *Stochastic Evolution Equations*
> http://fa.its.tudelft.nl/~neerven/publications/notes/ISEM.pdf

empfohlen. Verweise auf Monographien zu stochastischen partiellen Differentialgleichungen sind im Literaturverzeichnis angegeben.

Die erwähnten Vorlesungsskripten bieten die Vorteile kompakter Darstellungen und freier Verfügbarkeit, sollten jedoch mit einem kritischen Blick auf inhaltliche Richtigkeit und mögliche Druckfehler verwendet werden.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

1.1 Stochastische Evolutionsgleichungen 3

1.2 Illustrationen und erste Überlegungen 6

I Vorbereitungen **22**

1 Grundlagen der Stochastik **23**

1.1 Elementare Ungleichung 25

1.2 Ungleichung von Jensen 26

1.3 Charakteristische Funktion 30

1.4 Charakterisierung von Maßen 36

1.5 Charakterisierung von Gauß-Maßen 38

1.6 Konsistenzsatz von Kolmogorov 41

1.7 Existenz von Wiener-Prozessen 42

2 Grundlagen der Funktionalanalysis **44**

2.1 Stetiger linearer Operator 46

2.2 Dualraum und Reflexivität 48

2.3 Vollständiges Orthonormalsystem 51

2.4 Positiver selbstadjungierter Operator 52

2.5 Darstellung eines kompakten Operators 53

2.6 Spurklasse- und Hilbert–Schmidt-Operatoren 58

3 Grundlagen zu Semigruppen **65**

II Wiener-Prozesse in Hilbert-Räumen 66

1 Wahrscheinlichkeitsmaße und Zufallsvariablen 67

1.1 Gleichheit von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Banach-Räumen 68
1.2 Gleichheit von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Hilbert-Räumen 71
1.3 Zufallsvariablen mit Werten in Hilbert-Räumen 76

2 Gauß-Maße und Wiener-Prozesse 82

2.1 Gauß-Maße auf Hilbert-Räumen 83
2.2 Gauß'sche Zufallsvariablen mit Werten in Hilbert-Räumen 91
2.3 Wiener-Prozesse mit Werten in Hilbert-Räumen 98

3 Bedingter Erwartungswert und Martingal 105

3.1 Bedingter Erwartungswert 106
3.2 Martingale mit Werten in Hilbert-Räumen 115
3.3 Martingal-Eigenschaft von Wiener-Prozessen 119

4 Zylindrische Wiener-Prozesse 122

4.1 Zylindrische Wiener-Prozesse mit Werten in Hilbert-Räumen 123

III Das stochastische Integral 124

1 Konstruktion des stochastischen Integrales 125

1.1 Einführung für elementare Integranden 126
1.2 Martingal-Eigenschaft und Itô-Isometrie 130

2 Itô-Integral und Itô-Formel 137

IV Stochastische partielle Differentialgleichungen 138

1 Lineare stochastische partielle Differentialgleichungen 140

1.1 Voraussetzungen 141
1.2 Lösungsbegriffe 143
1.3 Stochastische Faltung 144
1.4 Resultat zu Existenz und Eindeutigkeit 145

Literatur 147

V Anhang 1

A Grundlagen der Maßtheorie 2
A.1 Meßbarer Raum, Meßbare Funktion . . . 4
A.2 Borel-σ-Algebra, Charakterisierung . . . 6
A.3 Maßraum, Wahrscheinlichkeitsraum . . . 8
A.4 Nullmenge, Vollständiger Maßraum . . . 10
A.5 Zählmaß, Dirac-Maß, Gauß-Maß . . . 11
A.6 Lebesgue–Borel-Maß, Lebesgue-Maß . . . 12

B Grundlagen der Integrationstheorie 13

C Grundlegende Begriffe und Resultate 14
C.1 Zufälliges Ereignis, Wahrscheinlichkeit . . . 17
C.2 Zufallsvariable, Induzierte Verteilung . . . 19
C.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit . . . 21
C.4 Erwartungswert, Varianz, Kovarianz . . . 23
C.5 Resultate (Erwartungswert, Varianz) . . . 25
C.6 Stochastischer Prozeß, Filtrierung . . . 27

D Stochastische Differentialgleichungen 30
D.1 Mehrdimensionale Zufallsvariable . . . 33
D.2 Mehrdimensionale Normalverteilung . . . 39
D.3 Mehrdimensionaler Wiener-Prozeß . . . 44
D.4 Illustrationen für Wiener-Prozesse . . . 46
D.5 Integralbegriffe, Lebesgue-Räume . . . 56
D.6 Konstruktion des Itô-Integrales . . . 61
D.7 Itô-Prozeß, Lemma von Itô . . . 68
D.8 Stochastische Differentialgleichungen . . . 76
D.9 Illustration zum Lemma von Itô . . . 79

Kapitel 1

Einleitung

Inhalt. Ausgehend vom elementaren Fall einer deterministischen linearen Diffusionsgleichung werden gebräuchliche Schreibweisen für stochastische partielle Differentialgleichungen eingeführt. Die Überlegungen zeigen, daß theoretische Grundlagen zu stochastischen Prozessen mit Werten in Banach-Räumen und zum stochastischen Integral für die Einführung und Analyse von stochastischen Evolutionsgleichungen wesentlich sind. Als Illustration wird das Lösungsverhalten der stochastischen linearen Diffusionsgleichung mit räumlich und zeitlich weißem Rauschen untersucht; weiters werden ein einfaches Modell für Polymere und als bekanntes Beispiel eines nichtlinearen Systemes die stochastischen Navier–Stokes-Gleichungen angegeben.

Notationen.

(i) Es bezeichne $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Der euklidische Raum $\mathbb{K}^d$ wird mit dem kanonischen Skalarprodukt (komplexe Konjugation im zweiten Argument)

$$x \cdot y = \big(x\big|y\big) = \big(x\big|y\big)_{\mathbb{K}^d} = \sum_{k=1}^{d} x_k\,\overline{y_k}\,, \qquad x = (x_1,\dots,x_d)^T \in \mathbb{K}^d\,, \quad y = (y_1,\dots,y_d)^T \in \mathbb{K}^d\,,$$

und der zugehörigen Norm

$$\|x\| = \|x\|_{\mathbb{K}^d} = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} |x_k|^2}\,, \qquad x = (x_1,\dots,x_d)^T \in \mathbb{K}^d\,,$$

versehen.

(ii) Die Ableitung einer Funktion F, beispielsweise die Fréchet-Ableitung einer Funktion $F : X \to Y$ zwischen zwei normierten Räumen $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$, wird mit F' bezeichnet.

(iii) Um Verwechslungen mit partiellen Ableitungen zu vermeiden, werden im Zusammenhang mit stochastischen Prozessen und stochastischen partiellen Differentialgleichungen die Notationen $u(t), Z(t)$ (statt u_t, Z_t, vgl. DENK, 2014) verwendet.

(iv) Es wird darauf hingewiesen, daß Doppelbezeichnungen, d.h. die Verwendung gleicher Bezeichnungen für verschiedene Objekte, kaum zu vermeiden sind. Beispielsweise bezeichnet A im maßtheoretischen Kontext ein Element $A \in \mathscr{A}$ einer σ-Algebra; im Zusammenhang mit einer stochastischen partiellen Differentialgleichung wird die Bezeichnung A für einen unbeschränkten linearen Operator $A : D(A) \subset X \to X$ verwendet.

1.1 Stochastische Evolutionsgleichungen

Evolutionsgleichungen.

(i) *Partielle Differentialgleichung.* Als einfaches Beispiel eines parabolischen Anfangsrandwertproblemes wird die eindimensionale lineare Diffusionsgleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen auf einem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und vorgegebener Anfangsbedingung $U_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ betrachtet

$$\begin{cases} \partial_t U(x,t) = \partial_{xx} U(x,t) + B(x,t)\,, \qquad (x,t) \in (a,b) \times (0,T)\,, \\ U(a,t) = 0 = U(b,t)\,, \qquad t \in [0,T]\,, \\ U(x,0) = U_0(x)\,, \qquad x \in [a,b]\,. \end{cases}$$

(ii) *Evolutionsgleichung.* Für theoretische Untersuchungen ist eine kompakte Formulierung des Anfangsrandwertproblemes als abstraktes Cauchy-Problem zweckmäßig

$$\begin{cases} u'(t) = A\,u(t) + b(t)\,, \qquad t \in (0,T)\,, \\ u(0) = u_0\,; \end{cases}$$

dabei entspricht der unbeschränkte lineare Operator $A : D(A) \subset X \to X$ dem Differentialoperator ∂_{xx}, und $b : [0,T] \to X$ gibt die Inhomogenität an. Wesentlich für die theoretische Analyse, etwa für die Herleitung von Resultaten zur Existenz, Eindeutigkeit und Regularität der Lösung, ist die Wahl des zugrundeliegenden Funktionenraumes X und insbesondere die Definition des Teilraumes $D(A) \subset X$, welcher die geforderten Regularitätseigenschaften sowie die vorgegebenen Randbedingungen wiederspiegelt. Betrachtet man beispielsweise den Raum stetiger Funktionen versehen mit der Maximumsnorm als zugrundeliegenden Banach-Raum $(\mathscr{C}([a,b]), \|\cdot\|_{\mathscr{C}})$, führt dies auf

$$A : D(A) = \Big\{ v \in \mathscr{C}^2\big((a,b)\big) \cap \mathscr{C}\big([a,b]\big) : v(a) = 0 = v(b) \Big\} \longrightarrow X = \mathscr{C}\big([a,b]\big) : v \longmapsto v''\,,$$

was dem Begriff der klassischen Lösung entspricht; wählt man stattdessen den Hilbertraum $(L^2(a,b), (\cdot|\cdot)_{L^2}, \|\cdot\|_{L^2})$ als zugrundeliegenden Funktionenraum, ergibt sich

$$A : D(A) = H^2(a,b) \cap H^1_0(a,b) \longrightarrow X = L^2(a,b) : v \longmapsto v''$$

und damit eine Lösung in einem abgeschwächten Sinn.

(iii) *Verallgemeinerung.* Ähnliche Überlegungen gelten für die lineare Diffusionsgleichung in mehreren Raumdimensionen oder allgemeiner für parabolische Evolutionsgleichungen, vgl. Theorie sektorieller Operatoren und analytischer Halbgruppen (LUNARDI, 1995).

Stochastische Evolutionsgleichungen.

(i) *Stochastische Einflußgrößen.* Insbesondere in den Naturwissenschaften sind relevante mathematische Modelle durch partielle Differentialgleichungen, welche die für die betrachteten Vorgänge wesentlichen Einflußgrößen in Zusammenhang setzen, gegeben, vgl. Lehrveranstaltung *Mathematische Modellierung mit nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen.* In vielen realistischen Anwendungen ist es notwendig, neben dem Einfluß von bekannten Größen auch den Effekt von unvermeidbaren (kleinen) Störungen (*Rauschen*) miteinzubeziehen; solche unbekannten bzw. nur mit hohem Aufwand bestimmbaren Einflußgrößen werden häufig durch orts- und zeitabhängige Zufallsgrößen modelliert.

(ii) *Stochastische Evolutionsgleichung.* Die angegebenen Überlegungen motivieren die Betrachtung von stochastischen partiellen Differentialgleichungen; mittels kompakter Formulierung ergibt sich beispielsweise eine stochastische Evolutionsgleichung der Form

$$\begin{cases} u'(t) = A\,u(t) + B\,Z'(t)\,, & t \in (0,T)\,, \\ u(0) = u_0\,, \end{cases}$$

wobei $B : X \to X$ einen beschränkten linearen Operator und $(Z(t))_{t\in[0,T]}$ einen stochastischen Prozeß mit Werten im zugrundeliegenden Banach-Raum bezeichnet

$$Z(t) \in X\,, \qquad t \in [0,T]\,.$$

Da die für Anwendungen relevanten stochastischen Prozesse nicht differenzierbar sind, d.h. der Wert der zeitlichen Ableitung $Z'(t)$ im klassischen Sinn nicht wohldefiniert ist, ist diese Formulierung im distributionellen Sinn oder als formale Schreibweise zu verstehen.[1]

(iii) *Stochastisches Integral.* Aufgrund der geringen Regularität stochastischer Größen ist die Lösung einer stochastischen Evolutionsgleichung im Allgemeinen als Lösung einer Integralgleichung wie etwa

$$u(t) = u_0 + \int_0^t A\,u(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t B\,\mathrm{d}Z(\tau)\,, \qquad t \in (0,T)\,,$$

zu verstehen. Das stochastische Integral ist als Erweiterung des Riemann–Stieltjes-Integrales erklärt; in Abhängigkeit von der zugrundeliegenden Approximation ergibt sich das Itô-Integral oder das Stratonovich-Integral. In Analogie zur linearen Variation-der-Konstanten-Formel betrachtet man auch die Lösungsdarstellung

$$u(t) = \mathrm{e}^{tA} u_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)A} B\,\mathrm{d}Z(\tau)\,, \qquad t \in (0,T)\,.$$

[1] *Bemerkung.* Diese Schwierigkeiten treten bereits bei stochastischen gewöhnlichen Differentialgleichungen auf; beispielsweise sind die Pfade eines eindimensionalen Wiener-Prozesses fast sicher stetig, jedoch fast sicher an keiner Stelle differenzierbar.

(iv) *Symbolische Notation.* Um anstelle der mathematisch korrekten aber etwas schwerfälligen Formulierung als Integralgleichung die kompakte Formulierung als Evolutionsgleichung beizubehalten und dennoch auf fehlende Regularitätseigenschaften aufmerksam zu machen, ist die folgende symbolische Notation gebräuchlich (die Schreibweisen $u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ und $Z' = \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}$ dienen als Eselsbrücke)

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t) = A\,u(t)\,\mathrm{d}t + B\,\mathrm{d}Z(t)\,, & t \in (0,T)\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{cases}$$

(v) *Bemerkung.* Der Übergang von einer Differentialgleichung auf eine Integralgleichung entspricht dem Übergang von einer starken Lösung, d.h. einer im Sinn der schwachen Ableitung hinreichend oft differenzierbaren Lösung, auf eine milde Lösung. Insbesondere im Zusammenhang mit parabolischen Evolutionsgleichungen nützt man die lineare Variation-der-Konstanten-Formel und Modifikationen davon, um geeignete Lösungsdarstellungen in Integralform herzuleiten, vgl. LUNARDI (1995).

Deterministisches Modell und stochastische Erweiterung. Im Prinzip ist für jede deterministische Evolutionsgleichung, beispielsweise eine semilineare parabolische Evolutionsgleichung der Form

$$\begin{cases} u'(t) = A\,u(t) + G\big(t, u(t)\big)\,, & t \in (0,T)\,, \\ u(0) = u_0\,, \end{cases}$$

die Betrachtung einer stochastischen Erweiterung, etwa von der Form

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t) = \Big(A\,u(t) + G\big(t, u(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t + B\big(t, u(t)\big)\,\mathrm{d}Z(t)\,, & t \in (0,T)\,, \\ u(0) = u_0\,, \end{cases}$$

von Interesse. Da die Eigenschaften des betrachteten stochastischen Prozesses das Lösungsverhalten einer stochastischen partiellen Differentialgleichung wesentlich beeinflussen, ist es nicht möglich oder sinnvoll, allgemeingültige Aussagen zu treffen; ähnlich wie bei der Analyse von deterministischen partiellen Differentialgleichungen erfordert die Analyse von stochastischen partiellen Differentialgleichungen eine Beschränkung auf gewisse Problemklassen.

Theoretische Grundlagen. Die obigen Überlegungen zeigen, daß theoretische Resultate zu stochastischen Prozessen mit Werten in Banach-Räumen

$$\big(Z(t)\big)_{t\in[0,T]}\,, \quad Z(t) \in X\,, \quad t \in [0,T]\,,$$

und zum stochastischen Integral im Sinne von Itô oder Stratonovich

$$\int_0^T B(\tau)\,\mathrm{d}Z(\tau)\,, \qquad \int_0^T B(\tau) \circ \mathrm{d}Z(\tau)\,,$$

wesentliche Grundlagen für die Einführung und Analyse stochastischer partieller Differentialgleichungen bilden. In Anlehnung an DENK (2014) werden in erster Linie Wiener-Prozesse behandelt; der relevante Fall von Lévy-Prozessen wird nur am Rande erwähnt.

1.2 Illustrationen und erste Überlegungen

Vorbemerkung. Im Folgenden werden Überlegungen zum Lösungsverhalten stochastischer partieller Differentialgleichungen angegeben; insbesondere werden

- die stochastische Diffusionsgleichung,
- ein einfaches Modell für Polymere und
- die stochastische Navier–Stokes Gleichungen

behandelt. Die Darstellung folgt HAIRER (2009); Argumente werden großteils nur angedeutet und nicht rigoros ausgeführt.

Stochastische Diffusionsgleichung.

(i) *Homogene Diffusionsgleichung.* Betrachtet wird die homogene lineare Diffusionsgleichung auf dem gesamten Raum

$$\begin{cases} \partial_t U(x,t) = \Delta U(x,t)\,, & (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty)\,, \\ U(x,0) = U_0(x)\,, & x \in \mathbb{R}^d\,; \end{cases}$$

bei Vorgabe einer beschränkten stetigen Anfangsbedingung $U_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ existiert eine eindeutig bestimmte stetige Lösung $U : \mathbb{R}^d \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Im eindimensionalen Fall führt die Anwendung der Fourier-Transformation auf die Lösungsdarstellung[2]

$$\begin{aligned} d = 1: \qquad U(x,t) &= \tfrac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa(x-\xi)-\kappa^2 t}\, U_0(\xi)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\kappa \\ &= \big(2\sqrt{\pi t}\big)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4t}(x-\xi)^2}\, U_0(\xi)\, \mathrm{d}\xi\,, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)\,; \end{aligned}$$

die Erweiterung auf den allgemeinen Fall ist offensichtlich

$$U(x,t) = \big(2\sqrt{\pi t}\big)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4t}\|x-\xi\|^2}\, U_0(\xi)\, \mathrm{d}\xi\,, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty)\,.$$

(ii) *Kompakte Formulierung.* Die kompakte Formulierung der homogenen Diffusionsgleichung als Evolutionsgleichung lautet

$$\begin{cases} u'(t) = A\, u(t)\,, & t \in (0,\infty)\,, \\ u(0) = u_0\,, \end{cases}$$

wobei der lineare Operator $A : D(A) \subset \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{C}(\mathbb{R}^d)$ dem Laplace-Operator entspricht; die Lösung $u : [0,\infty) \to \mathscr{C}(\mathbb{R}^d)$ ist durch die folgende Darstellung gegeben

$$u(t) = \mathrm{e}^{tA}\, u_0 = \big(2\sqrt{\pi t}\big)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4t}\|(\cdot)-\xi\|^2}\, u_0(\xi)\, \mathrm{d}\xi\,, \qquad t \in (0,\infty)\,.$$

(iii) *Inhomogene Diffusionsgleichung.* Bei Hinzunahme einer Inhomogenität nützt man die Lösungsdarstellung mittels der linearen Variation-der-Konstanten-Formel

$$\begin{cases} u'(t) = A\, u(t) + f(t)\,, & t \in (0,\infty)\,, \\ u(0) = u_0\,, \end{cases}$$

$$u(t) = \mathrm{e}^{tA}\, u_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)A}\, f(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,, \qquad t \in [0,\infty)\,.$$

[2] Vgl. Kompendium zur Lehrveranstaltung *Mathematische Modellierung mit nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen.*

Genauer, die Lösung der linearen Diffusionsgleichung

$$\begin{cases} \partial_t U(x,t) = \Delta U(x,t) + F(x,t)\,, & (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty)\,, \\ U(x,0) = U_0(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^d\,, \end{cases}$$

mit orts- und zeitabhängiger Funktion $F : \mathbb{R}^d \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist durch

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \big(2\sqrt{\pi t}\big)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4t}\|x-\xi\|^2}\, U_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \big(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\big)^{-d}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{4(t-\tau)}\|x-\xi\|^2}\, F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty)\,, \end{aligned}$$

gegeben; aufgrund der Glättungseigenschaft des Evolutionsoperators ist diese Darstellung für eine große Klasse von Funktionen und sogar für eine große Klasse von Distributionen wohldefiniert.

(iv) *Stochastische Diffusionsgleichung (Weißes Rauschen).* Das räumlich und zeitlich weiße Rauschen (*space-time white noise*) ist ein durch die Kovarianzfunktion

$$E\big(Z(x_1,t_1)\,Z(x_2,t_2)\big) = \delta(x_1-x_2)\,\delta(t_1-t_2)\,, \qquad x_1,x_2 \in \mathbb{R}^d\,, \quad t_1,t_2 \in (0,\infty)\,,$$

charakterisierter zentrierter distributionen-wertiger Gauß-Prozeß.[3] Im Folgenden wird das Lösungsverhalten der stochastischen linearen Diffusionsgleichung

$$\begin{cases} \partial_t U(x,t) = \Delta U(x,t) + Z(x,t)\,, & (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty)\,, \\ U(x,0) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}^d\,, \end{cases}$$

und insbesondere die Regularität der Lösung für diese spezielle Inhomogenität untersucht; zur Vereinfachung wird die Anfangsbedingung $U_0 = 0$ angenommen.

(v) *Kovarianzfunktion.* Ohne nähere Begründung sei festgehalten, daß die Lösung der stochastischen Diffusionsgleichung einen zentrierten Gauß-Prozeß bildet; als erster Schritt wird die zugehörige Kovarianzfunktion

$$E\big(U(x_1,t_1)\,U(x_2,t_2)\big)\,, \qquad x_1,x_2 \in \mathbb{R}^d\,, \quad t_1,t_2 \in (0,\infty)\,,$$

[3] *Delta-Distribution.* Für eine Testfunktion $f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$ ist die Dirac'sche Delta-Distribution wie folgt definiert

$$\delta_x(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\,\delta(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^d\,;$$

hier wird die gebräuchliche Schreibweise mittels Integral verwendet. Eine entsprechende Relation gilt für Definitionsbereiche $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$.

Zentrierter Gauß-Prozeß. Ein stochastischer Prozeß $(Z(t))_{t\in\mathscr{T}}$ ist eine Familie von Zufallsvariablen. Ist für beliebige endlich viele Elemente $t_1,\dots,t_K \in \mathscr{T}$ das von der Zufallsvariable $(Z(t_1),\dots,Z(t_K))$ induzierte Maß ein Gauß-Maß, so heißt der stochastische Prozeß ein Gauß-Prozeß. Gilt für alle Elemente $t \in \mathscr{T}$ die Relation $E(Z(t)) = 0$, so spricht man von einem zentrierten Gauß-Prozeß.

bestimmt. Aus der zuvor angegebenen Darstellung für die Lösung der inhomogenen Diffusionsgleichung

$$U(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \big(2\sqrt{\pi(t-\tau)}\big)^{-d} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{4(t-\tau)}\|x-\xi\|^2} \, Z(\xi,\tau)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau\,, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty)\,,$$

erhält man die Relation

$$\begin{aligned} &U(x_1,t_1)\, U(x_2,t_2) \\ &\quad = \tfrac{1}{(4\pi)^d} \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \big((t_1-\tau_1)\,(t_2-\tau_2)\big)^{-\frac{d}{2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{4(t_1-\tau_1)}\|x_1-\xi_1\|^2 - \frac{1}{4(t_2-\tau_2)}\|x_2-\xi_2\|^2} \\ &\qquad\quad \times Z(\xi_1,\tau_1)\, Z(\xi_2,\tau_2)\, \mathrm{d}\xi_2\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\tau_2\, \mathrm{d}\tau_1\,, \qquad (x_1,t_1),(x_2,t_2) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty)\,. \end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität des Erwartungswertes folgt daraus[4]

$$\begin{aligned} &E\big(U(x_1,t_1)\, U(x_2,t_2)\big) \\ &\quad = \tfrac{1}{(4\pi)^d} \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \big((t_1-\tau_1)\,(t_2-\tau_2)\big)^{-\frac{d}{2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{4(t_1-\tau_1)}\|x_1-\xi_1\|^2 - \frac{1}{4(t_2-\tau_2)}\|x_2-\xi_2\|^2} \\ &\qquad\quad \times E\big(Z(\xi_1,\tau_1)\, Z(\xi_2,\tau_2)\big)\, \mathrm{d}\xi_2\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\tau_2\, \mathrm{d}\tau_1 \\ &\quad = \tfrac{1}{(4\pi)^d} \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \big((t_1-\tau_1)\,(t_2-\tau_2)\big)^{-\frac{d}{2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{4(t_1-\tau_1)}\|x_1-\xi_1\|^2 - \frac{1}{4(t_2-\tau_2)}\|x_2-\xi_2\|^2} \\ &\qquad\quad \times \delta(\xi_1-\xi_2)\, \delta(\tau_1-\tau_2)\, \mathrm{d}\xi_2\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\tau_2\, \mathrm{d}\tau_1 \\ &\quad = \tfrac{1}{(4\pi)^d} \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}^d} \big((t_1-\tau_1)\,(t_2-\tau_2)\big)^{-\frac{d}{2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{4(t_1-\tau_1)}\|x_1-\xi_1\|^2 - \frac{1}{4(t_2-\tau_2)}\|x_2-\xi_1\|^2} \\ &\qquad\quad \times \delta(\tau_1-\tau_2)\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\tau_2\, \mathrm{d}\tau_1 \\ &\quad = \tfrac{1}{(4\pi)^d} \int_0^{\min\{t_1,t_2\}}\int_{\mathbb{R}^d} \big((t_1-\tau_1)\,(t_2-\tau_1)\big)^{-\frac{d}{2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{4(t_1-\tau_1)}\|x_1-\xi_1\|^2 - \frac{1}{4(t_2-\tau_1)}\|x_2-\xi_1\|^2}\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\tau_1\,; \end{aligned}$$

zur Vereinfachung der Notation werden die Integrationsvariablen ξ_1, τ_1 durch ξ, τ ersetzt

$$\begin{aligned} &E\big(U(x_1,t_1)\, U(x_2,t_2)\big) \\ &\quad = \tfrac{1}{(4\pi)^d} \int_0^{\min\{t_1,t_2\}}\int_{\mathbb{R}^d} \big((t_1-\tau)\,(t_2-\tau)\big)^{-\frac{d}{2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{4(t_1-\tau)}\|x_1-\xi\|^2 - \frac{1}{4(t_2-\tau)}\|x_2-\xi\|^2}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau\,. \end{aligned}$$

[4] *Bemerkung.* Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ verwendet man die Relationen

$$\int_\Omega f(\tau)\, \delta(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = \begin{cases} f(t)\,, & t \in \Omega\,, \\ 0\,, & t \notin \Omega\,, \end{cases}$$

$$\int_0^{t_2} f(\tau_1,\tau_2)\, \delta(\tau_1-\tau_2)\, \mathrm{d}\tau_2 = \begin{cases} f(\tau_1,\tau_1)\,, & \tau_1 \in [0,t_2]\,, \\ 0\,, & \tau_1 \notin [0,t_2]\,, \end{cases}$$

$$\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} f(\tau_1,\tau_2)\, \delta(\tau_1-\tau_2)\, \mathrm{d}\tau_2\, \mathrm{d}\tau_1 = \int_{[0,t_1]\cap[0,t_2]} f(\tau_1,\tau_1)\, \mathrm{d}\tau_1 = \int_0^{\min\{t_1,t_2\}} f(\tau_1,\tau_1)\, \mathrm{d}\tau_1\,.$$

Mittels der Transformation $\eta = \xi - x_2$ bzw. $\xi = \eta + x_2$ erhält man

$$\begin{aligned}
&E\big(U(x_1,t_1)\,U(x_2,t_2)\big)\\
&\quad= \tfrac{1}{(4\pi)^d}\int_0^{\min\{t_1,t_2\}}\int_{\mathbb{R}^d}\big((t_1-\tau)\,(t_2-\tau)\big)^{-\frac{d}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4(t_1-\tau)}\,\|x_1-x_2-\eta\|^2-\frac{1}{4(t_2-\tau)}\,\|\eta\|^2}\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\tau\\
&\quad= E\big(U(x_1-x_2,t_1)\,U(0,t_2)\big)\,,
\end{aligned}$$

was die Gültigkeit der Identität

$$E\big(U(x_1,t_1)\,U(x_2,t_2)\big) = E\big(U(x_1-x_2,t_1)\,U(0,t_2)\big)\,,\qquad x_1,x_2\in\mathbb{R}^d\,,\quad t_1,t_2\in(0,\infty)\,,$$

zeigt. Somit reicht es aus

$$\begin{aligned}
E\big(U(x,t_1)\,U(0,t_2)\big) = \tfrac{1}{(4\pi)^d}\int_0^{\min\{t_1,t_2\}}\int_{\mathbb{R}^d}&\big((t_1-\tau)\,(t_2-\tau)\big)^{-\frac{d}{2}}\\
&\times\mathrm{e}^{-\frac{1}{4(t_1-\tau)}\,\|x-\xi\|^2-\frac{1}{4(t_2-\tau)}\,\|\xi\|^2}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau\,,\qquad x\in\mathbb{R}^d\,,\quad t_1,t_2\in(0,\infty)\,,
\end{aligned}$$

zu berechnen. Im eindimensionalen Fall führt quadratisches Ergänzen

$$\begin{aligned}
\alpha^2\,(x-\xi)^2+\beta^2\,\xi^2 &= \alpha^2\,x^2-2\,\alpha^2\,x\,\xi+\big(\alpha^2+\beta^2\big)\,\xi^2\\
&= \alpha^2\,x^2+\big(\alpha^2+\beta^2\big)\Big(\xi^2-2\,\tfrac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\,x\,\xi\pm\tfrac{\alpha^4}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,x^2\Big)\\
&= \big(\alpha^2-\tfrac{\alpha^4}{\alpha^2+\beta^2}\big)\,x^2+\big(\alpha^2+\beta^2\big)\big(\xi-\tfrac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\,x\big)^2\\
&= \tfrac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\,x^2+\big(\alpha^2+\beta^2\big)\big(\xi-\tfrac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\,x\big)^2\,,\\
\tfrac{1}{t_1-\tau}\,(x-\xi)^2+\tfrac{1}{t_2-\tau}\,\xi^2 &= \frac{\frac{1}{t_1-\tau}\,\frac{1}{t_2-\tau}}{\frac{1}{t_1-\tau}+\frac{1}{t_2-\tau}}\,x^2+\big(\tfrac{1}{t_1-\tau}+\tfrac{1}{t_2-\tau}\big)\Big(\xi-\frac{\frac{1}{t_1-\tau}}{\frac{1}{t_1-\tau}+\frac{1}{t_2-\tau}}\,x\Big)^2\\
&= \tfrac{1}{t_1+t_2-2\tau}\,x^2+\tfrac{t_1+t_2-2\tau}{(t_1-\tau)(t_2-\tau)}\,\big(\xi-\tfrac{t_2-\tau}{t_1+t_2-2\tau}\,x\big)^2\,,
\end{aligned}$$

und die elementare Rechnung (Substitution $\eta^2 = \frac{1}{4}\,\frac{t_1+t_2-2\tau}{(t_1-\tau)(t_2-\tau)}\,(\xi-\frac{t_2-\tau}{t_1+t_2-2\tau}\,x)^2$ und folglich $\xi = 2\,(\frac{(t_1-\tau)(t_2-\tau)}{t_1+t_2-2\tau})^{\frac{1}{2}}\,\eta+\frac{t_2-\tau}{t_1+t_2-2\tau}\,x)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4(t_1-\tau)}\,(x-\xi)^2-\frac{1}{4(t_2-\tau)}\,\xi^2}\,\mathrm{d}\xi &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{4(t_1+t_2-2\tau)}\,x^2}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{t_1+t_2-2\tau}{4(t_1-\tau)(t_2-\tau)}\,(\xi-\frac{t_2-\tau}{t_1+t_2-2\tau}\,x)^2}\,\mathrm{d}\xi\\
&= 2\,\big(\tfrac{(t_1-\tau)(t_2-\tau)}{t_1+t_2-2\tau}\big)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4(t_1+t_2-2\tau)}\,x^2}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\eta^2}\,\mathrm{d}\eta\\
&= 2\,\big(\pi\,\tfrac{(t_1-\tau)(t_2-\tau)}{t_1+t_2-2\tau}\big)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4(t_1+t_2-2\tau)}\,x^2}
\end{aligned}$$

auf die Identität (Substitution $\sigma = t_1+t_2-2\tau$)

$$\begin{aligned}
d=1:\qquad E\big(U(x,t_1)\,U(0,t_2)\big) &= \tfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\min\{t_1,t_2\}}(t_1+t_2-2\tau)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4(t_1+t_2-2\tau)}\,x^2}\,\mathrm{d}\tau\\
&= \tfrac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_{t_1+t_2-2\min\{t_1,t_2\}}^{t_1+t_2}\sigma^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4\sigma}\,x^2}\,\mathrm{d}\sigma\,.
\end{aligned}$$

Analoge Überlegungen, nämlich quadratisches Ergänzen

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{t_1-\tau}\,\big\|x-\xi\big\|^2+\tfrac{1}{t_2-\tau}\,\big\|\xi\big\|^2 &= \sum_{k=1}^{d}\Big(\tfrac{1}{t_1-\tau}\,(x_k-\xi_k)^2+\tfrac{1}{t_2-\tau}\,\xi_k^2\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{d}\Big(\tfrac{1}{t_1+t_2-2\tau}\,x_k^2+\tfrac{t_1+t_2-2\tau}{(t_1-\tau)(t_2-\tau)}\,\big(\xi_k-\tfrac{t_2-\tau}{t_1+t_2-2\tau}\,x_k\big)^2\Big)\\
&= \tfrac{1}{t_1+t_2-2\tau}\,\big\|x\big\|^2+\tfrac{t_1+t_2-2\tau}{(t_1-\tau)(t_2-\tau)}\,\big\|\xi-\tfrac{t_2-\tau}{t_1+t_2-2\tau}\,x\big\|^2
\end{aligned}
$$

sowie die Bestimmung von (verwende obige Überlegungen)

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4(t_1-\tau)}\,\|x-\xi\|^2-\frac{1}{4(t_2-\tau)}\,\|\xi\|^2}\,\mathrm{d}\xi &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{4(t_1+t_2-2\tau)}\,\|x\|^2}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{-\frac{t_1+t_2-2\tau}{4(t_1-\tau)(t_2-\tau)}\,\|\xi-\frac{t_2-\tau}{t_1+t_2-2\tau}\,x\|^2}\,\mathrm{d}\xi\\
&= \mathrm{e}^{-\frac{1}{4(t_1+t_2-2\tau)}\,\|x\|^2}\prod_{k=1}^{d}\Big(\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{t_1+t_2-2\tau}{4(t_1-\tau)(t_2-\tau)}\,(\xi_k-\frac{t_2-\tau}{t_1+t_2-2\tau}\,x_k)^2}\,\mathrm{d}\xi_k\Big)\\
&= \mathrm{e}^{-\frac{1}{4(t_1+t_2-2\tau)}\,\|x\|^2}\prod_{k=1}^{d}\Big(2\,\big(\tfrac{(t_1-\tau)(t_2-\tau)}{t_1+t_2-2\tau}\big)^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\eta_k^2}\,\mathrm{d}\eta_k\Big)\\
&= 2^d\Big(\pi\,\tfrac{(t_1-\tau)(t_2-\tau)}{t_1+t_2-2\tau}\Big)^{\frac{d}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4(t_1+t_2-2\tau)}\,\|x\|^2}\,,
\end{aligned}
$$

zeigen im allgemeinen Fall (Substitution wie zuvor)

$$
\begin{aligned}
E\big(U(x,t_1)\,U(0,t_2)\big) &= \big(2\sqrt{\pi}\big)^{-d}\int_0^{\min\{t_1,t_2\}}\big(t_1+t_2-2\tau\big)^{-\frac{d}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4(t_1+t_2-2\tau)}\,\|x\|^2}\,\mathrm{d}\tau\\
&= \tfrac{1}{2}\,\big(2\sqrt{\pi}\big)^{-d}\int_{t_1+t_2-2\min\{t_1,t_2\}}^{t_1+t_2}\sigma^{-\frac{d}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4\sigma}\,\|x\|^2}\,\mathrm{d}\sigma\,.
\end{aligned}
$$

Insgesamt führt dies auf (ohne Einschränkung der Allgemeinheit gelte $t_1 \leq t_2$)

$$
E\big(U(x,t_1)\,U(0,t_2)\big) = \frac{1}{2^{d+1}\sqrt{\pi}^d}\int_{t_2-t_1}^{t_2+t_1}\sigma^{-\frac{d}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4\sigma}\,\|x\|^2}\,\mathrm{d}\sigma\,,\qquad x\in\mathbb{R}^d\,,\quad 0<t_1\leq t_2<\infty\,.
$$

Da die Singularität $\sigma^{-\frac{d}{2}}$ nur für $d = 1$ bei $\sigma = 0$ integrierbar ist und die Lösungsdarstellung in höheren Raumdimensionen auf keine Funktion im klassischen Sinn führt, wird von nun an der eindimensionale Fall betrachtet.

(vi) *Zeitliche Regularität.* Die im Folgenden angegebenen Überlegungen zeigen, daß im Regime $t_1 \approx t_2$ die Relation

$$
E\Big(\big(U(0,t_1)-U(0,t_2)\big)^2\Big)\approx C\,(t_2-t_1)^{\alpha}\,,\qquad 0<t_1\leq t_2<\infty\,,
$$

mit Hölder-Exponent $\alpha = \frac{1}{2}$ gültig ist. Wertet man nämlich die Kovarianzfunktion der Lösung bei $x = 0$ aus, erhält man

$$
E\big(U(0,t_1)\,U(0,t_2)\big) = \tfrac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_{t_2-t_1}^{t_2+t_1}\sigma^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\sigma = \tfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\Big((t_2+t_1)^{\frac{1}{2}}-(t_2-t_1)^{\frac{1}{2}}\Big)\,,\qquad 0<t_1\leq t_2<\infty\,;
$$

aufgrund der Linearität des Erwartungswertes folgt damit

$$\begin{aligned}
E\Big(\big(U(0,t_1)-U(0,t_2)\big)^2\Big) &= E\Big(\big(U(0,t_1)\big)^2\Big) - 2\,E\big(U(0,t_1)\,U(0,t_2)\big) + E\Big(\big(U(0,t_2)\big)^2\Big) \\
&= \tfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\,(2\,t_1)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\Big((t_2+t_1)^{\frac{1}{2}} - (t_2-t_1)^{\frac{1}{2}}\Big) + \tfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\,(2\,t_2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\Big((t_2-t_1)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(t_1^{\frac{1}{2}} + t_2^{\frac{1}{2}}\big) - (t_2+t_1)^{\frac{1}{2}}\Big), \qquad 0 < t_1 \leq t_2 < \infty .
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Taylor-Reihenentwicklungen

$$\begin{gathered}
f(\delta) = (1+\delta)^{\frac{1}{2}}, \quad f'(\delta) = \tfrac{1}{2}\,(1+\delta)^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(\delta) = -\tfrac{1}{4}\,(1+\delta)^{-\frac{3}{2}}, \\
f(0) = 1, \quad f'(0) = \tfrac{1}{2}, \quad f''(0) = -\tfrac{1}{4}, \\
(1+\delta)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}\,\delta - \tfrac{1}{8}\,\delta^2 + \mathscr{O}\big(\delta^3\big), \\
f(\delta) = (2+\delta)^{\frac{1}{2}}, \quad f'(\delta) = \tfrac{1}{2}\,(2+\delta)^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(\delta) = -\tfrac{1}{4}\,(2+\delta)^{-\frac{3}{2}}, \\
f(0) = \sqrt{2}, \quad f'(0) = \tfrac{1}{2\sqrt{2}}, \quad f''(0) = -\tfrac{1}{8\sqrt{2}}, \\
(2+\delta)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} + \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\,\delta - \tfrac{1}{8\sqrt{2}}\,\delta^2 + \mathscr{O}\big(\delta^3\big), \\
\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(1 + (1+\delta)^{\frac{1}{2}}\big) - (2+\delta)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(2 + \tfrac{1}{2}\,\delta - \tfrac{1}{8}\,\delta^2\big) - \big(\sqrt{2} + \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\,\delta - \tfrac{1}{8\sqrt{2}}\,\delta^2\big) + \mathscr{O}\big(\delta^3\big) = \mathscr{O}\big(\delta^3\big),
\end{gathered}$$

ergibt sich speziell für $t_2 - t_1 = t_1\,\delta$ bzw. $t_2 = t_1\,(1+\delta)$ die Entwicklung

$$\begin{aligned}
E\Big(\big(U(0,t_1)-U(0,t_2)\big)^2\Big) &= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\,t_1^{\frac{1}{2}}\Big(\delta^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(1 + (1+\delta)^{\frac{1}{2}}\big) - (2+\delta)^{\frac{1}{2}}\Big) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\Big((t_1\delta)^{\frac{1}{2}} + \mathscr{O}\big(t_1^{\frac{1}{2}}\,\delta^3\big)\Big) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\,(t_2-t_1)^{\frac{1}{2}} + \mathscr{O}\Big(t_1^{-\frac{5}{2}}\,(t_2-t_1)^3\Big), \qquad 0 < t_1 \leq t_2 < \infty,
\end{aligned}$$

was die folgende zeitliche Abhängigkeit zeigt

$$E\Big(\big(U(0,t_1)-U(0,t_2)\big)^2\Big) \approx C\,(t_2-t_1)^{\frac{1}{2}}, \qquad 0 < t_1 \leq t_2 < \infty, \quad t_2 - t_1 \ll t_1 .$$

Die Anwendung eines Resultates von Kolmogorov führt auf die Schlußfolgerung (fast überall)

$$\big|U(x,t_1) - U(x,t_2)\big| \leq C\,(t_2-t_1)^{\alpha}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t_1 \leq t_2 < \infty, \quad 0 \leq \alpha < \tfrac{1}{4}.$$

(vii) *Vergleich.* Für einen reellwertigen Gauß-Prozeß (Brown'sche Bewegung) lautet die entsprechende Relation

$$\text{Brown'sche Bewegung:} \qquad E\Big(\big(W(t_1) - W(t_2)\big)^2\Big) = t_2 - t_1, \qquad 0 < t_1 \leq t_2 < \infty.$$

(viii) *Räumliche Regularität.* Um das asymptotische Verhalten von

$$E\big(U(x_1,t)\,U(x_2,t)\big) = E\big(U(x_1-x_2,t)\,U(0,t)\big)\,, \qquad x_1,x_2\in\mathbb{R}^d\,, \quad t\in(0,\infty)\,,$$

im Regime $x_1 \approx x_2$ näherungsweise zu bestimmen, nützt man partielle Integration (setze $\tau = \frac{1}{4\sigma}\,x^2$ bzw. $\sigma = \frac{1}{4\tau}\,x^2$ und erhalte $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{1}{4\tau^2}\,x^2$, verwende $f'(\tau) = \tau^{-\frac{3}{2}}$, $f(\tau) = -2\,\tau^{-\frac{1}{2}}$ sowie $g(\tau) = \mathrm{e}^{-\tau}$, $g'(\tau) = -\,\mathrm{e}^{-\tau}$)

$$\begin{aligned}
E\big(U(x,t)\,U(0,t)\big) &= \tfrac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{2t} \sigma^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4\sigma}x^2}\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \tfrac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{8t}x^2}^{\infty} \tfrac{1}{\tau}\left(\tfrac{1}{4\tau}\,x^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \tfrac{1}{8\sqrt{\pi}}\,|x| \int_{\frac{1}{8t}x^2}^{\infty} \tau^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \tfrac{1}{4\sqrt{\pi}}\,|x|\,\tau^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\tau}\Big|_{\infty}^{\frac{1}{8t}x^2} - \tfrac{1}{4\sqrt{\pi}}\,|x| \int_{\frac{1}{8t}x^2}^{\infty} \tau^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\sqrt{t}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{8t}x^2} - \tfrac{1}{4\sqrt{\pi}}\,|x| \int_{\frac{1}{8t}x^2}^{\infty} \tau^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad x\in\mathbb{R}^d\,, \quad t\in(0,\infty)\,;
\end{aligned}$$

wegen (Substitution $\tau = \sigma^2$ und folglich $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma} = 2\,\sigma$)

$$\int_0^{\infty} \tau^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau = 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma = \sqrt{\pi}\,,$$

$$\int_0^{\frac{1}{8t}x^2} \tau^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{\frac{1}{8t}x^2} \tau^{-\frac{1}{2}}\Big(1+\mathscr{O}(\tau)\Big)\,\mathrm{d}\tau = \mathscr{O}\big(\tfrac{1}{\sqrt{t}}\,|x|\big)\,,$$

erhält man somit die Entwicklung

$$\begin{aligned}
E\big(U(x,t)\,U(0,t)\big) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\sqrt{t}\,\Big(1+\mathscr{O}\big(\tfrac{1}{t}\,x^2\big)\Big) - \tfrac{1}{4\sqrt{\pi}}\,|x| \int_0^{\infty} \tau^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&\quad + \tfrac{1}{4\sqrt{\pi}}\,|x| \int_0^{\frac{1}{8t}x^2} \tau^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\sqrt{t} - \tfrac{1}{4}\,|x| + \mathscr{O}\big(\tfrac{1}{\sqrt{t}}\,x^2\big)\,, \qquad x\in\mathbb{R}^d\,, \quad t\in(0,\infty)\,.
\end{aligned}$$

(ix) *Räumliche und zeitliche Regularität.* Die angegebenen Überlegungen zeigen folgende Regularitätseigenschaften der Lösung der eindimensionalen stochastischen Diffusionsgleichung; bezüglich des Ortes ist die Lösung Hölder-stetig für alle Exponenten echt kleiner als $\frac{1}{2}$ und bezüglich der Zeit Hölder-stetig mit Exponent echt kleiner als $\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
d=1: \qquad &\big|U(x_1,t)-U(x_2,t)\big| \leq C\,\big|x_1-x_2\big|^{\alpha}\,, \qquad x_1,x_2\in\mathbb{R}\,, \quad t\in(0,\infty)\,, \qquad 0\leq\alpha<\tfrac{1}{2}\,, \\
&\big|U(x,t_1)-U(x,t_2)\big| \leq C\,\big|t_1-t_2\big|^{\alpha}\,, \qquad x\in\mathbb{R}\,, \quad t_1,t_2\in(0,\infty)\,, \qquad 0\leq\alpha<\tfrac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

Die geringe zeitliche Regularität wird dadurch erklärt, daß das betrachtete räumlich und zeitlich weiße Rauschen sowohl räumlich als auch zeitlich singulär ist; der regularisierende Effekt des Evolutionsoperators wird auch benötigt, um nachweisen zu können, daß die Lösung bezüglich des Ortes stetig ist.

(x) *Vergleiche.* Im Gegensatz zur homogenen linearen Diffusionsgleichung, deren Lösung bezüglich des Ortes beliebig oft differenzierbar ist, kann man bei der stochastischen Diffusionsgleichung mit räumlich und zeitlich weißem Rauschen bezüglich des Ortes nur Hölder-stetige Lösungen mit Exponent $\alpha < \frac{1}{2}$ erwarten. Während die L^2-Norm der Lösung der deterministischen Diffusionsgleichung für $t \to \infty$ gegen Null geht, bewirkt der zusätzliche stochastische Term das asymptotische Verhalten

$$E\Big(\big(U(x,t)\big)^2\Big) \approx \sqrt{t} \quad \xrightarrow{t\to\infty} \quad \infty .$$

Die bei der stochastischen Diffusionsgleichung mit räumlich und zeitlich weißem Rauschen beobachteten Regularitätseigenschaften der Lösung unterscheiden sich auch wesentlich von jenen einer stochastischen gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y'(t) = A\,y(t) + Z(t)\,, \qquad t \in (0,\infty)\,;$$

gibt man beispielsweise weißes Rauschen, charakterisiert durch die Kovarianzfunktion

$$E\big(Z(t_1)\,Z(t_2)\big) = \delta(t_1 - t_2)\,, \qquad t_1, t_2 \in (0,\infty)\,,$$

vor, so ist die zugehörige Lösung Hölder-stetig für alle Exponenten echt kleiner als $\frac{1}{2}$

$$\big|y(t_1) - y(t_2)\big| \leq C\,\big|t_1 - t_2\big|^{\alpha}\,, \qquad t_1, t_2 \in (0,\infty)\,, \qquad 0 \leq \alpha < \tfrac{1}{2}\,,$$

im Gegensatz zur zuvor erhaltenen Relation

$$d = 1: \qquad \big|U(x,t_1) - U(x,t_2)\big| \leq C\,\big|t_1 - t_2\big|^{\alpha}\,, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t_1, t_2 \in (0,\infty)\,, \qquad 0 \leq \alpha < \tfrac{1}{4}\,.$$

Einfaches Modell für Polymere.

(i) *Monomere und Polymere.* Chemische Verbindungen von Molekülen zu Makro-Molekülen, welche aus gleichartigen Einheiten, den Monomeren, aufgebaut sind und oft die Form einer Kette haben, bezeichnet man als Polymere. Ein einfaches Beispiel für ein Homopolymer ist Polypropylen, bei dem sich das Monomer

$$\begin{array}{l} CH_3 \\ \;\; | \\ CH - CH_2 \end{array}$$

wiederholt; aus verschiedenen Arten von Monomeren aufgebaute Makro-Moleküle wie Polyester zählt man zu den Copolymeren.

(ii) *Gedämpfter harmonischer Oszillator.* Das Modell eines gedämpften harmonischen Oszillators beschreibt die Bewegung eines (punktförmigen) Körpers der Masse $m > 0$ unter dem Einfluß von Federkraft und Reibungskraft; das Koordinatensystem wird so gewählt, daß die Bewegung entlang der x-Achse verläuft und die Ruhelage im Ursprung ist. Entsprechend dem Hook'schen Gesetz wird angenommen, daß die Federkraft durch $F = -\,k\,q(t)$ gegeben ist; dabei gibt die Funktion $q : [0,T] \to \mathbb{R} : t \mapsto q(t)$ die Auslenkung aus der Ruhelage in Abhängigkeit von der Zeit an, und $k > 0$ bezeichnet die Federkonstante. Für die Reibungskraft setzt man die Abhängigkeit $F = -\,r\,q'(t)$ mit Dämpfungskonstante $r > 0$ voraus. Die Newton'schen Bewegungsgleichungen entsprechen der skalaren gewöhnlichen Differentialgleichung

$$m\,q''(t) = -\,k\,q(t) - r\,q'(t)\,, \qquad t \in (0,T)\,.$$

Die Lösungen der zugehörigen charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + \tfrac{r}{m}\,\lambda + \tfrac{k}{m} = 0\,,$$
$$\lambda = -\tfrac{r}{2m} \pm \sqrt{\tfrac{r^2}{4m^2} - \tfrac{k}{m}} = \tfrac{\pm\sqrt{r^2-4km}-r}{2m}\,,$$

bestimmen das Lösungsverhalten der Differentialgleichung. Parameterwerte $r^2 < 4km$ führen auf einen gedämpften Schwingungsvorgang. Im Fall

$$r^2 > 4km$$

dominiert die Reibungskraft (*überdämpfter Fall*), d.h. es kommt zu keinen Oszillationen und die Lösung nimmt exponentiell ab; im Wesentlichen entspricht dies dem Lösungsverhalten der Differentialgleichung

$$q'(t) = -\,c\,q(t)\,, \qquad t \in (0,T)\,.$$

(iii) *System gewöhnlicher Differentialgleichungen.* Um für die Bewegung einer Kette von D Teilchen (Monomeren), welche sich in einer Flüssigkeit (Wasser) befinden, ein einfaches Modell in Form eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zu erhalten, wird angenommen, daß die Teilchen punktförmige Körper sind und (näherungsweise) entlang einer Linie angeordnet sind. Jedes Teilchen soll nur auf die benachtbarten Teilchen wirken; die Kräfte sollen als Federkräfte betrachtet werden können, d.h. man hat die Vorstellung, daß die Teilchen durch Federn verbundenen sind. Weitere Effekte wie etwa jene Kräfte, die ein Teilchen auf sich selbst auswirkt, werden nicht miteinbezogen. Zusätzlich nimmt man an, daß der Fall dominierender Reibung vorliegt; somit können die Newton'schen Bewegungsgleichungen durch ein System gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form (mit $t \in (0,T)$)

$$\begin{cases} q_1'(t) = -c_1\big(q_1(t)-q_2(t)\big)\,, \\ q_k'(t) = -c_1\big(q_k(t)-q_{k-1}(t)\big) - c_1\big(q_k(t)-q_{k+1}(t)\big) \\ \qquad\;\; = -c_1\big(2\,q_k(t)-q_{k-1}(t)-q_{k+1}(t)\big)\,, \qquad k \in \{2,\dots,D-1\}\,, \\ q_D'(t) = -c_1\big(q_D(t)-q_{D-1}(t)\big)\,, \end{cases}$$

ersetzt werden, vgl. Überlegungen zum gedämpften harmonischen Oszillator; dabei gibt $q_k : [0,T] \to \mathbb{R}$ die Position des k-ten Teilchens an.[5]

(iv) *Partielle Differentialgleichung.* Im Grenzfall $D \to \infty$ führt das Differentialgleichungssystem auf die eindimensionale Diffusionsgleichung unter homogenen Neumann-Randbedingungen

$$\begin{cases} \partial_t U(x,t) = \alpha\,\partial_{xx} U(x,t)\,, \qquad (x,t) \in (a,b)\times(0,T)\,, \\ \partial_x U(a,t) = 0 = \partial_x U(b,t)\,, \qquad t \in [0,T]\,, \\ U(x,0) = U_0(x)\,, \qquad x \in [a,b]\,; \end{cases}$$

dabei wird vorausgesetzt, daß die Skalierung $\frac{c_1}{D^2} \to \alpha > 0$ gültig ist.[6]

---

[5] *Bemerkung.* Die Teilchen seien entlang einer Linie mit Positionen

$$q_1(t) \leq \cdots \leq q_k(t) \leq \cdots \leq q_D(t)\,, \qquad t \in [0,T]\,,$$

angeordnet; die Ruhelage entspreche den Werten $q_k^* = ka + b$, d.h. für $q_{k+1}(t) - q_k(t) = a = q_k(t) - q_{k-1}(t)$ werde keine Federkraft auf das k-te Teilchen ausgeübt. Bei dominierender Reibung lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} q_k'(t) &= -c_1\big(q_k(t)-q_{k-1}(t)-a\big) - c_1\big(q_k(t)-q_{k+1}(t)+a\big) \\ &= -c_1\big(q_k(t)-q_{k-1}(t)\big) - c_1\big(q_k(t)-q_{k+1}(t)\big)\,, \qquad t \in (0,T)\,, \quad k \in \{2,\dots,D-1\}\,. \end{aligned}$$

Mittels der Transformation $\widetilde{q}_k = q_k - ka - b$ ergibt sich $\widetilde{q}_k^* = 0$ als Ruhelage; die Form der Bewegungsgleichungen bleibt erhalten

$$\widetilde{q}_k'(t) = -c_1\big(\widetilde{q}_k(t)-\widetilde{q}_{k-1}(t)\big) - c_1\big(\widetilde{q}_k(t)-\widetilde{q}_{k+1}(t)\big)\,, \qquad t \in (0,T)\,, \quad k \in \{2,\dots,D-1\}\,.$$

[6] *Erklärung.* Bei Betrachtung des Differentialgleichungssystemes (für $t \in (0,\infty)$)

$$\begin{cases} q_1'(t) = -c_1\big(q_1(t)-q_2(t)\big)\,, \\ q_k'(t) = -c_1\big(2\,q_k(t)-q_{k-1}(t)-q_{k+1}(t)\big)\,, \qquad k \in \{2,\dots,D-1\}\,, \\ q_D'(t) = -c_1\big(q_D(t)-q_{D-1}(t)\big)\,, \end{cases}$$

(v) *System stochastischer gewöhnlicher Differentialgleichungen.* Eine Erweiterung des einfachen Modelles durch Miteinbeziehen zusätzlich wirkender deterministischer Kräfte und stochastischer Störungen zur Beschreibung des Einflusses der umgebenden Flüssigkeit, meist veranschaulicht durch Stöße der Teilchen mit Wassermolekülen, führt auf ein System stochastischer gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form (mit $t \in (0,T)$)

$$\begin{cases} \mathrm{d}q_1(t) = \Big(c_1\left(q_2(t)-q_1(t)\right)+F\big(q_1(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t + c_2\,\mathrm{d}z_1(t)\,, \\ \mathrm{d}q_k(t) = \Big(c_1\left(q_{k+1}(t)-2\,q_k(t)+q_{k-1}(t)\right)+F\big(q_k(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t \\ \qquad\qquad + c_2\,\mathrm{d}z_k(t)\,, \qquad k \in \{2,\dots,D-1\}\,, \\ \mathrm{d}q_D(t) = \Big(c_1\left(q_{D-1}(t)-q_D(t)\right)+F\big(q_D(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t + c_2\,\mathrm{d}z_D(t)\,. \end{cases}$$

(vi) *Stochastische partielle Differentialgleichung.* Bei einer großen Teilchenzahl $D \gg 1$ und geeigneten Skalierungsannahmen ergibt sich im Grenzfall eine stochastische partielle Differentialgleichung unter homogenen Neumann-Randbedingungen (mit $\alpha > 0$)

$$\begin{cases} \mathrm{d}U(x,t) = \Big(\alpha\,\partial_{xx}U(x,t)+F\big(U(x,t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}Z(x,t)\,, \qquad (x,t) \in (a,b)\times(0,T)\,, \\ \partial_x U(a,t) = 0 = \partial_x U(b,t)\,, \qquad t \in [0,T]\,, \\ U(x,0) = U_0(x)\,, \qquad x \in [a,b]\,, \end{cases}$$

wobei der stochastische Störungsterm durch die Vorgabe der Kovarianzfunktion charakterisiert ist; beispielsweise wählt man (vgl. stochastische Diffusionsgleichung, $\widetilde{Z}$ entspricht der zeitlichen Ableitung von Z)

$$E\big(\widetilde{Z}(x_1,t_1)\,\widetilde{Z}(x_2,t_2)\big) = \delta(x_1-x_2)\,\delta(t_1-t_2)\,, \qquad x_1,x_2 \in (a,b)\,, \quad t_1,t_2 \in (0,T)\,.$$

---

folgt beispielsweise durch den suggestiven Ansatz $Q(x,t) = Q(\frac{k}{D},t) = q_k(t)$ und mittels der Entwicklungen

$$Q\big(x+\tfrac{1}{D},t\big) - Q(x,t) = \tfrac{1}{D}\,\partial_x Q(x,t) + \mathscr{O}\big(\tfrac{1}{D^2}\big)\,,$$

$$x = \tfrac{1}{D}: \quad \partial_t Q(x,t) = \tfrac{c_1}{D}\,\partial_x Q(x,t) + \mathscr{O}\big(\tfrac{1}{D^2}\big)\,, \qquad x = 1: \quad \partial_t Q(x,t) = -\tfrac{c_1}{D}\,\partial_x Q(x,t) + \mathscr{O}\big(\tfrac{1}{D^2}\big)\,,$$

$$Q\big(x+\tfrac{1}{D},t\big) + Q\big(x-\tfrac{1}{D},t\big) - 2\,Q(x,t) = \tfrac{1}{D^2}\,\partial_{xx} Q(x,t) + \mathscr{O}\big(\tfrac{1}{D^4}\big)\,,$$

$$x = \tfrac{k}{D}: \quad \partial_t Q(x,t) = c_1\Big(Q\big(x+\tfrac{1}{D},t\big) + Q\big(x-\tfrac{1}{D},t\big) - 2\,Q(x,t)\Big) = \tfrac{c_1}{D^2}\,\partial_{xx} Q\big(\tfrac{k}{D},t\big) + \mathscr{O}\big(\tfrac{1}{D^4}\big)\,, \qquad k \in \{2,\dots,D-1\}\,,$$

im Grenzfall $D \to \infty$ die partielle Differentialgleichung (unter der Annahme $\frac{c_1}{D^2} \to \alpha > 0$, Verwendung derselben Bezeichnung für Grenzwert)

$$\partial_t Q(x,t) = \alpha\,\partial_{xx} Q\big(x,t\big)\,, \qquad x \in (0,1)\,, \quad t \in (0,\infty)\,,$$

unter homogenen Neumann-Randbedingungen (in den Randpunkten folgt aus $\frac{c_1}{D}\,\partial_x Q(x,t) \sim \alpha\,D\,\partial_x Q(x,t)$ die Bedingung $\partial_x Q(x,t) \sim \frac{1}{D} \to 0$)

$$\partial_x Q(0,t) = 0 = \partial_x Q(1,t)\,, \qquad t \in (0,\infty)\,.$$

Stochastische Navier–Stokes-Gleichungen.

(i) *Navier–Stokes-Gleichungen.* Die inkompressiblen Navier–Stokes-Gleichungen sind ein bekanntes nichtlineares Modell für die Strömung von Flüssigkeiten wie Wasser

$$\begin{cases} \partial_t u_x(x,y,z,t) = \alpha\,\Delta u_x(x,y,z,t) \\ \qquad\qquad - \big(u_x(x,y,z,t)\,\partial_x + u_y(x,y,z,t)\,\partial_y + u_z(x,y,z,t)\,\partial_z\big)\,u_x(x,y,z,t) \\ \qquad\qquad - \partial_x p(x,y,z,t) + f_x\big(t, u(x,y,z,t), \nabla u(x,y,z,t)\big)\,, \\ \partial_t u_y(x,y,z,t) = \alpha\,\Delta u_y(x,y,z,t) \\ \qquad\qquad - \big(u_x(x,y,z,t)\,\partial_x + u_y(x,y,z,t)\,\partial_y + u_z(x,y,z,t)\,\partial_z\big)\,u_y(x,y,z,t) \\ \qquad\qquad - \partial_y p(x,y,z,t) + f_y\big(t, u(x,y,z,t), \nabla u(x,y,z,t)\big)\,, \\ \partial_t u_z(x,y,z,t) = \alpha\,\Delta u_z(x,y,z,t) \\ \qquad\qquad - \big(u_x(x,y,z,t)\,\partial_x + u_y(x,y,z,t)\,\partial_y + u_z(x,y,z,t)\,\partial_z\big)\,u_z(x,y,z,t) \\ \qquad\qquad - \partial_z p(x,y,z,t) + f_z\big(t, u(x,y,z,t), \nabla u(x,y,z,t)\big)\,, \\ \partial_x u_x(x,y,z,t) + \partial_y u_y(x,y,z,t) + \partial_z u_z(x,y,z,t) = 0\,. \end{cases}$$

Die Funktion $u = (u_x, u_y, u_z)^T : \Omega \times [0,T] \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ beschreibt die Geschwindigkeit der Flüssigkeit, und $\alpha > 0$ gibt die Viskosität der Flüssigkeit, d.h. ihre Zähflüssigkeit, an; der Druck $p : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ ist durch die Bedingung der Inkompressibilität $\operatorname{div} u = 0$ implizit bestimmt. Die Funktion f beschreibt auf die Flüssigkeit wirkende Kräfte. Zusätzlich sind Randbedingungen und eine Anfangsbedingung vorgegeben.

(ii) *Kompakte Formulierung.* In kompakter Formulierung lauten die Navier–Stokes-Gleichungen (mit $(x,y,z,t) \in \Omega \times (0,T)$)

$$\begin{cases} \partial_t u(x,y,z,t) = \alpha\,\Delta u(x,y,z,t) - \big(u(x,y,z,t)\cdot\nabla\big)\,u(x,y,z,t) - \nabla p(x,y,zt) \\ \qquad\qquad + f\big(t, u(x,y,z,t), \nabla u(x,y,z,t)\big)\,, \\ \operatorname{div} u(x,y,z,t) = 0\,. \end{cases}$$

(iii) *Theoretische Resultate.* Für die inkompressiblen Navier–Stokes-Gleichungen sind Existenzresultate für Lösungen in einem abgeschwächten Sinn bekannt; eine offene Frage ist nach wie vor die Eindeutigkeit (für $d \geq 3$ Raumdimensionen).

(iv) *Zusatzüberlegung.* Da aus der Bedingung $\partial_x u_x(x,t) = 0$ bereits $u_x(x,t) = c$ folgt, hat das reduzierte eindimensionale Modell keine Bedeutung. Für die folgenden Überlegungen ist es hilfreich, den Spezialfall von zwei Raumdimensionen zu betrachten. Zur Vereinfachung werden periodische Randbedingungen auf einem beschränkten Raumbereich, dem kartesischen Produkt von Intervallen $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y \subset \mathbb{R}^2$, angenommen; weiters sei $f = 0$. Mittels Differentiation erhält man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\big\|u_x(\cdot,\cdot,t)\big\|_{L^2}^2 + \big\|u_y(\cdot,\cdot,t)\big\|_{L^2}^2\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \Big(\big(u_x(x,y,t)\big)^2 + \big(u_y(x,y,t)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}(x,y) = 2\,J\,,$$
$$J = \int_\Omega \big(u_x(x,y,t)\,\partial_t u_x(x,y,t) + u_y(x,y,t)\,\partial_t u_y(x,y,t)\big)\,\mathrm{d}(x,y)\,.$$

Einsetzen der Navier–Stokes-Gleichungen führt auf (zur Vereinfachung der Notation werden die Argumente weggelassen)

$$\partial_t u_x = \alpha\,\Delta u_x - \big(u_x\,\partial_x u_x + u_y\,\partial_y u_x\big) - \partial_x p\,, \qquad \partial_t u_y = \alpha\,\Delta u_y - \big(u_x\,\partial_x u_y + u_y\,\partial_y u_y\big) - \partial_y p\,,$$

$$J = \int_\Omega \big(u_x\,\partial_t u_x + u_y\,\partial_t u_y\big) = \alpha\,J_1 - J_2 - J_3\,,$$

$$J_1 = \int_\Omega \big(u_x\,\partial_{xx} u_x + u_x\,\partial_{yy} u_x + u_y\,\partial_{xx} u_y + u_y\,\partial_{yy} u_y\big)\,,$$

$$J_2 = \int_\Omega \big(u_x^2\,\partial_x u_x + u_x u_y\,\partial_y u_x + u_x u_y\,\partial_x u_y + u_y^2\,\partial_y u_y\big)\,,$$

$$J_3 = \int_\Omega \big(u_x\,\partial_x p + u_y\,\partial_y p\big)\,.$$

Mittels partieller Integration folgt (aufgrund der geforderten Periodizität der Lösungskomponenten u_x, u_y sowie der partiellen Ableitungen $\partial_x u_x, \partial_y u_x, \partial_x u_y, \partial_y u_y$ und des Druckes p fallen sämtliche Randterme weg, beachte auch $\operatorname{div} u = \partial_x u_x + \partial_y u_y = 0$)

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_\Omega \big(u_x\,\partial_{xx} u_x + u_y\,\partial_{xx} u_y + u_x\,\partial_{yy} u_x + u_y\,\partial_{yy} u_y\big)\\
&= \int_{\Omega_y} \big(u_x\,\partial_x u_x + u_y\,\partial_x u_y\big)\Big|_{x\in\partial\Omega_x} + \int_{\Omega_x} \big(u_x\,\partial_y u_x + u_y\,\partial_y u_y\big)\Big|_{y\in\partial\Omega_y}\\
&\quad - \int_\Omega \Big(\big(\partial_x u_x\big)^2 + \big(\partial_x u_y\big)^2 + \big(\partial_y u_x\big)^2 + \big(\partial_y u_y\big)^2\Big)\\
&= -\int_\Omega \Big(\big(\partial_x u_x\big)^2 + \big(\partial_x u_y\big)^2 + \big(\partial_y u_x\big)^2 + \big(\partial_y u_y\big)^2\Big)\,,\\
J_3 &= \int_\Omega \big(u_x\,\partial_x p + u_y\,\partial_y p\big) = \int_{\Omega_y} u_x p\Big|_{\partial\Omega_x} + \int_{\Omega_x} u_y p\Big|_{\partial\Omega_y} - \int_\Omega p\,\big(\partial_x u_x + \partial_y u_y\big) = 0\,;
\end{aligned}$$

ähnliche Überlegungen zeigen (Randterme verschwinden)

$$\begin{aligned}
J_{21} &= \int_\Omega \big(u_x^2\,\partial_x u_x + u_y^2\,\partial_y u_y\big)\\
&= \int_\Omega \big(u_x\,(u_x\,\partial_x u_x) + u_y\,(u_y\,\partial_y u_y)\big)\\
&= \tfrac{1}{2}\int_\Omega \big(u_x\,\partial_x (u_x)^2 + u_y\,\partial_y (u_y)^2\big)\\
&= \tfrac{1}{2}\int_{\Omega_y} u_x^3\Big|_{\partial\Omega_x} + \tfrac{1}{2}\int_{\Omega_x} u_y^3\Big|_{\partial\Omega_y} - \tfrac{1}{2}\int_\Omega \Big(u_x^2\,\partial_x u_x + u_y^2\,\partial_y u_y\Big)\\
&= -\tfrac{1}{2}\,J_{21}\,,\\
\Longrightarrow \quad J_{21} &= 0\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
J_{22} &= \int_\Omega \big(u_x^2\,\partial_y u_y + u_y^2\,\partial_x u_x\big)\\
&= J_{21} + \int_\Omega \big(u_x^2\,\partial_y u_y + u_y^2\,\partial_x u_x\big)\\
&= \int_\Omega \big(u_x^2\,\partial_y u_y + u_x^2\,\partial_x u_x + u_y^2\,\partial_x u_x + u_y^2\,\partial_y u_y\big)\\
&= \int_\Omega \big(u_x^2\,(\partial_x u_x + \partial_y u_y) + u_y^2\,(\partial_x u_x + \partial_y u_y)\big)\,,\\
&= 0\,,\\
J_{23} &= \int_\Omega \big(u_x\,u_y\,\partial_y u_x + u_x\,u_y\,\partial_x u_y\big)\\
&= -\int_\Omega \big(\partial_y(u_x\,u_y)\,u_x + \partial_x(u_x\,u_y)\,u_y\big)\\
&= -\int_\Omega \Big(u_x u_y\,\big(\partial_y u_x + \partial_x u_y\big) + u_x^2\,\partial_y u_y + u_y^2\,\partial_x u_x\Big)\\
&= -J_{23} - J_{22}\\
&= -J_{23}\,,\\
\Longrightarrow \quad J_{23} &= 0\,,
\end{aligned}
$$

und folglich

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \int_\Omega \big(u_x^2\,\partial_x u_x + u_x u_y\,\partial_y u_x + u_x u_y\,\partial_x u_y + u_y^2\,\partial_y u_y\big)\\
&= J_{21} + J_{23}\\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der Ungleichung von Poincaré[7] unter den vereinfachenden Zusatzannahmen

$$
\int_\Omega u_x = 0\,, \qquad \int_\Omega u_y = 0\,,
$$

führt dies insgesamt auf (mit positiver Konstante $C > 0$, Anwendung des Lemmas von Gronwall)

$$
\begin{gathered}
V(t) = \big\|u_x(\cdot,\cdot,t)\big\|_{L^2}^2 + \big\|u_y(\cdot,\cdot,t)\big\|_{L^2}^2\,,\\
W(t) = \big\|\partial_x u_x(\cdot,\cdot,t)\big\|_{L^2}^2 + \big\|\partial_y u_x(\cdot,\cdot,t)\big\|_{L^2}^2 + \big\|\partial_x u_y(\cdot,\cdot,t)\big\|_{L^2}^2 + \big\|\partial_y u_y(\cdot,\cdot,t)\big\|_{L^2}^2\,,\\
V'(t) = 2\,J = 2\,\alpha\,J_1 - 2\,J_2 - 2\,J_3 = -C\,W(t) \le -C\,V(t)\,, \qquad t \in (0,T)\,,\\
V'(t) \le -C\,V(t)\,, \quad V(t) \le \mathrm{e}^{-Ct}\,V(0)\,, \qquad t \in [0,T]\,,
\end{gathered}
$$

was das exponentielle Abklingen der L^2-Norm zeigt.

[7] *Ungleichung von Poincaré.* Die Ungleichung von Poincaré besagt, daß die Abschätzung

$$
\big\|u - \overline{u}\big\|_{L^p(\Omega)} \le C\,\big\|\nabla u\big\|_{L^p(\Omega)}\,, \qquad |\Omega| = \int_\Omega 1\,\mathrm{d}\xi\,, \quad \overline{u} = \tfrac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,, \qquad u \in W^{1,p}(\Omega)\,,
$$

für beliebige Exponenten $p \in [1,\infty]$ gültig ist; dabei wird beispielsweise angenommen, daß das betrachtete Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und hinreichend regulär ist.

(v) *Bemerkung.* Das beobachtete Lösungsverhalten des deterministischen Modelles ist beispielsweise im Zusammenhang mit der Modellierung von turbulenten Strömungen nicht zutreffend; die Hinzunahme eines geeignet gewählten stochastischen Termes bietet die Möglichkeit eines Modelles zur Beschreibung solcher relevanter Situationen.

(vi) *Stochastische Navier–Stokes-Gleichungen.* Die stochastischen Navier–Stokes-Gleichungen sind ein bekanntes Modell für inkompressible Flüssigkeiten (kompakte Formulierung als Evolutionsgleichung)

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t) = \big(\alpha\,\Delta u(t) - (u(t)\cdot\nabla)\,u(t) - \nabla p(t)\big)\,\mathrm{d}t + f\big(t, u(t), \nabla u(t)\big)\,\mathrm{d}Z(t)\,, \qquad t \in (0,T)\,, \\ \operatorname{div} u(t) = 0\,; \end{cases}$$

zusätzliche Einflußgrößen werden mittels eines stochastischen Termes beschrieben. Beispielsweise im Spezialfall $f(t, v, w) = 1$ und (wie zuvor entspricht $\widetilde{Z}$ der zeitlichen Ableitung von Z)

$$E\big(\widetilde{Z}(x_1, t_1)\,\widetilde{Z}(x_2, t_2)\big) = \delta(t_1 - t_2)\,G(x_1 - x_2)\,, \qquad x_1, x_2 \in \Omega\,, \quad t_1, t_2 \in (0,T)\,,$$

mit hinreichend regulärer Funktion G kann man die Existenz einer im folgenden Sinn beschränkten Lösung zeigen (bei geeigneter Wahl des zugrundeligenden Funktionenraumes)

$$\limsup_{t\to\infty} E\Big(\big\|u(t)\big\|_X^2\Big) \leq C\,.$$

Teil I

Vorbereitungen

Kapitel 1

Grundlagen der Stochastik

Vorbemerkung. Als Vorbereitung für spätere Überlegungen wird im Folgenden an grundlegende Begriffe und Resultate der Stochastik, insbesondere zu reellen Gauß-Maßen, reellwertigen Zufallsvariablen und eindimensionalen Wiener-Prozessen, erinnert.

Überblick. Um eine Verbindung mit DENK (2014) herzustellen, sind die entsprechenden Verweise angegeben.

- Elementare Ungleichung (Beweis von Lemma 2.8)
- Konvexe Funktion
  Ungleichung von Jensen
  Ungleichung von Jensen für Erwartungswerte (Lemma A.4)
- Raum der Testfunktionen und Schwartz-Raum
  Raum der temperierten Distributionen
  Raum der regulären temperierten Distributionen
  Duale Paarung
  Fourier-Transformation auf Schwartz-Raum
  Fourier-Transformation auf Raum der temperierten Distributionen
  Charakteristische Funktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes (vgl. Definition 2.4)
  Resultat zur charakteristischen Funktion (Lemma A.7)
- Resultat zur Gleichheit von Wahrscheinlichkeitsmaßen (Lemma A.7)
- Reelles Gauß-Maß, Normalverteilung (Definition A.5)
  Charakteristische Funktion eines reellen Gauß-Maßes (Lemma A.6)

- Konsistenzsatz von Kolmogorov (Lemma A.8)
- Existenz eines eindimensionalen Wiener-Prozesses (Korollar A.9)
  Erweiterung auf mehrdimensionalen Fall

1.1 Elementare Ungleichung

Elementare Ungleichung. Für beliebige positive reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und Exponenten $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt die Abschätzung

$$\big(a+b\big)^d \leq 2^{d-1}\big(a^d + b^d\big).$$

Erklärung. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $b \geq a$ angenommen werden und durch Skalierung $a = 1$ erreicht werden; somit ist die Abschätzung (setze $b = a + x$)

$$\begin{gathered} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \big(2\,a + x\big)^d, \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 2^{d-1}\big(a^d + (a+x)^d\big), \\ \forall\, x \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \qquad f(x) \leq g(x), \end{gathered}$$

zu zeigen. Eine mögliche Begründung dieser Relation nützt die folgenden Darstellungen von Polynomfunktionen vom Grad d (Taylorreihenentwicklung bzw. Anwendung der Binomischen Formel, wobei $x \in \mathbb{R}$)

$$f(x) = \sum_{j=0}^{d} \tfrac{1}{j!}\, f^{(j)}(0)\, x^j, \qquad g(x) = \sum_{j=0}^{d} \tfrac{1}{j!}\, g^{(j)}(0)\, x^j.$$

Offensichtlich gilt die Implikation (gliedweises Vergleichen der Entwicklungen)

$$\Big(\forall\, j \in \{0, 1, \dots, d\} : \quad f^{(j)}(0) \leq g^{(j)}(0)\Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(\forall\, x \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \quad f(x) \leq g(x)\Big).$$

Die Bestimmung der Ableitungen (wobei $j \in \{1, \dots, d\}$ und $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$)

$$\begin{gathered} f(x) = \big(2\,a + x\big)^d, \qquad g(x) = 2^{d-1}\big(a^d + (a+x)^d\big), \\ f'(x) = d\,\big(2\,a + x\big)^{d-1}, \qquad g'(x) = d\,2^{d-1}\big(a + x\big)^{d-1} = d\,\big(2\,a + 2\,x\big)^{d-1}, \\ f''(x) = (d-1)\,d\,\big(2\,a + x\big)^{d-2}, \qquad g''(x) = 2\,(d-1)\,d\,\big(2\,a + 2\,x\big)^{d-2}, \\ f^{(j)}(x) = (d-j+1)\cdots d\,\big(2\,a + x\big)^{d-j}, \qquad g^{(j)}(x) = 2^{j-1}\,(d-j+1)\cdots d\,\big(2\,a + 2\,x\big)^{d-j}, \end{gathered}$$

und Auswerten im Ursprung zeigt (wobei $j \in \{2, \dots, d\}$)

$$\begin{gathered} f(0) = (2a)^d = g(0), \\ f'(0) = d\,(2a)^{d-1} = g'(0), \\ f''(0) = (d-1)\,d\,(2a)^{d-2} \leq g''(0) = 2\,f''(0), \\ f^{(j)}(0) = (d-j+1)\cdots d\,(2\,a)^{d-j} \leq g^{(j)}(0) = 2^{j-1}\,f^{(j)}(0), \end{gathered}$$

was auf die Behauptung führt. ◇

1.2 Ungleichung von Jensen

Vorbemerkung. Die Ungleichung von Jensen für konvexe Funktionen wird als Hilfsmittel zur Abschätzung des Erwartungswertes einer reellwertigen Zufallsvariablen benötigt.

Konvexität und Ungleichung von Jensen.

(i) *Konvexität.* Eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für beliebige Argumente $x, y \in \mathbb{R}$ und für jedes Element $\sigma \in [0,1]$ die Relation

$$f\big(\sigma x + (1-\sigma)\,y\big) \leq \sigma\, f(x) + (1-\sigma)\, f(y)$$

gültig ist; skizziert man den Graphen einer konvexen Funktion, bedeutet dies, daß der durch $\sigma x + (1-\sigma)\,y$ und den zugehörigen Funktionswert gegebene Punkt unterhalb der Verbindungslinie durch die Punkte $(x, f(x)), (y, f(y))$ liegt.

(ii) *Ungleichung von Jensen.* Aus der Eigenschaft der Konvexität folgt induktiv die Ungleichung von Jensen

$$f\left(\sum_{k=1}^{K} \sigma_k\, x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{K} \sigma_k\, f(x_k)\,, \qquad x_k \in \mathbb{R}\,, \quad \sigma_k \in [0,1]\,, \quad k \in \{1,\dots,K\}\,, \quad \sum_{k=1}^{K} \sigma_k = 1\,.$$

Erklärung. Die wiederholte Anwendung der angegebenen Relation (Ausnahme der trivialen Fälle $\sigma_k = 1$ für $k \in \{1,\dots,K\}$, beachte $\frac{\sigma_2}{1-\sigma_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2+\cdots+\sigma_K} \in [0,1]$)

$$\sum_{k=1}^{K} \sigma_k\, x_k = \sigma_1 x_1 + (1-\sigma_1)\, y_1\,, \qquad y_1 = \sum_{k=2}^{K} \tfrac{\sigma_k}{1-\sigma_1}\, x_k\,,$$

$$f\left(\sum_{k=1}^{K} \sigma_k\, x_k\right) \leq \sigma_1\, f(x_1) + (1-\sigma_1)\, f(y_1)\,,$$

$$y_1 = \tfrac{\sigma_2}{1-\sigma_1}\, x_2 + \tfrac{1-\sigma_1-\sigma_2}{1-\sigma_1}\, y_2\,, \qquad y_2 = \sum_{k=3}^{K} \tfrac{\sigma_k}{1-\sigma_1-\sigma_2}\, x_k\,,$$

$$f(y_1) \leq \tfrac{\sigma_2}{1-\sigma_1}\, f(x_2) + \tfrac{1-\sigma_1-\sigma_2}{1-\sigma_1}\, f(y_2)\,, \qquad (1-\sigma_1)\, f(y_1) \leq \sigma_2\, f(x_2) + (1-\sigma_1-\sigma_2)\, f(y_2)\,,$$

$$f\left(\sum_{k=1}^{K} \sigma_k\, x_k\right) \leq \sigma_1\, f(x_1) + \sigma_2\, f(x_2) + (1-\sigma_1-\sigma_2)\, f(y_2)\,, \qquad \text{etc.}$$

$$1 - \sum_{k=1}^{K-1} \sigma_k = \sigma_K\,, \qquad f\left(\sum_{k=1}^{K} \sigma_k\, x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{K-1} \sigma_k\, f(x_k) + \sigma_K\, f(x_K) = \sum_{k=1}^{K} \sigma_k\, f(x_k)\,,$$

führt auf das gewünschte Resultat. ◇

(iii) *Alternative Charakterisierung von Konvexität.* Unter der zusätzlichen Regularitätsannahme $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ ergibt sich für $x, y \in \mathbb{R}$ und hinreichend kleines Inkrement $\sigma > 0$ die Relation (Taylorreihenentwicklung, entspricht Differentiation der Konvexitätsbedingung bezüglich $\sigma \in (0,1)$ und Auswerten bei $\sigma = 0$)

$$\begin{gathered}
f\big(\sigma x + (1-\sigma)\,y\big) \le \sigma\, f(x) + (1-\sigma)\, f(y)\,,\\
f\big(\sigma x + (1-\sigma)\,y\big) = f(y) + \sigma\, f'(y)\,(x-y) + \mathscr{O}\big(\sigma^2\big)\,,\\
f(y) + \sigma\, f'(y)\,(x-y) + \mathscr{O}\big(\sigma^2\big) \le \sigma\, f(x) + (1-\sigma)\, f(y)\,,\\
\sigma\, f'(y)\,(x-y) + \mathscr{O}\big(\sigma^2\big) \le \sigma\,\big(f(x) - f(y)\big)\,,\\
f'(y)\,(x-y) + \mathscr{O}(\sigma) \le f(x) - f(y)\,.
\end{gathered}$$

Somit erhält man als alternative Charakterisierung von Konvexität (für $x, y \in \mathbb{R}$)

$$f(y) + f'(y)\,(x-y) \le f(x)\,;$$

anschaulich bedeutet dies, daß für eine konvexe Funktion die Tangente in jedem (fixierten) Argument $y \in \mathbb{R}$ unterhalb des Funktionsgraphen liegt.[1]

(iv) *Beispiel.* Ein einfaches Beispiel für eine konvexe Funktion ist (Parabel, wobei $x, y \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in (0,1)$, Ausnahme der trivialen Fälle $\sigma \in \{0,1\}$)

$$\begin{gathered}
f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2\,,\\
f\big(\sigma x + (1-\sigma)\,y\big) \le \sigma\, f(x) + (1-\sigma)\, f(y)\,,\\
\big(\sigma x + (1-\sigma)\,y\big)^2 \le \sigma\, x^2 + (1-\sigma)\, y^2\,,\\
\sigma^2 x^2 + 2\,\sigma\,(1-\sigma)\,x y + (1-\sigma)^2 y^2 \le \sigma\, x^2 + (1-\sigma)\, y^2\,,\\
\sigma\,(1-\sigma)\,2\,x y \le \sigma\,(1-\sigma)\,x^2 + \sigma\,(1-\sigma)\,y^2\,,\\
2\,x y \le x^2 + y^2\,,\\
0 \le (x-y)^2\,.
\end{gathered}$$

Eine einfache Rechnung bestätigt ebenfalls (wobei $x, y \in \mathbb{R}$, verwende $f'(x) = 2x$, Fallunterscheidung)

$$\begin{gathered}
f(y) + f'(y)\,(x-y) \le f(x)\,,\\
y^2 + 2\,y\,(x-y) \le x^2\,,\\
2\,y\,(x-y) \le (x+y)\,(x-y)\,,\\
y \le x: \quad 2\,y \le x + y\,, \qquad x \le y: \quad x + y \le 2\,y\,.
\end{gathered}$$

[1] *Gegenbeispiel.* Man beachte, daß man im Allgemeinen nicht folgern kann, daß eine Ungleichung bei Differentiation erhalten bleibt. Differenzieren der Konvexitätsbedingung bezüglich $\sigma \in (0,1)$ würde auf die Relation (wobei $x, y \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in (0,1)$)

$$\text{Fälschliche Annahme:} \qquad f'\big(\sigma x + (1-\sigma)\,y\big)\,(x-y) \le f(x) - f(y)\,,$$

führen, die jedoch von der konvexen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ nicht für alle Elemente $\sigma \in (0,1)$ erfüllt wird (wobei $x, y \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in (0,1)$, verwende $f'(x) = 2x$, Fallunterscheidung)

$$\begin{aligned}
&2\,\big(\sigma x + (1-\sigma)\,y\big)\,(x-y) \le x^2 - y^2 = (x+y)\,(x-y)\,,\\
y \le x: \quad &2\,\sigma x + 2\,(1-\sigma)\,y \le x + y\,, \qquad (2\,\sigma - 1)(x-y) \le 0\,, \qquad 2\,\sigma \le 1\,,\\
x \le y: \quad &x + y \le 2\,\sigma x + 2\,(1-\sigma)\,y\,, \qquad (2\,\sigma - 1)(y-x) \le 0\,, \qquad 2\,\sigma \le 1\,.
\end{aligned}$$

Erinnerung. Es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ einen (vollständigen) Wahrscheinlichkeitsraum. Der Erwartungswert einer reellwertigen Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ ist durch

$$E(Z) = \int_\Omega Z(\omega)\, \mathrm{d}\mu(\omega)$$

gegeben; unter der Voraussetzung $Z \in L^1(\Omega)$ ist der Erwartungswert wohldefiniert. Offensichtlich erfüllt der Erwartungswert die Eigenschaften Linearität und Monotonie (für Zufallsvariablen $Z_1, Z_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$)

$$\int_\Omega \big(c_1 Z_1(\omega) + c_2 Z_2(\omega)\big)\, \mathrm{d}\mu(\omega) = c_1 \int_\Omega Z_1(\omega)\, \mathrm{d}\mu(\omega) + c_2 \int_\Omega Z_2(\omega)\, \mathrm{d}\mu(\omega)\,,$$
$$E\big(c_1 Z_1 + c_2 Z_2\big) = c_1 E(Z_1) + c_2 E(Z_2)\,,$$
$$\Big(\text{für fast alle } \omega \in \Omega:\ Z_1(\omega) \le Z_2(\omega)\Big) \quad \Longrightarrow \quad E(Z_1) = \int_\Omega Z_1(\omega)\, \mathrm{d}\mu(\omega) \le E(Z_2) = \int_\Omega Z_2(\omega)\, \mathrm{d}\mu(\omega)\,;$$

für eine konstante Zufallsvariable

$$\Big(\text{für fast alle } \omega \in \Omega:\ Z(\omega) = 1\Big) \quad \Longrightarrow \quad E(Z) = \int_\Omega 1\, \mathrm{d}\mu(\omega) = \mu(\Omega) = 1$$

stimmen Erwartungswert und Funktionswert überein

Vorbemerkung. Die Namensgebung des folgenden Resultates erklärt sich dadurch, daß man im Spezialfall einer diskreten Zufallsvariable $Z : \Omega = \{\omega_k : k \in K\} \to \mathbb{R}$ die Relation

$$f\Big(\sum_{k\in K} Z(\omega_k)\, \mu(\omega_k)\Big) \le \sum_{k\in K} f\big(Z(\omega_k)\big)\, \mu(\omega_k)\,, \qquad \sum_{k\in K} \mu(\omega_k) = \mu(\Omega) = 1\,,$$

erhält.

Resultat (Ungleichung von Jensen für Erwartungswerte). Für jede konvexe reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und jede reellwertige Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $Z \in L^1(\Omega)$ sowie $f(Z) \in L^1(\Omega)$ gilt die Abschätzung

$$f\big(E(Z)\big) \le E\big(f(Z)\big)\,,$$
$$f\Big(\int_\Omega Z(\omega)\, \mathrm{d}\mu(\omega)\Big) \le \int_\Omega f\big(Z(\omega)\big)\, \mathrm{d}\mu(\omega)\,.$$

Erklärung. Aufgrund der geforderten Regularitätseigenschaften sind alle auftretenden Größen wohldefiniert

$$E(Z) = \int_\Omega Z(\omega)\, \mathrm{d}\mu(\omega) < \infty\,, \qquad f\big(E(Z)\big) < \infty\,, \qquad E\big(f(Z)\big) = \int_\Omega f\big(Z(\omega)\big)\, \mathrm{d}\mu(\omega) < \infty\,.$$

Durch Einsetzen spezieller Werte in die Konvexitätsbedingung ergibt sich die Abschätzung (für jedes Element $\omega \in \Omega$, Kurzschreibweise)

$$f(y) + f'(y)\,(x - y) \le f(x)\,,$$
$$x = Z(\omega)\,, \quad y = E(Z): \qquad f\big(E(Z)\big) + f'\big(E(Z)\big)\big(Z(\omega) - E(Z)\big) \le f\big(Z(\omega)\big)\,,$$
$$f\big(E(Z)\big) + f'\big(E(Z)\big)\big(Z - E(Z)\big) \le f(Z)\,.$$

Die Bestimmung des Erwartungswertes führt auf (Monotonie, Linearität, konstante Zufallsvariable)

$$E\Big(f\big(E(Z)\big) + f'\big(E(Z)\big)\big(Z - E(Z)\big)\Big) \le E\big(f(Z)\big)\,,$$
$$f\big(E(Z)\big)\,E(I) + f'\big(E(Z)\big)\big(E(Z) - E(Z)\big) \le E\big(f(Z)\big)\,,$$
$$f\big(E(Z)\big) \le E\big(f(Z)\big)\,,$$

was die Ungleichung von Jensen für Erwartungswerte ist. ⋄

1.3 Charakteristische Funktion

Vorbemerkung. Im Folgenden wird ein auf der Borel-σ-Algebra des euklidischen Raumes definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,1]$ betrachtet und die zugehörige charakteristische Funktion mittels der inversen Fourier-Transformation eingeführt; deren Bedeutung erklärt sich dadurch, daß das Wahrscheinlichkeitsmaß durch die zugehörige charakteristische Funktion eindeutig bestimmt ist, vgl. Resultat zur Gleichheit von Wahrscheinlichkeitsmaßen.

Fourier-Transformation. In Hinblick auf die charakteristische Funktion eines Maßes wird an die Fourier-Transformation als Operation auf dem Raum der temperierten Distributionen erinnert; detailierte Informationen sind im Standardwerk WERNER (2011) oder in den Vorlesungsskripten MÜLLER (2012) und OEVEL (2003) angegeben.

(i) *Notationen.* Für einen Multi-Index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^d$ und $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ sei

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d\,, \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}\,, \qquad \partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}\,.$$

(ii) *Schwartz-Raum.* Der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller beliebig oft stetig differenzierbaren komplexwertigen Funktionen, deren partielle Ableitungen bei Multiplikation mit Monomen bezüglich der Supremumsnorm beschränkt sind, wird als Schwartz-Raum oder als Raum der rasch fallenden Funktionen bezeichnet

$$\mathscr{S}\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}\big) = \Big\{ f \in \mathscr{C}^\infty\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}\big) : \text{ für beliebige } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_{\geq 0}^d \text{ gilt } \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \big| x^\alpha\, \partial^\beta f(x) \big| < \infty \Big\}\,;$$

der Schwartz-Raum stellt eine Erweiterung des Raumes der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger dar (Raum der Testfunktionen)

$$\mathscr{D}\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}\big) = \mathscr{C}_0^\infty\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}\big) = \Big\{ f \in \mathscr{C}^\infty\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}\big) : \operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}} \text{ kompakt} \Big\}\,,$$
$$\mathscr{D}\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}\big) \subset \mathscr{S}\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}\big)\,.$$

Für jeden Exponenten $p \in [1, \infty]$ gilt $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \subset L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$; für $p \in [1, \infty)$ liegt $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Versehen mit der durch (für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ und $K \in \mathbb{N}_{\geq 0}$)

$$\|f\|_{\mathscr{S}, K} = \max_{|\alpha|, |\beta| \leq K} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \big| x^\alpha\, \partial^\beta f(x) \big|$$

definierten Familie von Semi-Normen $(\|\cdot\|_{\mathscr{S}, K})_{K \in \mathbb{N}_{\geq 0}}$ wird der Schwartz-Raum zu einem metrisierbaren lokalkonvexen Raum, vgl. MÜLLER (2012).

(iii) *Temperierte Distributionen.* Der topologische Dualraum des Schwartz-Raumes $\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ umfaßt alle bezüglich der Topologie von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ stetigen linearen

Funktionale und wird als Raum der temperierten Distributionen bezeichnet. Die Stetigkeit eines linearen Funktionals $F : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ist dabei wie folgt charakterisiert

$$\exists C > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N}_{\geq 0} \quad \forall f \in \mathscr{S}\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}\big): \quad \big|F(f)\big| \leq C \max_{|\alpha| \leq K} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \Big(1 + |x|^2\Big)^{\frac{K}{2}} \big|\partial^\alpha f(x)\big| \, ;$$

dies ist äquivalent dazu, daß für jede Nullfolge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ die zugehörige Folge $(F(f_k))_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge bildet

$$f_k \xrightarrow{k \to \infty} 0 \ \text{ in } \mathscr{S}\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}\big) \quad \Longrightarrow \quad F(f_k) \xrightarrow{k \to \infty} 0 \ \text{ in } \mathbb{C} \, .$$

(iv) *Reguläre temperierte Distributionen.* Für eine lokal integrierbare[2] komplexwertige Funktion $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ wird durch

$$T_f : \mathscr{C}_0^\infty\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}\big) \longrightarrow \mathbb{C} : g \longmapsto T_f(g) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, g(x) \, \mathrm{d}x$$

ein stetiges lineares Funktional auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren komplexwertigen Funktionen mit kompaktem Träger (Testfunktionen) definiert; ein solches Funktional wird als reguläre Distribution bezeichnet. Insbesondere führt eine integrierbare Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ oder $f \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ auf eine reguläre temperierte Distribution $T_f \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$

$$T_f : \mathscr{S}\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}\big) \longrightarrow \mathbb{C} : g \longmapsto T_f(g) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, g(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

(v) *Duale Paarung.* Es bezeichne $(X, \|\cdot\|_X)$ einen normierten Raum. Für die duale Paarung, d.h. die Anwendung eines Elementes des Dualraumes auf ein Element des zugrundeliegenden normierten Raumen ist die Schreibweise (für $x^* \in X^*$ und $x \in X$)

$$\big\langle x^* \big| x \big\rangle_{X^* \times X} = x^*(x)$$

üblich.[3] Im Folgenden wird diese Notation für die Anwendung eines Elementes des Raumes der temperierten Distributionen auf ein Element des Schwartz-Raumes verwendet (für $F \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ und $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$)

$$\big\langle F \big| f \big\rangle_{\mathscr{S}^* \times \mathscr{S}} = F(f) \, .$$

---

[2] *Bemerkung.* Eine meßbare komplexwertige Funktion, welche auf jeder kompakten Teilmenge integrierbar ist, heißt lokal integrierbar

$$L^1_{\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}\big) = \Big\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \text{ meßbar und für jede kompakte Menge } K \subset \mathbb{R}^d \text{ gilt} \int_K \big|f(x)\big| \, \mathrm{d}x < \infty \Big\} \, .$$

[3] *Bemerkung.* Im Spezialfall eines Hilbertraumes $(H, (\cdot|\cdot)_H)$ ermöglicht der Darstellungssatz von Fréchet–Riesz die Identifikation $H^* \cong H$; es ist jedoch zu beachten, daß die duale Paarung im Allgemeinen nicht mit dem Skalarprodukt übereinstimmt. Beispielsweise entspricht die duale Paarung auf dem Raum der quadratintegrablen Funktionen dem Integral (duale Paarung ist linear in beiden Argumenten, für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, beachte

(vi) *Fourier-Transformation.* Die Fourier-Transformation ist als Operation auf dem Schwartz-Raum wohldefiniert

$$\mathscr{F}: \mathscr{S}\big(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}\big) \longrightarrow \mathscr{S}\big(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}\big): f \longmapsto \mathscr{F}(f)\,,$$
$$\big(\mathscr{F}(f)\big)(\kappa) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi\,, \qquad \kappa \in \mathbb{R}^d\,,$$

und bildet einen Isomorphismus, d.h. eine stetige bijektive lineare Funktion; die inverse Fourier-Transformation ist durch

$$\mathscr{F}^{-1}: \mathscr{S}\big(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}\big) \longrightarrow \mathscr{S}\big(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}\big): g \longmapsto \mathscr{F}^{-1}(g)\,,$$
$$\big(\mathscr{F}^{-1}(g)\big)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} g(\kappa)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\cdot\xi}\,\mathrm{d}\kappa\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d\,,$$

gegeben.[4]

(vii) *Erweiterung der Fourier-Transformation.* In Hinblick auf die Identität[5] (Relation gilt für $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ und somit insbesondere für $f_1, f_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$, zur Vereinfachung der

---

$f\,g \in L^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$)

$$\langle f|g\rangle_{L^2\times L^2} = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\,g(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,;$$

nur im Spezialfall reellwertiger Funktionen stimmt die duale Paarung mit dem L^2-Skalarprodukt überein, denn im Allgemeinen gilt (Skalaprodukt ist linear im ersten Argument und sesqui-linear im zweiten Argument)

$$\big(f|g\big)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\,\overline{g(\xi)}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

[4] *Bemerkung.* Die Fourier-Transformation auf dem Raum der quadratintegrablen Funktionen

$$\mathscr{F}: L^2\big(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}\big) \longrightarrow L^2\big(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}\big): f \longmapsto \mathscr{F}(f)$$

kann als Fortsetzung der Operation $\mathscr{F}: \mathscr{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ eingeführt werden; alternativ kann sie als Operation $\mathscr{F}: L^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ betrachtet werden und dann auf $L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ fortgesetzt werden.

[5] *Bemerkung.* Aus der Definition der Fourier-Transformation und durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge ergibt sich für $f_1, f_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ die Relation

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{\frac{d}{2}} \big\langle \mathscr{F}(f_1)\big|f_2\big\rangle_{L^2} &= (2\pi)^{\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \big(\mathscr{F}(f_1)\big)(\kappa)\,f_2(\kappa)\,\mathrm{d}\kappa \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f_1(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa\cdot\xi}\,f_2(\kappa)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\kappa \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f_1(\xi) \int_{\mathbb{R}^d} f_2(\kappa)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa\cdot\xi}\,\mathrm{d}\kappa\,\mathrm{d}\xi \\
&= (2\pi)^{\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f_1(\xi)\,\big(\mathscr{F}(f_2)\big)(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= (2\pi)^{\frac{d}{2}} \big\langle f_1\big|\mathscr{F}(f_2)\big\rangle_{L^2}\,;
\end{aligned}$$

aufgrund der Dichtheit $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}) \subset L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ folgt daraus die Identität (für $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$)

$$\big\langle \mathscr{F}(f_1)\big|f_2\big\rangle_{L^2} = \big\langle f_1\big|\mathscr{F}(f_2)\big\rangle_{L^2}\,.$$

Notation wird das Argument im Integral nicht angegeben)

$$\langle \mathscr{F}(f_1) | f_2 \rangle_{L^2 \times L^2} = \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F}(f_1)\, f_2 = \int_{\mathbb{R}^d} f_1\, \mathscr{F}(f_2) = \langle f_1 | \mathscr{F}(f_2) \rangle_{L^2 \times L^2}$$

ist die Fourier-Transformierte einer temperierten Distribution $F \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ wie folgt erklärt (mittels dualer Paarung, für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ ist auch $\mathscr{F}(f) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$)

$$\big(\mathscr{F}(F)\big)(f) = \langle \mathscr{F}(F) | f \rangle_{\mathscr{S}^* \times \mathscr{S}} = \langle F | \mathscr{F}(f) \rangle_{\mathscr{S}^* \times \mathscr{S}} = F\big(\mathscr{F}(f)\big);$$

die Fourier-Transformation definiert einen Isomorphismus

$$\mathscr{F} : \mathscr{S}^*\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}\big) \longrightarrow \mathscr{S}^*\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}\big) : F \longmapsto \mathscr{F}(F),$$

und insbesondere ist die inverse Fourier-Transformation

$$\mathscr{F}^{-1} : \mathscr{S}^*\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}\big) \longrightarrow \mathscr{S}^*\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}\big) : G \longmapsto \mathscr{F}^{-1}(G)$$

wohldefiniert.

Definition (Charakteristische Funktion). Die charakteristische Funktion eines auf der Borel-σ-Algebra des euklidischen Raumes definierten Wahrscheinlichkeitsmaßes ist durch die inverse Fourier-Transformation definiert

$$\mu : \mathscr{B}\big(\mathbb{R}^d\big) \longrightarrow [0,1],$$
$$\widehat{\mu} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} : \kappa \longmapsto (2\pi)^{\frac{d}{2}} \big(\mathscr{F}^{-1}(\mu)\big)(\kappa) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\cdot\xi}\, \mathrm{d}\mu(\xi).$$

Vorbemerkung. Das folgende Resultat stellt einen Zusammenhang zwischen der charakteristischen Funktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes und der inversen Fourier-Transformation der zugehörigen temperierten Distribution her.

Resultat (Charakteristische Funktion). Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,1]$ gelten folgende Aussagen.

(i) Die zugehörige charakteristische Funktion ist beschränkt (durch Eins)

$$\widehat{\mu} = (2\pi)^{\frac{d}{2}}\, \mathscr{F}^{-1}(\mu) \in L^\infty\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}\big).$$

Erklärung. Da μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, ergibt sich die Abschätzung

$$\sup_{\kappa\in\mathbb{R}^d} \big|\widehat{\mu}(\kappa)\big| = \sup_{\kappa\in\mathbb{R}^d} \Big| \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\cdot\xi}\, \mathrm{d}\mu(\xi) \Big| \leq \int_{\mathbb{R}^d} 1\, \mathrm{d}\mu(\xi) = 1,$$

und folglich gilt $\widehat{\mu} \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. ◇

(ii) Die folgende Zuordnung definiert eine temperierte Distribution $T_\mu \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$

$$T_\mu : \mathscr{S}\big(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}\big) \longrightarrow \mathbb{C} : f \longmapsto T_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\omega)\, \mathrm{d}\mu(\omega)\,.$$

Erklärung. Das Funktional $T_\mu : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ist offensichtlich linear. Zum Nachweis der Stetigkeit ist die Aussage

$$\exists C > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N}_{\geq 0} \quad \forall f \in \mathscr{S}\big(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}\big): \quad \big|T_\mu(f)\big| \leq C \max_{|\alpha|\leq K} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \Big(1+|x|^2\Big)^{\frac{K}{2}} \big|\partial^\alpha f(x)\big|$$

zu zeigen; wegen $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}) \subset L^p(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ ergibt sich für jedes Element $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ mittels der Abschätzung

$$\big|T_\mu(f)\big| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(\omega)\, \mathrm{d}\mu(\omega)\right| \leq \|f\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^d} 1\, \mathrm{d}\mu(\omega) = \|f\|_{L^\infty}$$

die Stetigkeit von T_μ. ◇

(iii) Es gilt die Identität (beachte $T_\mu \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ und somit $\mathscr{F}^{-1}(T_\mu) \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$, Gleichheit gilt im Sinne des $\mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$)

$$\widehat{\mu} = (2\pi)^{\frac{d}{2}}\, \mathscr{F}^{-1}(T_\mu)\,.$$

Erklärung. Es sei daran erinnert, daß die Fourier-Transformierte einer temperierten Distribution wie folgt erklärt ist (wobei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ und $F \in \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$, insbesondere gilt $\mathscr{F}(f) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$)

$$\big(\mathscr{F}(F)\big)(f) = F\big(\mathscr{F}(f)\big)\,;$$

entsprechend setzt man für die inverse Fourier-Transformation einer temperierten Distribution

$$\big(\mathscr{F}^{-1}(F)\big)(f) = F\big(\mathscr{F}^{-1}(f)\big)\,.$$

Aus der Definition von T_μ sowie der Definition der inversen Fourier-Transformation auf dem Schwartz-Raum ergibt sich somit (wobei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$)

$$\begin{aligned}
\big(\mathscr{F}^{-1}(T_\mu)\big)(f) &= T_\mu\big(\mathscr{F}^{-1}(f)\big) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \big(\mathscr{F}^{-1}(f)\big)(\xi)\, \mathrm{d}\mu(\xi) \\
&= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(\kappa)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\cdot\xi}\, \mathrm{d}\kappa\, \mathrm{d}\mu(\xi)\,;
\end{aligned}$$

das Vertauschen der Integrationsreihenfolge und die Anwendung der Definition der charakteristischen Funktion führt auf (wegen $\widehat{\mu} \in L^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ und $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ ist das Integral wohldefiniert)

$$\begin{aligned}
\big(\mathscr{F}^{-1}(T_\mu)\big)(f) &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\kappa) \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\cdot\xi}\, \mathrm{d}\mu(\xi)\, \mathrm{d}\kappa \\
&= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\kappa)\, \widehat{\mu}(\kappa)\, \mathrm{d}\kappa\,,
\end{aligned}$$

was der dualen Paarung entspricht (zur Vereinfachung werden die Argumente weggelassen, vgl. reguläre temperierte Distributionen)

$$(2\pi)^{\frac{d}{2}}\left(\mathscr{F}^{-1}(T_\mu)\right)(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mu}\, f = \langle \widehat{\mu} | f \rangle_{\mathscr{S}^* \times \mathscr{S}},$$

in diesem Sinn gilt die angegebene Relation $\widehat{\mu} = (2\pi)^{\frac{d}{2}}\,\mathscr{F}^{-1}(T_\mu)$. ◇

1.4 Charakterisierung von Maßen

Vorbemerkung. Das folgende Resultat besagt, daß ein auf der Borel-σ-Algebra des euklidischen Raumes definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß durch die zugehörige charakteristische Funktion eindeutig bestimmt ist

$$\mu : \mathscr{B}\big(\mathbb{R}^d\big) \longrightarrow [0,1]\,,$$
$$\widehat{\mu} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} : \kappa \longmapsto (2\pi)^{\frac{d}{2}}\,\big(\mathscr{F}^{-1}(\mu)\big)(\kappa) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\cdot\xi}\,\mathrm{d}\mu(\xi)\,.$$

Resultat (Gleichheit von Wahrscheinlichkeitsmaßen). Es seien $\mu_1, \mu_2 : \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,1]$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße, und es bezeichnen $\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ die zugehörigen charakteristischen Funktionen. Falls die charakteristischen Funktionen übereinstimmen, so stimmen die Maße überein

$$\widehat{\mu}_1 = \widehat{\mu}_2 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} \quad \Longrightarrow \quad \mu_1 = \mu_2 : \mathscr{B}\big(\mathbb{R}^d\big) \longrightarrow [0,1]\,.$$

Erklärung. Aus dem zuvor angegebenen Resultat zur charakteristischen Funktion und mittels der Bijektivität der Fourier-Transformation folgt die Äquivalenz

$$\widehat{\mu}_\ell = (2\pi)^{\frac{d}{2}}\,\mathscr{F}^{-1}(T_{\mu_\ell})\,, \quad \ell \in \{1,2\}\,,$$
$$\widehat{\mu}_1 = \widehat{\mu}_2 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{\mu}_1 = \widehat{\mu}_2 \;\text{ in } \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}) \quad \Longleftrightarrow \quad T_{\mu_1} = T_{\mu_2} \;\text{ in } \mathscr{S}^*(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})\,.$$

Es bleibt also zu zeigen, daß aus der Gleichheit der zugehörigen temperierten Distributionen

$$T_{\mu_\ell} : \mathscr{S}\big(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}\big) \longrightarrow \mathbb{C} : f \longmapsto T_{\mu_\ell}(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\ell(\omega)\,, \quad \ell \in \{1,2\}\,,$$

die Gleichheit der Wahrscheinlichkeitsmaße folgt. Da die Borel-σ-Algebra durch die kartesischen Produkte von abgeschlossenen Intervallen erzeugt wird, reicht es aus, kompakte Mengen zu betrachten; das heißt, es ist die Implikation

$$\Big(\forall f \in \mathscr{S}\big(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}\big) : \quad \int_{\mathbb{R}^d} f(\omega)\,\mathrm{d}\mu_1(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\omega)\,\mathrm{d}\mu_2(\omega)\Big)$$
$$\Longrightarrow \quad \Big(\forall K \subset \mathbb{R}^d \text{ kompakt} : \quad \mu_1(K) = \mu_2(K)\Big)$$

nachzuweisen. Ein Resultat der Analysis stellt sicher, daß für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ eine Folge von Elementen des Schwartz-Raumes mit der Eigenschaft

$$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}\,, \qquad f_k \in \mathscr{S}\big(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}\big)\,, \quad f_k(x) \in [0,1]\,, \quad f_k\big|_K = 1\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^d : \quad f_k(x) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi_K(x)\,, \qquad \chi_K : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \chi_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in K\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

existiert. Aus der Beschränktheit der Funktionen und der punktweisen Konvergenz gegen die charakteristische Funktion folgt somit (Satz von der majorisierten Konvergenz[6] ermöglicht

[6] *Satz von der majorisierten Konvergenz.* Es sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_k : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine Folge von meßbaren Funktionen, welche die folgenden Bedingungen erfülle.

Vertauschen von Integral und Limes)

$$\begin{aligned}
&\left(\forall k \in \mathbb{N}: \quad \int_{\mathbb{R}^d} f_k(\omega)\,\mathrm{d}\mu_1(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f_k(\omega)\,\mathrm{d}\mu_2(\omega)\right) \\
&\quad \Longrightarrow \quad \left(\forall k \in \mathbb{N}: \quad \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_k(\omega)\,\mathrm{d}\mu_1(\omega) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_k(\omega)\,\mathrm{d}\mu_2(\omega)\right) \\
&\quad \Longrightarrow \quad \left(\forall k \in \mathbb{N}: \quad \int_{\mathbb{R}^d} \chi_K(\omega)\,\mathrm{d}\mu_1(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_K(\omega)\,\mathrm{d}\mu_2(\omega)\right) \\
&\quad \Longrightarrow \quad \left(\forall k \in \mathbb{N}: \quad \mu_1(K) = \mu_2(K)\right),
\end{aligned}$$

was die gewünschte Aussage ist. ◇

(i) Die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast überall gegen eine meßbare Funktion $f:\Omega\to\mathbb{R}$ (für fast alle $\omega\in\Omega$)

$$\lim_{k\to\infty} f_k(\omega) = f(\omega)\,.$$

(ii) Es existiert eine integrierbare Majorante $g \in L^1(\Omega,\mathbb{R})$ (für fast alle $\omega\in\Omega$)

$$|f_k(\omega)| \le g(\omega)\,, \quad k\in\mathbb{N}\,.$$

Unter diesen Voraussetzungen erhält man (Vertauschbarkeit von Integral und Limes)

$$\begin{gathered}
f \in L^1(\Omega,\mathbb{R})\,, \qquad f_k \in L^1(\Omega,\mathbb{R})\,, \quad k\in\mathbb{N}\,, \\
\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \big|f_k(\omega) - f(\omega)\big|\,\mathrm{d}\mu(\omega) = 0\,, \\
\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega) = \int_\Omega f(\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega)\,.
\end{gathered}$$

1.5 Charakterisierung von Gauß-Maßen

Vorbemerkung. Im Folgenden wird an die Definition eines reellen Gauß-Maßes erinnert und die zugehörige charakteristische Funktion, welche das Wahrscheinlichkeitsmaß eindeutig festlegt, bestimmt; als Spezialfall ist auch das Dirac-Maß zugelassen.

Definition (Reelles Gauß-Maß). Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, und es gelte $\beta \geq 0$. Ein auf der Borel-σ-Algebra der reellen Zahlen definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß der Form[7]

$$\mu = N\big(\alpha, \beta^2\big) : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\beta} \displaystyle\int_A \mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\alpha)^2}{2\beta^2}}\,\mathrm{d}\xi\,, & \beta > 0\,, \\ \delta_\alpha(A)\,, & \beta = 0\,, \end{cases}$$

heißt reelles Gauß-Maß; das Dirac-Maß ist dabei durch

$$\delta_\alpha(A) = \begin{cases} 1\,, & \alpha \in A\,, \\ 0\,, & \alpha \notin A\,, \end{cases}$$

gegeben. Die Identitäten[8]

$$\alpha = E(I) = \int_{\mathbb{R}} \xi\,\mathrm{d}\mu(\xi)\,, \qquad \beta^2 = V(I) = \int_{\mathbb{R}} (\xi-\alpha)^2\,\mathrm{d}\mu(\xi)\,,$$

[7] *Bemerkung.* Man beachte, daß man für $A = (a,b) \subset \mathbb{R}$ mittels Integraltransformation die Relation (setze $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}\beta}(\xi-\alpha)$ bzw. $\xi = \alpha + \sqrt{2}\,\beta\eta$)

$$\mu\big((a,b)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\beta}\int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\alpha)^2}{2\beta^2}}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}\beta}(a-\alpha)}^{\frac{1}{\sqrt{2}\beta}(b-\alpha)} \mathrm{e}^{-\eta^2}\,\mathrm{d}\eta$$

erhält. Falls $\alpha \in (a,b)$ ist $a-\alpha < 0$ sowie $b-\alpha > 0$ und daher $\frac{1}{\sqrt{2}\beta}(a-\alpha) \to -\infty$ sowie $\frac{1}{\sqrt{2}\beta}(a-\alpha) \to \infty$ für $\beta \to 0$, andernfalls folgt $a-\alpha < 0$ sowie $b-\alpha < 0$ oder $a-\alpha > 0$ sowie $b-\alpha > 0$, und der Integrationsbereich reduziert sich auf einen einzelnen Punkt

$$\alpha \in (a,b): \quad \mu\big((a,b)\big) \overset{\beta\to 0}{\to} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\eta^2}\,\mathrm{d}\eta = 1\,, \qquad \alpha \notin (a,b): \quad \mu\big((a,b)\big) \overset{\beta\to 0}{\to} 0\,.$$

Das Dirac-Maß ergibt sich somit in natürlicher Weise aus dem Gauß-Maß.

[8] *Erinnerung.* Für $\beta > 0$ folgen mit Hilfe der Relationen (Herleitung des bekannten Wertes mittels Quadrieren und Verwendung von Polarkoordinaten, Integral über ungerade Funktion verschwindet, Partielle Integration)

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = \sqrt{\pi}\,, \qquad \int_{\mathbb{R}} \xi\,\mathrm{e}^{-\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = 0\,, \qquad \int_{\mathbb{R}} \xi^2\,\mathrm{e}^{-\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = -\tfrac{1}{2}\,\xi\,\mathrm{e}^{-\xi^2}\Big|_{x=-\infty}^{\infty} + \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

die angegebenen Identitäten (Substitution $\eta = \frac{\xi-\alpha}{\sqrt{2}\beta}$ bzw. $\xi = \alpha + \sqrt{2}\,\beta\eta$)

$$E(I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\beta}\int_{\mathbb{R}} \xi\,\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\alpha)^2}{2\beta^2}}\,\mathrm{d}\xi = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\eta^2}\,\mathrm{d}\eta + \frac{\sqrt{2}\beta}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \eta\,\mathrm{e}^{-\eta^2}\,\mathrm{d}\eta = \alpha\,,$$

$$V(I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\beta}\int_{\mathbb{R}} (\xi-\alpha)^2\,\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\alpha)^2}{2\beta^2}}\,\mathrm{d}\xi = \frac{2\beta^2}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \eta^2\,\mathrm{e}^{-\eta^2}\,\mathrm{d}\eta = \beta^2\,.$$

rechtfertigen die ebenfalls gebräuchliche Bezeichnung *Normalverteilung mit Erwartungswert α und Varianz β^2*.

Erinnerung. Die charakteristische Funktion eines Gauß-Maßes ist mittels der inversen Fourier-Transformation definiert

$$\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \mu(A) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\beta} \int_A \mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\alpha)^2}{2\beta^2}}\, \mathrm{d}\xi\,, & \beta > 0\,, \\ \delta_\alpha(A)\,, & \beta = 0\,, \end{cases}$$

$$\widehat{\mu} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : \kappa \longmapsto \sqrt{2\pi}\,\big(\mathscr{F}^{-1}(\mu)\big)(\kappa) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\xi}\, \mathrm{d}\mu(\xi)\,.$$

Resultat (Charakteristische Funktion eines Gauß-Maßes). Die charakteristische Funktion eines reellen Gauß-Maßes ist durch

$$\mu = N\big(\alpha,\beta^2\big) : \qquad \widehat{\mu} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : \kappa \longmapsto \sqrt{2\pi}\,\big(\mathscr{F}^{-1}(\mu)\big)(\kappa) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\kappa - \frac{1}{2}\beta^2\kappa^2}$$

gegeben; insbesondere gilt für den Spezialfall der Standardnormalverteilung

$$\mu = N(0,1) : \qquad \widehat{\mu} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : \kappa \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\kappa^2}\,.$$

Erklärung. Im Speziallfall $\beta = 0$, d.h. $\mu = \delta_\alpha$, folgt sofort $\widehat{\mu}(\kappa) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\kappa}$ für $\kappa \in \mathbb{R}$. Für $\beta > 0$ bezeichne $f_{(\alpha,\beta)}$ die Dichtefunktion der Normalverteilung und insbesondere $f_{(0,1)}$ die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung

$$f_{(\alpha,\beta)} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \xi \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\beta}\, \mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\alpha)^2}{2\beta^2}}\,, \qquad f_{(0,1)} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \xi \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi^2}\,.$$

Eine elementare Rechnung zeigt (Quadratisches Ergänzen $\xi^2 - 2\,\mathrm{i}\,\kappa\xi = (\xi - \mathrm{i}\,\kappa)^2 + \kappa^2$, Substitution $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\xi - \mathrm{i}\,\kappa)$ bzw. $\xi = \sqrt{2}\,\eta + \mathrm{i}\,\kappa$)

$$\begin{aligned} 2\pi\,\big(\mathscr{F}^{-1}(f_{(0,1)})\big)(\kappa) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\xi}\, \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\xi^2 - 2\mathrm{i}\kappa\xi)}\, \mathrm{d}\xi \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\kappa^2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(\frac{\xi - \mathrm{i}\kappa}{\sqrt{2}})^2}\, \mathrm{d}\xi \\ &= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\kappa^2} \int_{\left\{\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \mathrm{i}\kappa) : \xi \in \mathbb{R}\right\}} \mathrm{e}^{-\eta^2}\, \mathrm{d}\eta\,; \end{aligned}$$

mittels Anwendung der Integralformel von Cauchy[9] ergibt sich weiters

$$\begin{aligned} 2\pi\,\big(\mathscr{F}^{-1}(f_{(0,1)})\big)(\kappa) &= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\kappa^2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\eta^2}\, \mathrm{d}\eta \\ &= \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\kappa^2} \\ &= 2\pi\, f_{(0,1)}(\kappa)\,. \end{aligned}$$

[9] *Bemerkung.* Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \mathrm{e}^z$ ist für jedes Element $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, d.h. eine ganze Funktion. Der Cauchy'sche Integralsatz besagt inbesondere, daß für jede ganze Funktion

Im allgemeinen Fall führt eine geeignete Transformation des Integrales auf (setze $\eta = \frac{\xi-\alpha}{\beta}$ bzw. $\xi = \alpha + \beta\eta$)

$$\begin{aligned}
2\pi\beta\big(\mathscr{F}^{-1}(f_{(\alpha,\beta)})\big)(\kappa) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\alpha)^2}{2\beta^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\xi}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\alpha}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{\eta^2}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta\kappa\eta}\,\mathrm{d}\xi \\
&= 2\pi\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\alpha}\big(\mathscr{F}^{-1}(f_{(0,1)})\big)(\beta\kappa) \\
&= 2\pi\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\alpha}\,f_{(0,1)}(\beta\kappa) \\
&= \sqrt{2\pi}\,\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\alpha-\frac{1}{2}\beta^2\kappa^2}\,.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man die Relationen

$$\mathscr{F}^{-1}(f_{(0,1)}) = f_{(0,1)}\,, \qquad \big(\mathscr{F}^{-1}(f_{(\alpha,\beta)})\big)(\kappa) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\alpha-\frac{1}{2}\beta^2\kappa^2}\,, \quad \kappa\in\mathbb{R}\,,$$

$$\mu = N(\alpha,\beta^2): \qquad \widehat{\mu}(\kappa) = \sqrt{2\pi}\,\big(\mathscr{F}^{-1}(\mu)\big)(\kappa) = \sqrt{2\pi}\,\big(\mathscr{F}^{-1}(f_{(\alpha,\beta)})\big)(\kappa) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\alpha-\frac{1}{2}\beta^2\kappa^2}\,, \quad \kappa\in\mathbb{R}\,,$$

woraus das Resultat folgt. ◇

$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ das Integral über eine geschlossene (stückweise reguläre) Kurve $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ verschwindet

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Mit Hilfe dieses Resultates folgert man, daß der Wert des Integrals nicht von $c\in\mathbb{R}$ abhängt und erhält somit

$$\int_{\mathbb{R}+\mathrm{i}c} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,.$$

1.6 Konsistenzsatz von Kolmogorov

Vorbemerkung. Der Satz von Kolmogorov wird benötigt, um die Existenz eines eindimensionalen Wiener-Prozesses sicherzustellen.

Konsistenzsatz von Kolmogorov. Es sei $T > 0$, und es bezeichne $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $t_k \in [0,T]$ für $k \in \mathbb{N}$. Weiters sei $(\nu_{(t_1,\dots,t_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Maßen

$$\nu_{(t_1,\dots,t_k)} : \mathscr{B}\Big(\big(\mathbb{R}^d\big)^k\Big) \longrightarrow [0,\infty]$$

mit den folgenden Eigenschaften. Für jede Permutation $\sigma : \{1,\dots,k\} \to \{1,\dots,k\}$ und alle Borel-Mengen $A_1,\dots,A_k \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ ist die Relation

$$\nu_{(t_{\sigma(1)},\dots,t_{\sigma(k)})}(A_1 \times \dots \times A_k) = \nu_{(t_1,\dots,t_k)}\big(A_{\sigma^{-1}(1)} \times \dots \times A_{\sigma^{-1}(k)}\big)$$

erfüllt; die Erweiterung von $(t_1,\dots,t_k) \in [0,T]^k$ auf ein K-Tupel $(t_1,\dots,t_k,t_{k+1},\dots,t_K) \in [0,T]^K$ sowie die Erweiterung der Produkt-Menge $A_1 \times \dots \times A_k$ auf $A_1 \times \dots \times A_k \times \mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d$ bewirkt keine Änderung (wobei $A_1,\dots,A_k \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$)

$$\nu_{(t_1,\dots,t_k)}(A_1 \times \dots \times A_k) = \nu_{(t_1,\dots,t_k,t_{k+1},\dots,t_K)}\big(A_1 \times \dots \times A_k \times \mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d\big).$$

Unter den angegebenen Voraussetzungen ist die Existenz eines Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ und eines stochastischen Prozesses $(Z(t))_{t\in[0,T]}$ mit $Z(t) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ für $t \in [0,T]$ sichergestellt; für beliebige Zeitpunkte $t_1,\dots,t_k \in [0,T]$ und Borel-Mengen $A_1,\dots,A_k \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ erfüllt das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu : \mathscr{A} \to [0,1]$ die Relation

$$\mu\Big(\big(Z(t_1)\big)^{-1}(A_1) \cap \dots \cap \big(Z(t_k)\big)^{-1}(A_k)\Big) = \nu_{(t_1,\dots,t_k)}(A_1 \times \dots \times A_k).$$

Erklärung. Vgl. etwa http://www.math.uni-heidelberg.de/studinfo/rohde/lehre2.html. ◇

1.7 Existenz von Wiener-Prozessen

Erinnerung. Es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum, und es sei $T > 0$. Ein reellwertiger stochastischer Prozeß

$$\big(W(t)\big)_{t\in[0,T]}, \qquad W(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \in [0,T],$$

heißt eindimensionaler Wiener-Prozeß bzw. eindimensionale Brown'sche Bewegung, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(a) Es ist $W(0) = 0$ fast sicher, d.h. es gilt

$$\mu\Big(\big\{\omega \in \Omega : \big(W(0)\big)(\omega) = 0\big\}\Big) = 1\,.$$

(b) Für jedes Element $\omega \in \Omega$ ist der zugehörige Pfad fast sicher stetig, d.h. es gilt

$$\mu\Big(\big\{\omega \in \Omega : \text{der zugehörige Pfad } [0,T] \to \mathbb{R} : t \to \big(W(t)\big)(\omega) \text{ ist stetig}\big\}\Big) = 1\,.$$

(c) Für jedes $K \in \mathbb{N}$ und beliebige Zeitpunkte $t_0, t_1, \dots, t_K \in [0,T]$ mit $t_0 < t_1 < \cdots < t_K$ sind die reellwertigen Zufallsvariablen (Zuwächse, beachte $W(0) = 0$ fast sicher)

$$W(t_1)\,, W(t_2) - W(t_1)\,, \dots, W(t_K) - W(t_{K-1})$$

unabhängig.

(d) Für beliebige Zeitpunkte $t_1, t_2 \in [0,T]$ mit $t_1 < t_2$ ist $W(t_2) - W(t_1)$ eine normalverteilte reellwertige Zufallsvariable

$$W(t_2) - W(t_1) \sim N(0, t_2 - t_1)\,,$$

$$\mu \circ \big(W(t_2) - W(t_1)\big)^{-1} = N(0, t_2 - t_1) : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \int_A \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2(t_2 - t_1)}}\, \mathrm{d}\xi\,.$$

Resultat (Existenz eines Wiener-Prozesses). Die Anwendung des Konsistenzsatzes von Kolmogorov sichert die Existenz eines Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ und eines eindimensionalen Wiener-Prozesses

$$\big(W(t)\big)_{t\in[0,T]}, \qquad W(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \in [0,T]\,.$$

Dazu definiert man für aufsteigende Zeitpunkte $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$ (für $A_1, \dots, A_k \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, Produkt-Maß definiert durch $\nu_{(t_1,\dots,t_k)}(A_1 \times \cdots \times A_k) = \big(N(0,t_1)\big)(A_1) \cdot \ldots \cdot (N(0, t_k - t_{k-1})\big)(A_k))$

$$N\big(0, \beta^2\big) : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\beta} \int_A \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2\beta^2}}\, \mathrm{d}\xi\,, \qquad \beta > 0\,,$$

$$\nu_{(t_1,\dots,t_k)} = N(0,t_1) \otimes N(0, t_2 - t_1) \otimes \cdots \otimes N(0, t_k - t_{k-1}) : \mathscr{B}\big(\mathbb{R}^k\big) \longrightarrow [0,1]\,,$$

$$\mu\Big(\big(W(t_1)\big)^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap \big(W(t_k)\big)^{-1}(A_k)\Big) = \nu_{(t_1,\dots,t_k)}(A_1 \times \cdots \times A_k)\,;$$

die Erweiterung auf beliebige Zeitpunkte $t_1, \dots, t_k \in [0,T]$ erfolgt entsprechend der Bedingung

$$\mu_{(t_{\sigma(1)},\dots,t_{\sigma(k)})}(A_1 \times \cdots \times A_k) = \mu_{(t_1,\dots,t_k)}\big(A_{\sigma^{-1}(1)} \times \cdots \times A_{\sigma^{-1}(k)}\big)\,.$$

Erweiterung. Die Erweiterung auf den mehrdimensionalen Fall erfolgt durch Betrachtung der Komponentenfunktionen. Genauer, man verwendet, daß ein stochastischer Prozeß ein d-dimensionaler Wiener-Prozeß bzw. eine d-dimensionale Brown'sche Bewegung

$$\big(W(t)\big)_{t\in[0,T]}, \qquad W(t):\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d : \omega \longmapsto \big(W(t)\big)(\omega) = \Big(\big(W_1(t)\big)(\omega),\dots,\big(W_d(t)\big)(\omega)\Big)^T,$$

ist, wenn der durch die k-te Komponentenfunktion definierte stochastische Prozeß

$$\big(W_k(t)\big)_{t\in[0,T]}, \qquad W_k(t):\Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad k\in\{1,\dots,d\}, \quad t\in[0,T],$$

ein eindimensionaler Wiener-Prozeß ist und sämtliche Komponentenfunktionen unabhängig sind.

Kapitel 2

Grundlagen der Funktionalanalysis

Vorbemerkung. Im Folgenden werden grundlegende Begriffe und Resultate der Funktionalanalysis, insbesondere zu Spurklasse-Operatoren, erwähnt; der Vollständigkeit halber wird zunächst an die Charakterisierung stetiger linearer Operatoren einnert.

Überblick. Um eine Verbindung mit DENK (2014) herzustellen, sind die entsprechenden Verweise angegeben.

- Beschränktheit und Stetigkeit eines linearen Operators
  Raum der stetigen linearen Operatoren
  Isomorphismus
  Isometrie
- Dualraum
  Satz von Hahn–Banach
  Charakterisierung der Norm (Lemma C.2)
  Bidualraum und reflexiver Raum
- Orthonormalsystem
  Vollständiges Orthonormalsystem, Charakterisierung und Existenz
- Adjungierter Operator
  Selbstadjungierter Operator
  Positiv semi-definiter Operator (Definition B.2)
- Kompakter Operator
  Spektraleigenschaften kompakter Operatoren

Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren

Singulärwerte (Definition B.3)

Resultat zur Darstellung eines kompakten Operators (Satz B.5)

Singulärwertzerlegung (Korollar B.6)

- Neumann–Schatten-Klassen (Definition B.3, Bemerkung B.4)

  Spurklasse-Operatoren, Hilbert–Schmidt-Operatoren (Definition B.3)

  Überlegungen zum endlich-dimensionalen Fall

  Spur (Definition B.7)

  Resultat zur Spur (Satz B.8)

  Spezialfall eines positiv semi-definiten selbstadjungierten Spurklasse-Operators (Bemerkung B.9)

  Resultat zu Spurklasse- und Hilbert–Schmidt-Operatoren (Satz B.10)

  Resultat zum Raum der Hilbert–Schmidt-Operatoren (Satz B.11)

2.1 Stetiger linearer Operator

Vorbemerkung. Im Fall eines linearen Operators zwischen normierten Räumen ist Stetigkeit äquivalent zur Beschränktheit der Operator-Norm. Der Vektorraum der stetigen linearen Operatoren zwischen einem normierten Raum und einem Banach-Raum bildet mit der Operator-Norm einen Banach-Raum.

Stetiger linearer Operator.

(i) *Linearer Operator.* Es bezeichne $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ein linearer Operator zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen

$$A : X_1 \longrightarrow X_2$$

erfüllt die Eigenschaften (Additivität, Homogenität)

$$\begin{aligned} \forall x_1, \widetilde{x}_1 \in X_1 : \qquad & A\big(x_1 + \widetilde{x}_1\big) = A x_1 + A \widetilde{x}_1 \,, \\ \forall c \in \mathbb{K} \quad \forall x_1 \in X_1 : \qquad & A(c x_1) = c A x_1 \,; \end{aligned}$$

wesentliche Unterräume sind der Wertebereich, der Kern und der Graph von A

$$\begin{aligned} \mathrm{Bi}(A) &= A\big(X_1\big) = \big\{A x_1 : x_1 \in X_1\big\} \subseteq X_2 \,, \\ \mathrm{Ke}(A) &= A^{-1}\big(\{0\}\big) = \big\{x_1 \in X_1 : A x_1 = 0\big\} \subseteq X_1 \,, \\ \mathrm{Gr}(A) &= \big\{\big(x_1, A x_1\big) : x_1 \in X_1\big\} \subseteq X_1 \times X_2 \,. \end{aligned}$$

Im Spezialfall $X_2 = \mathbb{C}$ spricht man von einem linearen Funktional.

(ii) *Beschränktheit der Operator-Norm.* Ein linearer Operator $A : X_1 \to X_2$ zwischen normierten Räumen $(X_1, \|\cdot\|_{X_1})$ und $(X_2, \|\cdot\|_{X_2})$ heißt beschränkt, wenn die zugehörige Operator-Norm endlich ist

$$\big\|A\big\|_{X_2 \leftarrow X_1} = \sup_{\substack{x_1 \in X_1 \\ x_1 \neq 0}} \frac{\big\|A x_1\big\|_{X_2}}{\big\|x_1\big\|_{X_1}} = \sup_{\substack{x_1 \in X_1 \\ \|x_1\|_{X_1} = 1}} \big\|A x_1\big\|_{X_2} < \infty;$$

für einen beschränkten Operator folgt insbesondere die Relation (mit optimaler Konstante $C = \|A\|_{X_2 \leftarrow X_1} \geq 0$)

$$\exists C \geq 0 \quad \forall x_1 \in X_1 : \qquad \big\|A x_1\big\|_{X_2} \leq C \big\|x_1\big\|_{X_1} \,.$$

(iii) *Beschränktheit und Stetigkeit.* Für einen linearen Operator $A : X_1 \to X_2$ zwischen normierten Räumen $(X_1, \|\cdot\|_{X_1})$ und $(X_2, \|\cdot\|_{X_2})$ sind folgende Aussagen äquivalent.

(a) Der lineare Operator A ist gleichmäßig stetig

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \widetilde{x}_1, x_1 \in X_1 \text{ mit } \big\|\widetilde{x}_1 - x_1\big\|_{X_1} \leq \delta : \qquad \big\|A\big(\widetilde{x}_1 - x_1\big)\big\|_{X_2} \leq \varepsilon \,.$$

(b) Der lineare Operator A ist stetig

$$\forall x_1 \in X_1 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \widetilde{x}_1 \in X_1 \text{ mit } \|\widetilde{x}_1 - x_1\|_{X_1} \leq \delta : \qquad \|A(\widetilde{x}_1 - x_1)\|_{X_2} \leq \varepsilon .$$

(c) Der lineare Operator A ist stetig in Null

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1 \in X_1 \text{ mit } \|x_1\|_{X_1} \leq \delta : \qquad \|A x_1\|_{X_2} \leq \varepsilon .$$

(d) Der lineare Operator A ist im folgenden Sinn beschränkt

$$\exists C \geq 0 \quad \forall x_1 \in X_1 : \qquad \|A x_1\|_{X_2} \leq C \|x_1\|_{X_1} .$$

Erklärung. Vergleiche WERNER (2011), Satz II.1.2. ◇

(iv) *Raum der stetigen linearen Operatoren.* Der Vektorraum aller stetigen linearen Operatoren zwischen normierten Räumen wird mit

$$L(X_1, X_2) = \{A : X_1 \to X_2 \text{ linear und stetig}\}$$

bezeichnet; versehen mit der Operator-Norm bildet $L(X_1, X_2)$ einen normierten Raum. Speziell für $X = X_1 = X_2$ setzt man

$$L(X) = L(X, X) = \{A : X \to X \text{ linear und stetig}\} .$$

Falls der Bildbereich X_2 vollständig und somit ein Banach-Raum ist, bildet

$$\big(L(X_1, X_2), \|\cdot\|_{X_2 \leftarrow X_1}\big)$$

einen Banach-Raum, vergleiche WERNER (2011), Satz II.1.4.

(v) *Isomorphismus.* Ein linearer Operator zwischen normierten Räumen $(X_1, \|\cdot\|_{X_1})$ und $(X_2, \|\cdot\|_{X_2})$ wird als Isomorphismus bezeichnet, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind

$$A : X_1 \longrightarrow X_2 \text{ bijektiv und stetig}, \qquad A^{-1} : X_2 \longrightarrow X_1 \text{ stetig}.$$

(vi) *Isometrie.* Ein linearer Operator $A : X_1 \to X_2$ heißt eine Isometrie, wenn die Norm erhalten bleibt

$$\forall x_1 \in X_1 : \qquad \|A x_1\|_{X_2} = \|x_1\|_{X_1} .$$

Insbesondere folgt daraus die Stetigkeit und Injektivität von A, denn (somit $\mathrm{Ke} A = \{0\}$)

$$A x_1 = A \widetilde{x}_1 \quad \Longrightarrow \quad 0 = \|A(x_1 - \widetilde{x}_1)\|_{X_2} = \|x_1 - \widetilde{x}_1\|_{X_1} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \widetilde{x}_1 ;$$

Surjektivität ist im Allgemeinen jedoch nicht gegeben.

2.2 Dualraum und Reflexivität

Vorbemerkung. Wie zuvor angegeben, bildet der Vektorraum der stetigen linearen Operatoren zwischen einem normierten Raum und einem Banach-Raum mit der Operator-Norm einen Banach-Raum; spezielle Bedeutung hat der Dualraum eines normierten Raumes, welcher alle stetigen linearen Funktionale umfaßt.

Dualraum. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Der (topologische) Dualraum eines Banach-Raumes über $\mathbb{K}$ oder allgemeiner eines normierten $\mathbb{K}$-Vektorraumes $(X, \|\cdot\|_X)$ umfaßt alle stetigen linearen Funktionale

$$X^* = L\big(X, \mathbb{K}\big) = \big\{x^* : X \to \mathbb{K} \text{ linear und stetig}\big\}.$$

Versehen mit der Operatornorm

$$\big\|x^*\big\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X = 1} \big|x^*(x)\big|, \qquad x^* \in X^*,$$

bildet der Dualraum einen normierten Raum; aufgrund der Vollständigkeit des zugrundeliegenden Körpers $\mathbb{K}$ ist der Dualraum vollständig und bildet somit einen Banach-Raum.

Satz von Hahn–Banach. Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein (nichttrivialer) Banach-Raum bzw. allgemeiner ein normierter Raum. Eine Folgerung aus dem Satz von Hahn–Banach besagt, daß für jedes Element $x \in X$ ein Element des Dualraumes $x^* \in X^*$ mit den Eigenschaften $\|x^*\|_{X^*} = 1$ sowie

$$x^*(x) = \big\|x\big\|_X$$

existiert.[1]

Resultat (Charakterisierung der Norm). Falls der zugrundeliegende Banach-Raum X separabel ist, existiert eine Folge $(x_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ von Elementen des Dualraumes X^*, sodaß für alle $x \in X$ die Relation

$$\big\|x\big\|_X = \sup_{k\in\mathbb{N}} \big|x_k^*(x)\big|$$

[1] *Bemerkung.* Dieses Resultat impliziert insbesondere, daß man Elemente von X mittels eines Elementes des Dualraumes unterscheiden kann (Trennung von Punkten)

$$\forall x, \widetilde{x} \in X \text{ mit } x \neq \widetilde{x} \quad \exists z^* \in X^* : \qquad z^*(x) \neq z^*(\widetilde{x}).$$

Diese Folgerung entspricht der Aussage, daß zwei Elemente des euklidischen Raumes verschieden sind, wenn zumindestens eine Komponente verschieden ist

$$\forall x = \big(x_1, \dots, x_d\big)^T, \widetilde{x} = \big(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_d\big)^T \in \mathbb{R}^d \text{ mit } x \neq \widetilde{x} \quad \exists k \in \{1, \dots, d\} : \qquad x_k \neq \widetilde{x}_k.$$

gültig ist; im Spezialfall eines reellen separablen Banach-Raumes kann die Folge so gewählt werden, daß die folgende Identität gilt

$$\|x\|_X = \sup_{k\in\mathbb{N}} x_k^*(x)\,.$$

Erklärung. Aufgrund der Linearität der Elemente des Dualraumes reicht es aus, normierte Elemente zu betrachten. Da vorausgesetzt wird, daß der betrachtete Banach-Raum separabel ist, existiert eine abzählbare Familie $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von normierten Elementen mit der Eigenschaft (Dichtheit der Folge in Einheitsspäre)

$$\|x_k\|_X = 1\,, \quad k\in\mathbb{N}\,, \qquad \overline{\{x_k : k\in\mathbb{N}\}} = \{x\in X : \|x\|_X = 1\}\,.$$

Der Satz von Hahn–Banach sichert zudem die Existenz von Elementen des Dualraumes $(x_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft

$$\|x_k^*\|_{X^*} = 1\,, \quad x_k^*(x_k) = \|x_k\|_X = 1\,, \qquad k\in\mathbb{N}\,.$$

Für jedes Element der Einheitsspäre folgt damit die Abschätzung

$$\forall x\in X \text{ mit } \|x\|_X = 1: \qquad \big|x_k^*(x)\big| \le \|x_k^*\|_{X^*}\,\|x\|_X \le 1\,;$$

ein Widerspruchsbeweis (wobei $\delta > 0$ und $\ell\in\mathbb{N}$)

$$\begin{aligned}
&\text{Annahme} \quad \forall x\in X \text{ mit } \|x\|_X = 1 \quad \forall k\in\mathbb{N}: && \big|x_k^*(x)\big| \le 1-\delta\,,\\
\Longrightarrow \quad &\forall x\in X \text{ mit } \|x\|_X = 1 \text{ und } \|x-x_\ell\|_X \le \tfrac{\delta}{2}: && 1 = \big|x_\ell^*(x_\ell)\big|\\
& && \le \big|x_\ell^*(x-x_\ell)\big| + \big|x_\ell^*(x)\big|\\
& && \le \|x_\ell^*\|_{X^*}\,\|x-x_\ell\|_X + 1-\delta\\
& && \le 1-\tfrac{\delta}{2}\ \lightning
\end{aligned}$$

zeigt die gewünschte Relation

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \big|x_k^*(x)\big| = 1 = \|x\|_X\,.$$

Im reellen Fall kann durch Übergang auf $-x_k^*$ die Bedingung $x_k^*(x) > 0$ für alle $k\in\mathbb{N}$ erreicht werden. ◇

Bidualraum, Reflexiver Raum. Wie zuvor sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banach-Raum über $\mathbb{K}$ oder allgemeiner ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum; inbesondere bildet der zugehörige Dualraum X^* einen Banach-Raum. Der Dualraum von X^* wird mit

$$X^{**} = L\big(X^*, \mathbb{K}\big) = \big\{x^{**} : X^* \to \mathbb{K} \text{ linear und stetig}\big\}$$

bezeichnet und heißt Bidualraum von X; die kanonische Einbettung

$$J_X : X \longrightarrow X^{**} : x \longmapsto x^{**} = J_X x = \big[x^* \longmapsto x^*(x)\big]$$

ist eine lineare und isometrische Funktion und insbesondere injektiv und stetig. Falls die kanonische Einbettung zudem surjektiv und folglich ein isometrischer Isomorphismus ist, nennt man X einen reflexiven Raum; meist identifiziert man den Bidualraum X^{**} dann mit X. Da ein Hilbert-Raum isomorph zu seinem Bidualraum ist, ist er insbesondere reflexiv; für einen reellen Hilbert-Raum ist dies eine Konsequenz des Satzes von Fréchet-Riesz, und das Resultat läßt sich auch auf komplexe Hilbert-Räume erweitern.

2.3 Vollständiges Orthonormalsystem

Vorbemerkung. Eine für spätere Zwecke hilfreiche Darstellung eines kompakten Operators zwischen separablen Hilbert-Räumen beruht auf der Kenntnis von vollständigen Orhonormalsystemen.

Orthonormalsystem. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, und es bezeichne $(H, (\cdot|\cdot)_H, \|\cdot\|_H)$ einen Hilbert-Raum (bzw. allgemeiner ein Prähilbert-Raum) über $\mathbb{K}$.

(i) *Orthonormalsystem.* Eine Familie $(h_k)_{k\in K}$ von Elementen $h_k \in H$ für $k \in K$ heißt ein Orthonormalsystem in H, wenn je zwei Elemente aufeinander orthogonal stehen und jedes Element normiert ist

$$\forall\, k,\ell \in K: \qquad \big(h_k\big|h_\ell\big)_H = \delta_{k\ell} = \begin{cases} 1\,, & k=\ell\,,\\ 0\,, & k\neq \ell\,. \end{cases}$$

(ii) *Vollständiges Orthonormalsystem.* Ein Orthonormalsystem $(h_k)_{k\in K}$ von H, dessen lineare Hülle dicht in H liegt

$$H = \overline{H_K}\,, \qquad H_K = {}_{\mathbb{K}}\big\langle h_k : k \in K\big\rangle\,,$$

wird als vollständiges Orthonormalsystem bzw. Hilbert-Basis bezeichnet.

(iii) *Charakterisierung.* Für ein vollständiges Orthonormalsystem $(h_k)_{k\in K}$ des Hilbert-Raumes H sind folgende Aussagen äquivalent (zusätzliche Überlegungen zur Wohldefiniertheit der angegebenen unendlichen Reihen wesentlich, Parseval'sche Identität)

$$\begin{gathered}
H = \overline{H_K}\,, \qquad H_K = {}_{\mathbb{K}}\big\langle h_k : k \in K\big\rangle\,,\\
\forall\, h \in H: \qquad \big(h \in H_K^{\perp} \implies h = 0\big)\,,\\
\forall\, h \in H: \qquad h = \sum_{k\in K} \big(h\big|h_k\big)_H\, h_k\,,\\
\forall\, h_1,h_2 \in H: \qquad \big(h_1\big|h_2\big)_H = \sum_{k\in K} \big(h_1\big|h_k\big)_H \big(h_k\big|h_2\big)_H\,,\\
\forall\, h \in H: \qquad \|h\|_H^2 = \sum_{k\in K} \big|\big(h\big|h_k\big)_H\big|^2\,.
\end{gathered}$$

(iv) *Existenz.* Jeder separable Hilbert-Raum besitzt ein vollständiges Orthonormalsystem; dieses kann konstruktiv mittels des Orthogonalisierungsverfahrens von Gram–Schmidt konstruiert werden. Ein unendlich-dimensionaler Hilbert-Raum ist genau dann separabel, wenn ein abzählbares vollständiges Orthonormalsystem existiert. Siehe WERNER (2011), Kapitel V.4. Orthonormalbasen.

2.4 Positiver selbstadjungierter Operator

Vorbemerkung. In Hinblick auf die Darstellung von Gauß-Maßen und Wiener-Prozessen mit Werten in separablen Hilbert-Räumen reicht es aus, den adjungierten Operator eines stetigen Operators zwischen Hilbert-Räumen zu definieren; in dieser Situation stimmen außerdem die Begriffe Symmetrie und Selbstadjungiertheit überein.

Adjungierter Operator. Es seien $(H_1, (\cdot|\cdot)_{H_1}, \|\cdot\|_{H_1})$ und $(H_2, (\cdot|\cdot)_{H_2}, \|\cdot\|_{H_2})$ Hilbert-Räume. Für einen stetigen linearen Operator $A: H_1 \to H_2$ ist der adjungierte Operator

$$A^*: H_2 \longrightarrow H_1: h_2 \longmapsto A^* h_2$$

durch die folgende Relation definiert

$$\forall h_1 \in H_1 \quad \forall h_2 \in H_2: \qquad \big(A h_1 \big| h_2\big)_{H_2} = \big(h_1 \big| A^* h_2\big)_{H_1}.$$

Vergleiche WERNER (2011), Definition III.4.1 (allgemeiner für normierte Räume) und Definition V.5.1.

Selbstadjungierter Operator. Ein auf einem Hilbert-Raum definierter stetiger linearer Operator $A: H \to H$ heißt selbstadjungiert (bzw. symmetrisch), wenn der adjungierte Operator mit A übereinstimmt

$$A = A^*: H \longrightarrow H;$$

somit ist die folgende Relation gültig

$$\forall h_1, h_2 \in H: \qquad \big(A h_1 \big| h_2\big)_H = \big(h_1 \big| A h_2\big)_H.$$

Positiv semi-definiter Operator. Ein selbstadjungierter linearer Operator $A: H \to H$ heißt positiv semi-definit[2], wenn die folgende Relation gültig ist

$$\forall h \in H: \qquad \big(A h \big| h\big)_H \geq 0.$$

[2] *Bezeichnung.* In Übereinstimmung mit dem Spezialfall einer Matrix wird im Folgenden die Bezeichnung positiv semi-definit verwendet; gebräuchlich sind auch die Bezeichnungen nicht-negativer Operator oder positiver Operator.

2.5 Darstellung eines kompakten Operators

Vorbemerkung. Der Begriff des kompakten Operators wird im Zusammenhang mit Spurklasse-Operatoren zur Darstellung von Gauß-Maßen und Wiener-Prozessen benötigt. Im Folgenden wird zunächst an die Spektraleigenschaften kompakter Operatoren und insbesondere an den Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren erinnert. Weiters wird ein Resultat zur Darstellung kompakter Operatoren mittels Singulärwerten und Orthonormalsystemen angegeben; dieses macht die Analogien zum endlich-dimensionalen Fall besonders deutlich.

Kompakter Operator. Es seien $(H_1, \|\cdot\|_{H_1}, (\cdot|\cdot)_{H_1})$ und $(H_2, \|\cdot\|_{H_2}, (\cdot|\cdot)_{H_2})$ Hilbert-Räume (bzw. allgemeiner Banach-Räume). Ein linearer Operator $A: H_1 \to H_2$ heißt kompakt, wenn das Bild einer beschränkten Teilmenge von H_1 eine in H_2 präkompakte Menge[3] ist; dies ist gleichbedeutend damit, daß jede in H_1 beschränkte Folge eine Teilfolge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt, deren Bildfolge $(A\,h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in H_2 konvergiert. Ein kompakter Operator ist insbesondere stetig.[4]

Spektraleigenschaften kompakter Operatoren. Im Fall eines auf einem Hilbert-Raum definierten kompakten Operators $A: H \to H$ kann man folgende Aussagen treffen.

(i) Ist der zugrundeliegende Hilbert-Raum unendlich-dimensional, so ist Null ein Element des Spektrums
$$\dim(H) = \infty \quad \Longrightarrow \quad 0 \in \text{Spektrum}(A)\,.$$

(ii) Die Menge $\text{Spektrum}(A)\setminus\{0\}$ ist höchstens abzählbar; jedes Element $\lambda \in \text{Spektrum}(A)\setminus\{0\}$ ist ein Eigenwert von A und der zugehörige Eigenraum ist endlich-dimensional.

(iii) Das Spektrum von A kann nur Null als Häufungspunkt besitzen.

Erklärung. Siehe WERNER (2011), Satz VI.2.5. ◇

[3] *Bemerkung.* Es bezeichne X einen normierten (oder allgemeiner topologischen) Raum.

(i) Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von M eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

(ii) Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt präkompakt oder relativ kompakt, wenn der Abschluß $\overline{M} \subseteq X$ eine kompakte Menge ist.

Eine präkompakte oder kompakte Menge ist insbesondere beschränkt.

[4] *Erklärung.* Es ist zu zeigen, daß die Operator-Norm eines kompakten Operators $A: H_1 \to H_2$ beschränkt ist
$$\exists\, C \geq 0: \qquad \sup\left\{\left\|A\,h_1\right\|_{H_2} : h_1 \in H_1 \text{ mit } \left\|h_1\right\|_{H_1} = 1\right\} \leq C\,.$$
Die Einheitsspäre $\{h_1 \in H_1 : \|h_1\|_{H_1} = 1\}$ ist eine beschränkte Menge. Nach Voraussetzung ist ihr Bild
$$\left\{A\,h_1 : h_1 \in H_1 \text{ mit } \left\|h_1\right\|_{H_1} = 1\right\}$$
eine präkompakte Menge und insbesondere beschränkt; somit existiert eine Konstante mit der gewünschten Eigenschaft.

Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren. Für einen auf einem Hilbert-Raum definierten selbstadjungierten kompakten Operator $A: H \to H$ gilt die folgende Darstellung, wobei $(\lambda_k)_{k\in K}$ die Familie der von Null verschiedenen Eigenwerte von A und $(v_k)_{k\in K}$ die Familie zugehöriger Eigenfunktionen bezeichnet (mit endlicher Indexmenge oder $K = \mathbb{N}$, Angabe der Eigenwerte entsprechend ihrer Vielfachheit, zugehöriger Eigenraum ist endlich-dimensional, kein Beitrag von $0 \in \text{Spektrum}(A)$ zur Summe)

$$A = \sum_{k\in K} \lambda_k(A) \big(\cdot \,\big|\, v_k\big)_H \, v_k \,;$$

diese Eigenwerte bilden eine Nullfolge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, und die Eigenfunktionen ein (nicht notwendigerweise vollständiges) Orthonormalsystem. Weiters gilt die Zerlegung

$$H = \overline{V} \oplus \text{Ke}(A)\,, \qquad V = {}_{\mathbb{R}}\big\langle v_k : k \in K \big\rangle\,,$$

sowie die Identität

$$\big\| A \big\|_{H\leftarrow H} = \sup_{k\in K} \big|\lambda_k(A)\big|\,.$$

Erklärung. Siehe WERNER (2011), Satz VI.3.2. ◇

Singulärwerte. Es seien $(H_1, (\cdot|\cdot)_{H_1}, \|\cdot\|_{H_1})$ und $(H_2, (\cdot|\cdot)_{H_2}, \|\cdot\|_{H_2})$ Hilbert-Räume. Für einen kompakten Operator $A: H_1 \to H_2$ mit adjungiertem Operator $A^*: H_2 \to H_1$ wird durch

$$A^* A : H_1 \longrightarrow H_1$$

ein kompakter Operator definiert, der außerdem selbstadjungiert und positiv semi-definit ist. Aus dem Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren folgt, daß die zugehörigen Eigenwerte die Relation (höchstens abzählbar viele positive Eigenwerte, d.h. endliche Indexmenge oder $K = \mathbb{N}$, Angabe der Eigenwerte entsprechend ihrer Vielfachheit)

$$\lambda\big(A^* A\big) = \Big(\lambda_k\big(A^* A\big)\Big)_{k\in K}\,, \qquad \lambda_1\big(A^* A\big) \geq \lambda_2\big(A^* A\big) \geq \cdots > 0\,,$$

erfüllen. Die Singulärwerte von A entsprechen den Quadratwurzeln (nicht-negative Werte)

$$\sigma(A) = \big(\sigma_k(A)\big)_{k\in K}\,, \qquad \sigma_1(A) = \sqrt{\lambda_1\big(A^* A\big)} \geq \sigma_2(A) = \sqrt{\lambda_2\big(A^* A\big)} \geq \cdots > 0\,.$$

Darstellung eines kompakten Operators. Wie zuvor bezeichne $A: H_1 \to H_2$ einen kompakten Operator und $\sigma(A) = (\sigma_k(A))_{k\in K}$ sämtliche von Null verschiedene Singulärwerte. Die Spektralzerlegung des selbstadjungierten kompakten Operators $A^* A : H_1 \to H_1$ sichert die Existenz eines (nicht notwendigerweise vollständigen) Orthonormalsystemes $(v_k)_{k\in K}$ in H_1, welches aus Eigenfunktionen von $A^* A$ besteht. Mit dem Orthonormalsystem

$$(w_k)_{k\in K} = \big(\tfrac{1}{\sigma_k(A)}\, A\, v_k\big)_{k\in K}$$

in H_2 ist dann folgende Darstellung gültig (Konvergenz der Reihe bezüglich Operatornorm)

$$A = \sum_{k\in K} \big(\,\cdot\,\big|v_k\big)_{H_1} A\, v_k = \sum_{k\in K} \sigma_k(A) \big(\,\cdot\,\big|v_k\big)_{H_1} w_k\,.$$

Erklärung. Mittels der Anwendung des Spektralsatzes auf den selbstadjungierten kompakten Operator $A^* A : H_1 \to H_1$ folgt die Existenz eines Orthonormalsystemes $(v_k)_{k\in K}$ in H_1, sodaß

$$A^* A = \sum_{k\in K} \lambda_k\big(A^* A\big) \big(\,\cdot\,\big|v_k\big)_{H_1} v_k = \sum_{k\in K} \big(\sigma_k(A)\big)^2 \big(\,\cdot\,\big|v_k\big)_{H_1} v_k\,;$$

insbesondere folgt daraus die Identität

$$A^* A\, v_k = \big(\sigma_k(A)\big)^2 v_k\,, \qquad k\in K\,.$$

Wie eine einfache Rechnung zeigt, bildet die durch $(w_k)_{k\in K} = (\frac{1}{\sigma_k(A)}\, A\, v_k)_{k\in K}$ definierte Familie ein Orthonormalsystem in H_2, (verwende Definition des adjungierten Operators, Eigenrelation und Orthogonalität)

$$\begin{aligned}
\big(w_k\big|w_\ell\big)_{H_2} &= \tfrac{1}{\sigma_k(A)\,\sigma_\ell(A)} \big(A\, v_k\big|A\, v_\ell\big)_{H_2}\\
&= \tfrac{1}{\sigma_k(A)\,\sigma_\ell(A)} \big(A^* A\, v_k\big|v_\ell\big)_{H_2}\\
&= \tfrac{(\sigma_k(A))^2}{\sigma_k(A)\,\sigma_\ell(A)} \big(v_k\big|v_\ell\big)_{H_2}\\
&= \delta_{k\ell}\,, \qquad k,\ell\in K\,.
\end{aligned}$$

Jedes Element $h_1 \in H_1$ läßt sich wie folgt darstellen (Ergänzung von $(v_k)_{k\in K}$ zu vollständigem Orthonormalsystem $(v_k)_{k\in\widetilde{K}}$ von H_1)

$$h_1 = \sum_{k\in K} \big(h_1\big|v_k\big)_{H_1} v_k + \widetilde{h}_1\,, \qquad \widetilde{h}_1 \in \mathrm{Ke}\big(A^* A\big)\,;$$

man beachte, daß der Kern von $A^* A$ mit dem Kern von A übereinstimmt, denn

$$\begin{aligned}
A^* A\,\widetilde{h}_1 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \big(A^* A\,\widetilde{h}_1\big|\widetilde{h}_1\big)_{H_1} = 0\\
&\Longrightarrow \quad \big\|A\,\widetilde{h}_1\big\|_{H_1}^2 = \big(A\,\widetilde{h}_1\big|A\,\widetilde{h}_1\big)_{H_1} = 0\\
&\Longrightarrow \quad A\,\widetilde{h}_1 = 0\,,\\
A\,\widetilde{h}_1 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad A^* A\,\widetilde{h}_1 = 0\,.
\end{aligned}$$

Bei Anwendung von A erhält man die gewünschte Relation (verwende $A\,\widetilde{h}_1 = 0$)

$$A\, h_1 = \sum_{k\in K} \big(h_1\big|v_k\big)_{H_1} A\, v_k\,;$$

mittels $(w_k)_{k\in K} = (\frac{1}{\sigma_k(A)}\, A\, v_k)_{k\in K}$ zeigt sich außerdem die Konvergenz der Reihe (verwende Orthogonalität, wie zuvor Ergänzung von $(v_k)_{k\in K}$ zur vollständigem Orthonormalsystem

$(v_k)_{k\in\widetilde{K}}$, höchstens abzählbare viele Summanden verschieden von Null)

$$\begin{aligned}\|A\,h_1\|_{H_2}^2 &= \Big\|\sum_{k\in K}\sigma_k(A)\,\big(h_1\big|v_k\big)_{H_1}\,w_k\Big\|_{H_2}^2\\ &= \sum_{k\in K}\big(\sigma_k(A)\big)^2\big|\big(h_1\big|v_k\big)_{H_1}\big|^2\\ &\leq \max\Big\{\big(\sigma_k(A)\big)^2 : k\in K\Big\}\sum_{k\in\widetilde{K}}\big|\big(h_1\big|v_k\big)_{H_1}\big|^2\\ &= \max\Big\{\big(\sigma_k(A)\big)^2 : k\in K\Big\}\,\|h_1\|_{H_1}^2 < \infty\,,\end{aligned}$$

vgl. Charakterisierung und Existenz von vollständigen Orthonormalsystemen. ◇

Singulärwertzerlegung. Im Spezialfall endlich-dimensionaler Hilbert-Räume entspricht ein linearer Operator $A: H_1 = \mathbb{R}^{d_1} \to H_2 = \mathbb{R}^{d_2}$ einer Matrix[5] $A \in \mathbb{R}^{d_2\times d_1}$, und es ergibt sich die Singulärwertzerlegung (Eigenwertzerlegung $V^T A^* A\,V = \Lambda \in \mathbb{R}^{d_1\times d_1}$ mit orthogonaler Matrix $V = (v_1|\ldots|v_{d_1}) \in \mathbb{R}^{d_1\times d_1}$ und positiv semi-definiter Diagonalmatrix $\Lambda \in \mathbb{R}^{d_1\times d_1}$, Einschränkung auf positive Singulärwerte $\sigma_1(A) = \sqrt{\lambda_1(A^*A)} \geq \cdots \geq \sigma_K(A) = \sqrt{\lambda_K(A^*A)} > 0$, Familie orthonormaler Vektoren $(w_k)_{k=1}^K = (\frac{1}{\sigma_k(A)}\,A\,v_k)_{k=1}^K$ in $\mathbb{R}^{d_2}$)

$$A = \big(w_1\big|\ldots\big|w_K\big)\,\mathrm{diag}\big(\sigma_1(A),\ldots,\sigma_K(A)\big)\,\big(v_1\big|\ldots\big|v_K\big)^T\,.$$

Erklärung (Vgl. obige Überlegungen). Der Spektralsatz besagt, daß die positiv semi-definite symmetrische Matrix $A^* A \in \mathbb{R}^{d_1\times d_1}$ nicht-negative reelle Eigenwert besitzt und zugehörige Eigenvektoren existieren, welche eine Orthonormalbasis bilden

$$\begin{gathered}A^* A\,v_k = \lambda_k(A^*A)\,v_k\,,\qquad k\in\{1,\ldots,d_1\}\,,\\ A^*A = V\Lambda V^T\,,\\ \Lambda = \mathrm{diag}\big(\lambda_1(A^*A),\ldots,\lambda_{d_1}(A^*A)\big)\in\mathbb{R}^{d_1\times d_1}\,,\\ \lambda_1(A^*A) = \big(\sigma_1(A)\big)^2 \geq \cdots \geq \lambda_{d_1}(A^*A) = \big(\sigma_{d_1}(A)\big)^2 \geq 0\,,\\ V = \big(v_1\big|\ldots\big|v_{d_1}\big)\in\mathbb{R}^{d_1\times d_1}\,,\qquad V V^T = I\,.\end{gathered}$$

Man beachte, daß sich mittels der Darstellung eines Vektors bezüglich der Orthonormalbasis folgende äquivalente Relation ergibt

$$\begin{gathered}z = \sum_{k=1}^{d_1}\big(z\big|v_k\big)_{\mathbb{R}^{d_1}}\,v_k \in \mathbb{R}^{d_1}\,,\\ A^*A\,z = \sum_{k=1}^{d_1}\big(z\big|v_k\big)_{\mathbb{R}^{d_1}}\,A^*A\,v_k = \sum_{k=1}^{d_1}\big(\sigma_k(A)\big)^2\,\big(z\big|v_k\big)_{\mathbb{R}^{d_1}}\,v_k\,,\\ A^*A = \sum_{k=1}^{d_1}\big(\sigma_k(A)\big)^2\,\big(\cdot\,\big|v_k\big)_{\mathbb{R}^{d_1}}\,v_k\,;\end{gathered}$$

[5] *Bemerkung.* Mittels Zerlegung in Realteil und Imaginärteil kann man den komplexen Fall auf den reellen Fall zurückführen.

da nur die positiven Eigenwerte bzw. Singulärwerte eine Beitrag liefern, wird die Indexmenge entsprechend eingeschränkt

$$\sigma_1(A) \geq \cdots \geq \sigma_K(A) > 0\,, \qquad \sigma_{K+1}(A) = \cdots = \sigma_{d_1}(A) = 0\,,$$
$$A^* A = \sum_{k=1}^{K} \big(\sigma_k(A)\big)^2 \big(\cdot\,\big|\,v_k\big)_{\mathbb{R}^{d_1}}\, v_k\,.$$

Analog zu den obigen Überlegungen zeigt eine einfache Rechnung die Orthonormalität der durch (Wohldefiniertheit wegen $\sigma_k(A) > 0$ für $k \in \{1,\dots,K\}$)

$$w_k = \tfrac{1}{\sigma_k(A)}\, A\, v_k \in \mathbb{R}^{d_2}\,, \qquad k \in \{1,\dots,K\}\,,$$

definierten Vektoren; im Allgemeinen erhält man jedoch keine Orthonormalbasis. Wegen

$$\begin{aligned}
\forall\, k \in \{1,\dots,K\}: \qquad A^* A\, v_k = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \big(A^* A\, v_k\big|\, v_k\big)_{\mathbb{R}^{d_1}} = 0\\
&\Longrightarrow \quad \big\|A\, v_k\big\|_{\mathbb{R}^{d_1}}^2 = \big(A\, v_k\big|\, A\, v_k\big)_{\mathbb{R}^{d_1}} = 0\\
&\Longrightarrow \quad A\, v_k = 0\,,\\
A\, v_k = 0 \quad &\Longrightarrow \quad A^* A\, v_k = 0\,,
\end{aligned}$$

ergeben sich mit der zuvor angegebenen Darstellung eines Elementes $z \in \mathbb{R}^{d_1}$ die Relationen

$$z = \sum_{k=1}^{d_1} \big(z\big|\, v_k\big)_{\mathbb{R}^{d_1}}\, v_k = \sum_{k=1}^{K} \big(z\big|\, v_k\big)_{\mathbb{R}^{d_1}}\, v_k + \sum_{k=K+1}^{d_1} \big(z\big|\, v_k\big)_{\mathbb{R}^{d_1}}\, v_k\,,$$
$$A\, v_k = \sigma_k(A)\, w_k\,, \quad \sigma_k(A) > 0\,, \quad k \in \{1,\dots,K\}\,, \qquad A\, v_k = 0\,, \quad k \in \{K+1,\dots,d_1\}\,,$$
$$A\, z = \sum_{k=1}^{d_1} \big(z\big|\, v_k\big)_{\mathbb{R}^{d_1}}\, A\, v_k = \sum_{k=1}^{K} \sigma_k(A) \big(z\big|\, v_k\big)_{\mathbb{R}^{d_1}}\, w_k\,,$$
$$A = \sum_{k=1}^{K} \big(\cdot\,\big|\, v_k\big)_{\mathbb{R}^{d_1}}\, A\, v_k = \sum_{k=1}^{K} \sigma_k(A) \big(\cdot\,\big|\, v_k\big)_{\mathbb{R}^{d_1}}\, w_k\,.$$

Bei Verwendung kompakter Matrix-Schreibweise (Dimensionsüberlegung)

$$A^* A = \sum_{k=1}^{K} \big(\sigma_k(A)\big)^2 \big(\cdot\,\big|\, v_k\big)_{\mathbb{R}^{d_1}}\, v_k \quad \Longleftrightarrow \quad A^* A = V \Lambda V^T\,,$$
$$A = \sum_{k=1}^{K} \sigma_k(A) \big(\cdot\,\big|\, v_k\big)_{\mathbb{R}^{d_1}}\, w_k \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{A}_{d_2 \times d_1} = \underbrace{\big(w_1\big|\dots\big|w_K\big)}_{d_2 \times K}\, \underbrace{\operatorname{diag}\big(\sigma_1(A),\dots,\sigma_K(A)\big)}_{K \times K}\, \underbrace{\big(v_1\big|\dots\big|v_K\big)^T}_{K \times d_1}\,,$$

zeigt dies die Behauptung. ◇

2.6 Spurklasse- und Hilbert–Schmidt-Operatoren

Vorbemerkung. Kompakte Operatoren, deren Singulärwerte summierbar sind, führen auf Spurklasse-Operatoren und bilden einen Banach-Raum; bei quadratischer Summierbarkeit ergeben sich Hilbert–Schmidt-Operatoren und insbesondere ein Hilbert-Raum. Ein Gauß-Maß auf einem separablen Hilbert-Raum ist durch einen positiv semi-definiten selbstadjungierten Spurklasse-Operatoren charakterisiert und folglich auch der zugehörige Wiener-Prozeß.

Neumann–Schatten-Klassen. Es bezeichnen $(H_1, \|\cdot\|_{H_1}, (\cdot|\cdot)_{H_1})$ und $(H_2, \|\cdot\|_{H_2}, (\cdot|\cdot)_{H_2})$ zwei Hilbert-Räume. Für Exponenten $p \in [1,\infty]$ heißen die normierten Räume aller kompakten Operatoren, deren positive Singulärwerte $\sigma(A) = (\sigma_k(A))_{k\in K}$ summierbar bzw. beschränkt sind, Neumann–Schatten-Klassen (Indexmenge K ist endlich oder $K = \mathbb{N}$, eventuell Ergänzung mit Null um $K = \mathbb{N}$ zu erreichen)

$$\mathscr{S}_p(H_1, H_2) = \big\{A : H_1 \to H_2 \text{ kompakt und } \sigma(A) \in \ell^p(\mathbb{N})\big\},$$

$$\big\|A\big\|_{\mathscr{S}_p} = \big\|\sigma(A)\big\|_{\ell^p} = \left(\sum_{k\in K} \big(\sigma_k(A)\big)^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad A \in \mathscr{S}_p(H_1, H_2);$$

man beachte, daß ein Singulärwert eine nicht-negative reelle Zahl ist und daher mit dem Absolutbetrag übereinstimmt. Die Neumann–Schatten-Klassen bilden Banach-Räume; im Spezialfall $p = 2$ ergibt sich insbesondere ein Hilbert-Raum, vgl. Definition des Raumes der Hilbert–Schmidt-Operatoren und entsprechendes Resultat. Stimmen die zugrundeliegenden Hilbert-Räume überein, setzt man wie üblich (wobei $p \in [1,\infty]$)

$$\mathscr{S}_p(H) = \big\{A : H \to H \text{ kompakt und } \sigma(A) \in \ell^p(\mathbb{N})\big\}.$$

Die folgende Relation (wobei $p \in (1,\infty)$, konjugierte Exponenten)

$$\left(\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{p^*} = 1: \quad A_1 \in \mathscr{S}_p(H),\ A_2 \in \mathscr{S}_{p^*}(H)\right) \quad \Longrightarrow \quad A_1 A_2 \in \mathscr{S}_1(H)$$

zeigt, daß der Banach-Raum $\mathscr{S}_{p^*}(H)$ dem Dualraum von $\mathscr{S}_p(H)$ entspricht (Identifikation mittels eines isometrischen Isomorphismus).

Spurklasse- und Hilbert–Schmidt-Operatoren. Im Fall $p = 1$ spricht man vom Raum der Spurklasse-Operatoren[6] und der Spur-Norm

$$\big\|A\big\|_{\mathscr{S}_1} = \sum_{k\in K} \sigma_k(A), \qquad A \in \mathscr{S}_1(H_1, H_2);$$

falls $p = 2$, spricht man vom Raum der Hilbert–Schmidt-Operatoren und der Hilbert–Schmidt-Norm

$$\big\|A\big\|_{\mathscr{S}_2} = \sqrt{\sum_{k\in K} \big(\sigma_k(A)\big)^2}, \qquad A \in \mathscr{S}_2(H_1, H_2).$$

[6] *Bemerkung.* In WERNER (2011) wird vorwiegend die Bezeichnung *nuklearer Operator* verwendet.

Vorbemerkung. Die Spur einer quadratischen Matrix

$$A = \big(a_{k\ell}\big)_{k,\ell=1}^{d} \in \mathbb{C}^{d\times d}$$

ist durch die Summe der Diagonalelemente definiert

$$\operatorname{Spur}(A) = \sum_{k=1}^{d} a_{kk} \in \mathbb{C}\,;$$

dies zeigt insbesondere die Linearität der Spur (wobei $A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{d\times d}$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$)

$$\operatorname{Spur}\big(c_1 A_1 + c_2 A_2\big) = c_1 \operatorname{Spur}(A_1) + c_2 \operatorname{Spur}(A_2)\,.$$

Da sich die Diagonalelemente einer Matrix mittels der Standardbasisvektoren $(e_k)_{k=1}^{d}$ ergeben, gilt die Identität

$$\operatorname{Spur}(A) = \sum_{k=1}^{d} \big(A\,e_k \big| e_k\big)_{\mathbb{C}^d}\,.$$

Aus der zuvor angegebenen Singulärwertzerlegung (spezielle Wahl der orthonormalen Vektoren $(v_k)_{k=1}^{K}$ und $(w_k)_{k=1}^{K}$, wobei $\sigma_1(A) \geq \cdots \geq \sigma_K(A) > 0$ und $\sigma_{K+1}(A) = \cdots = \sigma_d(A) = 0$)

$$A = \sum_{k=1}^{K} \sigma_k(A)\,\big(\,\cdot\,\big| v_k\big)_{\mathbb{C}^d}\, w_k$$

folgen die Relationen (Parseval'sche Identität, Vertauschen der Summationsreihenfolge, Ergänzung zu Orthonormalbasen $(v_k)_{k=1}^{d}$ und $(w_k)_{k=1}^{d}$, kein Beitrag da entsprechende Singulärwerte gleich Null)

$$A\,e_k = \sum_{\ell=1}^{K} \sigma_\ell(A)\,\big(e_k\big|v_\ell\big)_{\mathbb{C}^d}\, w_\ell\,,$$

$$\big(A\,e_k\big|e_k\big)_{\mathbb{C}^d} = \sum_{\ell=1}^{K} \sigma_\ell(A)\,\big(e_k\big|v_\ell\big)_{\mathbb{C}^d}\,\big(w_\ell\big|e_k\big)_{\mathbb{C}^d} = \sum_{\ell=1}^{d} \sigma_\ell(A)\,\big(e_k\big|v_\ell\big)_{\mathbb{C}^d}\,\big(w_\ell\big|e_k\big)_{\mathbb{C}^d}\,,$$

$$\operatorname{Spur}(A) = \sum_{k=1}^{d} \big(A\,e_k\big|e_k\big)_{\mathbb{C}^d} = \sum_{k,\ell=1}^{d} \sigma_\ell(A)\,\big(e_k\big|v_\ell\big)_{\mathbb{C}^d}\,\big(w_\ell\big|e_k\big)_{\mathbb{C}^d}\,,$$

$$\sum_{k=1}^{d} \big(v_\ell\big|e_k\big)_{\mathbb{C}^d}\big(e_k\big|w_\ell\big)_{\mathbb{C}^d} = \big(v_\ell\big|w_\ell\big)_{\mathbb{C}^d}\,, \qquad \sum_{k=1}^{d} \big(e_k\big|v_\ell\big)_{\mathbb{C}^d}\big(w_\ell\big|e_k\big)_{\mathbb{C}^d} = \big(w_\ell\big|v_\ell\big)_{\mathbb{C}^d}\,,$$

$$\operatorname{Spur}(A) = \sum_{k=1}^{d} \big(A\,e_k\big|e_k\big)_{\mathbb{C}^d} = \sum_{k=1}^{d} \sigma_k(A)\,\big(w_k\big|v_k\big)_{\mathbb{C}^d}\,;$$

dies zeigt außerdem, daß in der ursprünglichen Relation die Standardbasis durch eine beliebige Orthonormalbasis $(z_k)_{k=1}^{d}$ ersetzt werden kann

$$\operatorname{Spur}(A) = \sum_{k=1}^{d} \sigma_k(A)\,\big(w_k\big|v_k\big)_{\mathbb{C}^d} = \sum_{k=1}^{d} \big(A\,z_k\big|z_k\big)_{\mathbb{C}^d}\,.$$

Das Lemma von Schur stellt sicher, daß eine Orthogonalbasis $(\widetilde{e}_k)_{k=1}^d$ aus Eigenvektoren und Hauptvektoren existiert, bezüglich welcher die Matrix Dreiecksgestalt hat (Eigenwerte werden wie bisher entsprechend der Vielfachheit wiederholt)

$$\begin{gathered}\widetilde{E}^* A \widetilde{E} = R\,,\\ \widetilde{E} = \big(\widetilde{e}_1\big|\dots\big|\widetilde{e}_d\big)\,, \qquad \widetilde{E}^*\widetilde{E} = I\,,\\ R = \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & * & * & * \\ & \lambda_2(A) & * & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_d(A) \end{pmatrix};\end{gathered}$$

für diese spezielle Wahl gilt somit (letzte Relation geeignet für Erweiterung auf unendlich-dimensionalen Fall)

$$\big(A\,\widetilde{e}_k\big|\widetilde{e}_k\big)_{\mathbb{C}^d} = \lambda_k(A)\,, \qquad \mathrm{Spur}(A) = \sum_{k=1}^d \big(A\,\widetilde{e}_k\big|\widetilde{e}_k\big)_{\mathbb{R}^d} = \sum_{k=1}^d \lambda_k(A)\,.$$

Im Wesentlichen[7] zeigt dies $|\lambda_k(A)| \leq \sigma_k(A)$ für $k \in \{1,\dots,K\}$, genauer (verwende Ungleichung von Cauchy-Schwarz und Normierung $|(v_k|w_k)_{\mathbb{R}^d}| \leq \|v_k\|_{\mathbb{R}^d}\|w_k\|_{\mathbb{R}^d} = 1$)

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{k=1}^d \lambda_k(A) = \sum_{k=1}^d \sigma_k(A)\big(w_k\big|v_k\big)_{\mathbb{C}^d}\,, \qquad \big|\mathrm{Spur}(A)\big| \leq \sum_{k=1}^d \sigma_k(A) = \big\|A\big\|_{\mathscr{S}_1}\,.$$

---

[7] *Bemerkung.* Bei einer Diagonalmatrix entsprechen sich Eigenwerte bzw. Singulärwerte von A und Eigenwerte von A^*A

$$\lambda_k\big(A^*A\big) = \big|\lambda_k(A)\big|^2, \quad \sigma_k(A) = \big|\lambda_k(A)\big|, \qquad k \in \{1,\dots d\}\,,$$

und offensichtlich gilt die Abschätzung

$$\big|\lambda_k(A)\big| \leq \sigma_k(A)\,, \qquad k \in \{1,\dots d\}\,.$$

Betrachtet man beispielsweise eine Matrix spezieller Form und bestimmt die Quadrate der zugehörigen Singulärwerte (wobei $c \in \mathbb{C}$ mit $c \neq 0$)

$$\begin{gathered} A = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1(A) = c = \lambda_2(A)\,, \qquad \mathrm{Spur}(A) = \lambda_1(A) + \lambda_2(A) \in \mathbb{C}\,,\\ A^*A = \begin{pmatrix} \overline{c} & 0 \\ 1 & \overline{c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |c|^2 & \overline{c} \\ c & |c|^2+1 \end{pmatrix},\\ \det\big(A^*A - \lambda I\big) = \big(|c|^2 - \lambda\big)\big(|c|^2 + 1 - \lambda\big) - |c|^2 = \lambda^2 - \big(2\,|c|^2+1\big)\lambda + |c|^4\,,\\ \big(\sigma_1(A)\big)^2 = \lambda_1\big(A^*A\big) = |c|^2 + \tfrac{1}{2} + \sqrt{|c|^2 + \tfrac{1}{4}} \geq 0\,,\\ \big(\sigma_2(A)\big)^2 = \lambda_2\big(A^*A\big) = |c|^2 + \tfrac{1}{2} - \sqrt{|c|^2 + \tfrac{1}{4}} \geq 0\,,\end{gathered}$$

sieht man jedoch, daß die Abschätzung $\big|\lambda_k(A)\big| \leq \sigma_k(A)$ im Allgemeinen *nicht* gültig ist

$$\begin{gathered}\big|\lambda_1(A)\big|^2 = |c|^2 \leq \big(\sigma_1(A)\big)^2\,,\\ |c|^2 + \tfrac{1}{2} - \sqrt{|c|^2 + \tfrac{1}{4}} < |c|^2 \quad\Longrightarrow\quad \big|\lambda_2(A)\big|^2 = |c|^2 \not\leq \big(\sigma_2(A)\big)^2;\end{gathered}$$

Die für Matrizen angegebenen Überlegungen lassen sich auf Spurklasse-Operatoren erweitern.

Spur. Es sei $A \in \mathscr{S}_1(H)$ ein Spurklasse-Operator mit zugehörigen von Null verschiedenen Eigenwerten $(\lambda_k(A))_{k\in K}$. Die Spur ist durch die Summe der Eigenwerte definiert

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{k\in K} \lambda_k(A)\,;$$

man beachte, daß im Allgemeinen die Eigenwerte und somit die Spur eines Operators komplexe Zahlen sind, vgl. zuvor angegebene Bemerkung. Das folgende Resultat besagt, daß die Spur eines Spurklasse-Operators wohldefiniert ist und ein stetiges Funktional definiert.

Resultat zur Spur.

(i) Für Spurklasse-Operatoren gilt die Abschätzung

$$\big|\mathrm{Spur}(A)\big| = \Big|\sum_{k\in K} \lambda_k(A)\Big| \leq \|A\|_{\mathscr{S}_1} = \sum_{k\in K} \sqrt{\lambda_k\big(A^* A\big)}\,, \qquad A \in \mathscr{S}_1(H)\,;$$

insbesondere folgt daraus die Wohldefiniertheit des linearen Funktionales (Spur-Abbildung)

$$\mathscr{S}_1(H) \longrightarrow \mathbb{C} : A \longmapsto \mathrm{Spur}(A) = \sum_{k\in K} \lambda_k(A)$$

sowie die Stetigkeit bezüglich der Spur-Norm, d.h. es gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall A \in \mathscr{S}_1(H) \text{ mit } \|A\|_{\mathscr{S}_1} < \delta : \qquad \mathrm{Spur}(A) < \varepsilon\,.$$

(ii) Für jedes vollständige Orthonormalsystem $(z_k)_{k\in\widetilde{K}}$ in H gilt

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{k\in\widetilde{K}} \big(A z_k \big| z_k\big)_H\,, \qquad A \in \mathscr{S}_1(H)\,;$$

was die Invarianz der Spur bei Transformation auf ein anderes vollständiges Orthonormalsystem zeigt.

Erklärung. Siehe obige Überlegungen; zusätzliche Abschätzungen zur absoluten Konvergenz der Reihen ist in DENK (2014), Beweisskizze zu Satz B.8, angegeben. ◇

---

stattdessen gilt die Relation ($K = 2$ entspricht hier der Vielfachheit des Eigenwertes)

$$\alpha = |c|^2 + \tfrac{1}{2}\,, \quad \beta = |c|^2 + \tfrac{1}{4}\,,$$
$$\left(\sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}} + \sqrt{\alpha - \sqrt{\beta}}\right)^2 = 2\,\alpha + 2\sqrt{\alpha^2 - \beta} = 2\,|c|^2 + 1 + 2\sqrt{|c|^4 + |c|^2} \geq 4|c|^2$$
$$\Longrightarrow \quad \big|\lambda_1(A)\big| + \big|\lambda_2(A)\big| = 2\,|c| \leq \sigma_1(A) + \sigma_2(A) = \sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}} + \sqrt{\alpha - \sqrt{\beta}}\,,$$
$$\sum_{k=1}^{K} \big|\lambda_k(A)\big| \leq \sum_{k=1}^{K} \sigma_k(A)\,.$$

Spezialfall. Im Speziallfall eines positiv semi-definiten selbstadjungierten Spurklasse-Operators stimmen die Eigenwerte mit den Singulärwerten überein, und somit vereinfacht sich die Relation für die Spur wie folgt (beachte $A^* A = A^2$, für beliebiges vollständiges Orthonormalsystem $(z_k)_{k\in\widetilde{K}}$ in H)

$$\begin{gathered} A \in \mathscr{S}_1(H) \text{ mit } A^* = A \text{ und } \big(A\,h\big|h\big)_H \geq 0 \text{ für alle } h \in H: \\ \lambda_k(A) = \sigma_k(A) = \sqrt{\lambda_k\big(A^* A\big)} \geq 0\,, \quad k \in K\,, \\ \operatorname{Spur}(A) = \sum_{k\in\widetilde{K}} \big(A\,z_k\big|z_k\big)_H = \sum_{k\in K} \lambda_k(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sigma_k(A) = \big\|A\big\|_{\mathscr{S}_1}\,. \end{gathered}$$

Ein positiv semi-definiter selbstadjungierte Operator ist also genau dann ein Spurklasse-Operator, wenn folgende Bedingung erfüllt ist

$$\begin{gathered} A: H \to H \text{ positiv semi-definit und selbstadjungiert}: \\ A \in \mathscr{S}_1(H) \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\exists \text{ vollständiges Orthonormalsystem } (z_k)_{k\in\widetilde{K}}: \quad \sum_{k\in\widetilde{K}} \big(A\,z_k\big|z_k\big)_H < \infty\Big). \end{gathered}$$

Vorbemerkung. Das folgende Resultat charakterisiert den Zusammenhang zwischen Spurklasse- und Hilbert–Schmidt-Operatoren.

Resultat zu Spurklasse- und Hilbert–Schmidt-Operatoren. Für einen kompakten Operator $A: H_1 \to H_2$ zwischen Hilbert-Räumen gelten folgende äquivalente Aussagen (mit beliebigem vollständigem Orthonormalsystem $(z_k)_{k\in\widetilde{K}}$ in H_1)

$$\begin{aligned} A \in \mathscr{S}_2(H_1,H_2) \quad &\Longleftrightarrow \quad A^* A \in \mathscr{S}_1(H_1) \\ &\Longleftrightarrow \quad \big\|A\big\|_{\mathscr{S}_2}^2 = \sum_{k\in\widetilde{K}} \big\|A\,z_k\big\|_{H_2}^2 = \big\|A^* A\big\|_{\mathscr{S}_1} < \infty\,. \end{aligned}$$

Für den adjungierten Operator gilt dann $A^* \in \mathscr{S}_2(H_2,H_1)$ sowie

$$\big\|A^*\big\|_{\mathscr{S}_2} = \big\|A\big\|_{\mathscr{S}_2}\,, \qquad \big\|A\,A^*\big\|_{\mathscr{S}_1} = \big\|A^* A\big\|_{\mathscr{S}_1}\,.$$

Erklärung. Offensichtlich folgt aus (beachte, daß $A^* A$ positiv semi-definit ist und somit sämtliche Eigenwerte nicht-negativ sind)

$$\sqrt{\lambda_k\big((A^* A)^* (A^* A)\big)} = \sqrt{\lambda_k\big((A^* A)^2\big)} = \lambda_k(A^* A)\,, \quad k \in K\,,$$

die Gleichheit der Normen und somit die Äquivalenz

$$\begin{gathered} \big\|A\big\|_{\mathscr{S}_2}^2 = \sum_{k\in K} \lambda_k\big(A^* A\big) = \big\|A^* A\big\|_{\mathscr{S}_1}\,, \\ \big\|A\big\|_{\mathscr{S}_2}^2 < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \big\|A^* A\big\|_{\mathscr{S}_1} < \infty\,. \end{gathered}$$

Aus der zuvor angegebenen Bemerkungen ergibt sich zudem die Identität ($A^* A$ erfüllt Voraussetzung selbstadjungiert und positiv semi-definit)

$$\|A\|_{\mathscr{S}_2}^2 = \|A^* A\|_{\mathscr{S}_1} = \operatorname{Spur}(A^* A) = \sum_{k\in\widetilde{K}} \left(A^* A z_k \middle| z_k\right)_H = \sum_{k\in\widetilde{K}} \|A z_k\|_H^2 .$$

Mittels Parseval'scher Identität erhält man die Relation (mit weiterem vollständigen Orthonormalsystem $(\widetilde{z}_k)_{k\in\widetilde{K}}$, Vertauschen der Summationsreihenfolge wegen absoluter Konvergenz zulässig)

$$\begin{aligned}
\|A z_k\|_H^2 &= \sum_{\ell\in\widetilde{K}} \left|\left(A z_k \middle| \widetilde{z}_\ell\right)_H\right|^2 = \sum_{\ell\in\widetilde{K}} \left|\left(z_k \middle| A^* \widetilde{z}_\ell\right)_H\right|^2 ,\\
\|A^* \widetilde{z}_\ell\|_H^2 &= \sum_{k\in\widetilde{K}} \left|\left(A^* \widetilde{z}_\ell \middle| z_k\right)_H\right|^2 ,\\
\|A\|_{\mathscr{S}_2}^2 = \|A^* A\|_{\mathscr{S}_1} = \sum_{k\in\widetilde{K}} \|A z_k\|_H^2 &= \sum_{k,\ell\in\widetilde{K}} \left|\left(z_k \middle| A^* \widetilde{z}_\ell\right)_H\right|^2 = \sum_{\ell\in\widetilde{K}} \|A^* \widetilde{z}_\ell\|_H^2 = \|A^*\|_{\mathscr{S}_2}^2 ,
\end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. ◇

Vorbemerkung. Das folgende Resultat besagt, daß der Raum der Hilbert–Schmidt-Operatoren einen separablen Hilbert-Raum bildet. Es sei an die Darstellung eines kompakten Operators $A: H_1 \to H_2$ erinnert (mit speziellen nicht notwendigerweise vollständigen Orthonormalsystemen)

$$A = \sum_{k\in K} \sigma_k(A) \left(v_k \middle| \cdot\right)_{H_1} w_k .$$

Resultat zum Raum der Hilbert–Schmidt-Operatoren. Es seien $(H_1, \|\cdot\|_{H_1}, (\cdot|\cdot)_{H_1})$ sowie $(H_2, \|\cdot\|_{H_2}, (\cdot|\cdot)_{H_2})$ zwei Hilbert-Räume, und es bezeichne $(z_k)_{k\in\widetilde{K}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in H_1 sowie $(\widetilde{z}_\ell)_{\ell\in\widetilde{L}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in H_2.

(i) Versehen mit dem Skalarprodukt und der induzierten Norm (konsistente Definition)

$$\begin{aligned}
\left(A_1 \middle| A_2\right)_{\mathscr{S}_2} &= \sum_{k\in\widetilde{K}} \left(A_1 z_k \middle| A_2 z_k\right)_{H_2} = \operatorname{Spur}(A_2^* A_1) , &\qquad A_1, A_2 \in \mathscr{S}_2(H_1, H_2) ,\\
\|A\|_{\mathscr{S}_2} &= \sqrt{\sum_{k\in\widetilde{K}} \|A z_k\|_{H_2}^2} , &\qquad A \in \mathscr{S}_2(H_1, H_2) ,
\end{aligned}$$

bildet der Raum der Hilbert–Schmidt-Operatoren $\mathscr{S}_2(H_1, H_2)$ einen Hilbert-Raum.

(ii) Durch die folgende Definition ergibt sich ein vollständiges Orthonormalsystem von $\mathscr{S}_2(H_1, H_2)$

$$\left(\widetilde{z}_\ell \otimes z_k\right)_{(k,\ell)\in\widetilde{K}\times\widetilde{L}} = \left(\left(z_k \middle| \cdot\right)_{H_1} \widetilde{z}_\ell\right)_{(k,\ell)\in\widetilde{K}\times\widetilde{L}} ;$$

insbesondere ist der Raum der Hilbert–Schmidt-Operatoren separabel.

Erklärung.

(i) *Vollständigkeit.* Der Nachweis der Vollständigkeit Hilbert–Schmidt-Raumes beruht auf folgenden Überlegungen. Es bezeichne $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von beschränkten linearen Operatoren, welche bezüglich der Hilbert–Schmidt-Norm eine Cauchy-Folge bilden

$$A_k \in \mathscr{S}_2(H_1, H_2) \subset L(H_1, H_2)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,, \qquad \big\| A_k - A_\ell \big\|_{\mathscr{S}_2} \xrightarrow{k,\ell\to\infty} 0\,;$$

da die betrachtete Folge insbesondere eine Cauchy-Folge in $L(H_1, H_2)$ ist, existiert aufgrund der Vollständigkeit des Raumes $L(H_1, H_2)$ der Limes

$$\exists\, A \in L(H_1, H_2): \qquad \big\| A_k - A \big\|_{H_2 \leftarrow H_1} \xrightarrow{k\to\infty} 0\,.$$

Mittels des Lemmas von Fatou, genauer der Abschätzung (wobei $a_{k\ell} \in \mathbb{R}$ für $k, \ell \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \lim_{\ell\to\infty} \big|a_{k\ell}\big| \leq \liminf_{\ell\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} \big|a_{k\ell}\big|\,,$$

zeigt man, daß dieser Limes auch bezüglich der Hilbert–Schmidt-Norm die gewünschte Eigenschaft hat. Siehe DENK (2014), Lemma B.11.

(ii) *Orthonormalsystem.* Offensichtlich ist ein linearer Operator der Form (mit $(k, \ell) \in \widetilde{K} \times \widetilde{L}$ und $j \in \widetilde{K}$)

$$\begin{gathered}
A_1 = \widetilde{z}_\ell \otimes z_k = \big(z_k \big| \cdot\big)_{H_1} \widetilde{z}_\ell\,, \\
A_1 z_j = \big(z_k \big| z_j\big)_{H_1} \widetilde{z}_\ell = \delta_{jk}\, \widetilde{z}_\ell\,, \qquad \big\| A_1 z_j \big\|_{H_2} = \delta_{jk} \big\| \widetilde{z}_\ell \big\|_{H_2} = \delta_{jk}\,, \\
\big\| A_1 \big\|_{\mathscr{S}_2} = \sqrt{\sum_{j\in\widetilde{K}} \big\| A_1 v_j \big\|_{H_2}^2} = 1\,,
\end{gathered}$$

ein Hilbert–Schmidt-Operator; ebenso ist die Orthogonalität solcher Operatoren (wobei $(k, \ell) \in \widetilde{K} \times \widetilde{L}$ sowie $(\widetilde{k}, \widetilde{\ell}) \in \widetilde{K} \times \widetilde{L}$ und $j \in \widetilde{K}$)

$$\begin{gathered}
A_1 = \big(z_k \big| \cdot\big)_{H_1} \widetilde{z}_\ell\,, \quad A_1 z_j = \delta_{jk}\, \widetilde{z}_\ell\,, \qquad A_2 = \big(z_{\widetilde{k}} \big| \cdot\big)_{H_1} \widetilde{z}_{\widetilde{\ell}}\,, \qquad A_2 z_j = \delta_{j\widetilde{k}}\, \widetilde{z}_{\widetilde{\ell}}\,, \\
\big(A_1 \big| A_2\big)_{\mathscr{S}_2} = \sum_{j\in\widetilde{K}} \big(A_1 z_j \big| A_2 z_j\big)_{H_2} = \delta_{k\widetilde{k}} \big(\widetilde{z}_\ell \big| \widetilde{z}_{\widetilde{\ell}}\big)_{H_2} = \delta_{k\widetilde{k}}\, \delta_{\ell\widetilde{\ell}}\,,
\end{gathered}$$

leicht einzusehen. ◇

Kapitel 3

Grundlagen zu Semigruppen

Inhalt. Bei den betrachteten stochastischen Evolutionsgleichungen wird angenommen, daß der lineare Hauptteil des deterministischen Anteiles ein sektorieller Operator und somit der infinitesimale Erzeuger einer analytischen Semigruppe oder allgemeiner der infinitesimale Erzeuger einer stark-stetigen Semigruppe ist. Erste Grundlagen zur Theorie von Semigruppen auf Banach-Räumen werden im Rahmen des Übungsteiles besprochen, siehe Kapitel 1 in PAZY (1983). Zusätzliche Informationen zu stark-stetigen und analytischen Semigruppen finden sich in LUNARDI (1995), siehe auch HAIRER (2009) und JÜNGEL (2002).[1]

[1] *Bemerkung.* Überlegungen zu stark-stetigen Semigruppen auf Hilbert-Räumen sind auch im Kompendium zur Vorlesung *Spektraltheorie und Anwendungen in der Quantenmechanik* angegeben.

Teil II

Wiener-Prozesse in Hilbert-Räumen

Kapitel 1

Wahrscheinlichkeitsmaße und Zufallsvariablen

Inhalt. Im Folgenden werden grundlegende Resultate zur Gleichheit von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Hilbert-Räumen sowie zu Zufallsvariablen mit Werten in Hilbert-Räumen angegeben.

Überblick. Um eine Verbindung mit DENK (2014) herzustellen, sind die entsprechenden Verweise angegeben.

- Charakterisierung der Borel-σ-Algebra eines separablen Banach-Raumes (Lemma 2.2)
  System der Zylindermengen (Lemma 2.3)
  Gleichheit von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Banach-Raum (Lemma 2.3)
- Charakteristische Funktion (Definition 2.4)
  Zugehöriges Wahrscheinlichkeitsmaß (Satz 2.5)
  Relation für charakteristische Funktionen (Satz 2.5)
  Gleichheit von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Hilbert-Raum (Satz 2.5)
  Abschätzung für Produkte (Lemma 2.8)
- Bochner-Integral und Bochner-Lebesgue-Räume
  Zufallsvariable und induziertes Maß (Definition A.2)
  Erwartungswert (Definition A.2)
  Transformationslemma (Bemerkung A.3)
  Tensorprodukt (Definition 2.12)
  Kovarianzoperator und Korrelationsoperator (Definition 2.12)
  Resultat zum Kovarianzoperator (Bemerkung 2.13)

1.1 Gleichheit von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Banach-Räumen

Situation. Es bezeichne $(X, \|\cdot\|_X, \mathscr{B}(X))$ einen mit der Borel-σ-Algebra versehenen separablen reellen Banach-Raum. Weiters bezeichne $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ den zugehörigen topologischen Dualraum.

Vorbemerkung. Um zu zeigen, daß ein auf einem separablen reellen Banach-Raum definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu : \mathscr{B}(X) \to [0,1]$ durch die Werte auf dem System der Zylindermengen eindeutig bestimmt ist, wird folgendes Hilfsresultat zur Charakterisierung der Borel-σ-Algebra genützt.

Resultat (Charakterisierung der Borel-σ-Algebra). Die Borel-σ-Algebra eines separablen reellen Banach-Raumes X ist durch die von

$$\mathscr{M} = \Big\{\big\{x \in X : x^*(x) \leq r\big\} : x^* \in X^*, r \in \mathbb{R}\Big\}$$

erzeugte σ-Algebra gegeben

$$\mathscr{B}(X) = \sigma\big(\mathscr{M}\big).$$

Erklärung. Um die Gleichheit der Mengensysteme $\mathscr{B}(X) = \sigma(\mathscr{M})$ zu zeigen, werden die Inklusionen $\mathscr{B}(X) \subseteq \sigma(\mathscr{M})$ sowie $\sigma(\mathscr{M}) \subseteq \mathscr{B}(X)$ nachgewiesen.

(i) *Inklusion $\mathscr{B}(X) \subseteq \sigma(\mathscr{M})$.* Die Borel-$\sigma$-Algebra $\mathscr{B}(X)$ ist die kleinste σ-Algebra, welche alle offenen Mengen des Banach-Raumes X enthält. Da sich jede offene Menge als höchstens abzählbare Vereinigung von offenen Kugeln der Form (mit $a \in X$ und $r > 0$)

$$B_r(a) = \Big\{x \in X : \big\|x - a\big\|_X < r\Big\}$$

darstellen läßt, reicht es aus, die Inklusion

$$B_r(a) \in \sigma(\mathscr{M})$$

nachzuweisen. Dazu verwendet man, daß der zugrundeliegende Banach-Raum als reell und separabel vorausgesetzt ist. Das Resultat zur Charakterisierung der Norm sichert somit die Existenz einer Folge $(x_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ von Elementen des Dualraumes, sodaß für alle $x \in X$ die Relation

$$\|x - a\|_X = \sup_{k\in\mathbb{N}} x_k^*(x - a)$$

gültig ist. Zusammen mit der Darstellung einer offenen Kugel als Durchschnitt von abzählbar vielen abgeschlossenen Kugeln (beachte dazu, daß $\max\{\alpha_k : k \in \{1, \dots, n\}\} \leq \alpha$

äquivalent zu $\alpha_1 \leq \alpha \wedge \cdots \wedge \alpha_n \leq \alpha$ ist, entsprechende Überlegung für Folge)

$$\begin{aligned}
B_r(a) &= \bigcup_{K\in\mathbb{N}} \overline{B_{(1-\frac{1}{K})r}(a)} \\
&= \bigcup_{K\in\mathbb{N}} \Big\{x \in X : \|x-a\|_X \leq \big(1-\tfrac{1}{K}\big)\, r\Big\} \\
&= \bigcup_{K\in\mathbb{N}} \Big\{x \in X : \sup_{k\in\mathbb{N}} x_k^*(x-a) \leq \big(1-\tfrac{1}{K}\big)\, r\Big\} \\
&= \bigcup_{K\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Big\{x \in X : x_k^*(x-a) \leq \big(1-\tfrac{1}{K}\big)\, r\Big\} \\
&= \bigcup_{K\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Big\{x \in X : x_k^*(x) \leq x_k^*(a) + \big(1-\tfrac{1}{K}\big)\, r\Big\}
\end{aligned}$$

zeigt dies, daß jede offene Kugel in der von $\mathscr{M}$ erzeugten σ-Algebra enthalten ist

$$\begin{aligned}
&\Big\{x \in X : x_k^*(x) \leq x_k^*(a) + \big(1-\tfrac{1}{K}\big)\, r\Big\} \in \mathscr{M} \\
&\quad\Longrightarrow \quad B_r(a) = \bigcup_{K\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Big\{x \in X : x_k^*(x) \leq x_k^*(a) + \big(1-\tfrac{1}{K}\big)\, r\Big\} \in \sigma(\mathscr{M})\,.
\end{aligned}$$

(ii) *Inklusion $\sigma(\mathscr{M}) \subseteq \mathscr{B}(X)$.* Als stetige Funktion ist jedes Element $x^* \in X^*$ insbesondere Borel-meßbar. Mittels der Darstellung der Mengen in $\mathscr{M}$ als Urbildmengen von abgeschlossenen Intervallen zeigt dies (mit $r \in \mathbb{R}$, beachte $(-\infty, r] \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$)

$$M = \big\{x \in X : x^*(x) \in (-\infty, r]\big\} = (x^*)^{-1}\big((-\infty, r]\big) \in \mathscr{B}(X)\,,$$

und somit gilt $\sigma(\mathscr{M}) \subseteq \mathscr{B}(X)$. ◇

Bemerkung. Im Spezialfall $X = \mathbb{R}$ entspricht ein Element des Dualraumes einer Funktion der Form (mit $k \in \mathbb{R}$, Graph entspricht einer Geraden durch den Ursprung)

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto k\,x\,.$$

Wie eben begründet wurde, erzeugt das Mengensystem

$$\mathscr{M} = \Big\{\big\{x \in \mathbb{R} : k\,x \leq r\big\} : k, r \in \mathbb{R}\Big\}$$

die Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Ein einfaches Beispiel zeigt jedoch, daß der Durchschnitt zweier Mengen $M_1, M_2 \in \mathscr{M}$ im Allgemeinen nicht mehr in $\mathscr{M}$ enthalten ist

$$\begin{gathered}
M_1 = \big\{x \in \mathbb{R} : 2\,x \leq 3\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} : x \leq \tfrac{3}{2}\big\} = \big(-\infty, \tfrac{3}{2}\big] \in \mathscr{M}\,, \\
M_2 = \big\{x \in \mathbb{R} : -x \leq \tfrac{1}{3}\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} : x \geq -\tfrac{1}{3}\big\} = \big[-\tfrac{1}{3}, \infty\big) \in \mathscr{M}\,, \\
M_1 \cap M_2 = \big[-\tfrac{1}{3}, \tfrac{3}{2}\big] \notin \mathscr{M}\,.
\end{gathered}$$

Dies erklärt den Übergang auf Mengen der Form

$$M_1 \cap M_2 = \big\{x \in \mathbb{R} : (2\,x, -x) \in (-\infty, 3] \times (-\infty, \tfrac{1}{3}]\big\}\,.$$

Definition (System der Zylindermengen). Das System der Zylindermengen auf einem separablen reellen Banach-Raum X ist durch

$$\mathscr{Z} = \Big\{ \big\{ x \in X : \big(x_1^*(x), \dots, x_d^*(x) \big) \in A \big\} : x_1^*, \dots, x_d^* \in X^*, A \in \mathscr{B}\big(\mathbb{R}^d\big), d \in \mathbb{N} \Big\}$$

definiert.

Vorbemerkung. Aus dem zuvor angegeben Hilfsresultat folgt, daß das System der Zylindermengen die Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(X)$ erzeugt. Das System der Zylindermengen ist abgeschlossen bezüglich des Durchschnittes, d.h. der Durchschnitt zweier Zylindermengen bildet wieder eine Zylindermenge

$$Z_1, Z_2 \in \mathscr{Z} \quad \Longrightarrow \quad Z_1 \cap Z_2 \in \mathscr{Z} \,;$$

man spricht von einem durchschnittsstabilen Mengensystem. Mittels des Eindeutigkeitssatzes für Wahrscheinlichkeitsmaße ergibt sich damit das folgende Resultat.[1]

Resultat (Gleichheit von Wahrscheinlichkeitsmaßen). Es seien $\mu_1, \mu_2 : \mathscr{B}(X) \to [0,1]$ zwei auf der Borel-σ-Algebra eines separablen reellen Banach-Raumes X definierte Wahrscheinlichkeitsmaße. Falls die Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem System der Zylindermengen übereinstimmen, sind sie gleich

$$\mu_1 = \mu_2 : \mathscr{Z} \to [0,1] \quad \Longrightarrow \quad \mu_1 = \mu_2 : \mathscr{B}(X) \to [0,1] \,.$$

[1] *Eindeutigkeitssatz für Wahrscheinlichkeitsmaße.* Es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A})$ einen meßbaren Raum, und es seien $\mu_1, \mu_2 : \mathscr{A} \to [0,1]$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße. Falls das Mengensystem $\mathscr{A}_0$ ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem von $\mathscr{A}$ ist, d.h. es gelte

$$A_1, A_2 \in \mathscr{A}_0 \Longrightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathscr{A}_0 \,, \qquad \mathscr{A} = \sigma(\mathscr{A}_0) \,,$$

und die Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathscr{A}_0$ übereinstimmen, so sind sie gleich

$$\mu_1 = \mu_2 : \mathscr{A}_0 \to [0,1] \quad \Longrightarrow \quad \mu_1 = \mu_2 : \mathscr{A} \to [0,1] \,.$$

1.2 Gleichheit von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Hilbert-Räumen

Situation. Es bezeichne $(H, (\cdot|\cdot)_H, \|\cdot\|_H, \mathscr{B}(H))$ einen mit der Borel-σ-Algebra versehenen separablen reellen Hilbert-Raum.

Erinnerung (Charakteristische Funktion). Die charakteristische Funktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf der Borel-σ-Algebra des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^d$ ist durch die inverse Fourier-Transformation gegeben (beachte $\kappa \cdot \xi \in \mathbb{R}$ für $\kappa, \xi \in \mathbb{R}^d$)

$$\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0,1], \qquad \widehat{\mu} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} : \kappa \longmapsto (2\pi)^{\frac{d}{2}} \big(\mathscr{F}^{-1}(\mu)\big)(\kappa) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\cdot\xi}\, \mathrm{d}\mu(\xi).$$

Die folgende Definition gibt die naheliegende Erweiterung auf Hilbert-Räume an; das Skalarprodukt ersetzt dabei das euklidische Produkt.[2]

Definition (Charakteristische Funktion). Für ein auf der Borel-σ-Algebra eines separablen reellen Hilbert-Raumes definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß ist die charakteristische Funktion wie folgt definiert (komplexwertige Funktion, beachte $(h|\eta)_H \in \mathbb{R}$ für $h, \eta \in H$)

$$\mu : \mathscr{B}(H) \longrightarrow [0,1], \qquad \widehat{\mu} : H \longrightarrow \mathbb{C} : h \longmapsto \int_H \mathrm{e}^{\mathrm{i}(h|\eta)_H}\, \mathrm{d}\mu(\eta).$$

Vorbemerkung. Im Folgenden wird gezeigt, daß ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einem Hilbert-Raum durch die charakteristischen Funktionen einer Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf euklidischen Räumen eindeutig bestimmt ist.

Definition (Zugehöriges Wahrscheinlichkeitsmaß). Es sei $\mu : \mathscr{B}(H) \to [0,1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Für jedes Element $h = (h_1, \dots, h_d) \in H^d$ definiert

$$\mu_h : \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \mu\Big(\big\{\eta \in H : \big((h_1|\eta)_H, \dots, (h_d|\eta)_H\big) \in A\big\}\Big)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^d$.

[2] *Bemerkung.* Im allgemeineren Fall eines Banach-Raumes führt man die charakteristische Funktion mittels des Dualraumes ein (komplexwertige Funktion, beachte $x^*(x) \in \mathbb{R}$ für $x^* \in X^*$ und $x \in X$)

$$\mu : \mathscr{B}(X) \longrightarrow [0,1], \qquad \widehat{\mu} : X^* \longrightarrow \mathbb{C} : x^* \longmapsto \int_X \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x^*(x)}\, \mathrm{d}\mu(x).$$

Man beachte, daß diese Relation mittels Anwendung des Darstellungssatzes von Riesz auf die angegebene Definition für Hilbert-Räume führt (Darstellung $h^* = (h|\cdot)_H$ mit eindeutiger Entsprechung $h \in H \leftrightarrow h^* \in H^*$).

Resultat (Relation für charakteristische Funktionen). Es sei $\mu : \mathscr{B}(H) \to [0,1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, und für ein Element $h = (h_1, \dots, h_d) \in H^d$ bezeichne $\mu_h : \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,1]$ das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann erfüllen die charakteristischen Funktionen

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu} : H \longrightarrow \mathbb{C} : h \longmapsto \int_H \mathrm{e}^{\mathrm{i}(h|\eta)_H} \, \mathrm{d}\mu(\eta) \,, \\
&\widehat{\mu_h} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} : \kappa \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\cdot\xi} \, \mathrm{d}\mu_h(\xi) \,,
\end{aligned}$$

für beliebige Elemente $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_d) \in \mathbb{R}^d$ die Relation

$$\widehat{\mu_h}(\kappa) = \widehat{\mu}\bigg(\sum_{k=1}^d \kappa_k \, h_k\bigg) .$$

Erklärung. Für die folgenden Überlegungen ist es zweckmäßig, die Funktion

$$F_h : H \longrightarrow \mathbb{R}^d : \eta \longmapsto \big((h_1|\eta)_H, \dots, (h_d|\eta)_H\big)$$

einzuführen und den Zusammenhang (Definition, Urbild)

$$\mu_h(A) = \mu\Big(\big\{\eta \in H : \big((h_1|\eta)_H, \dots, (h_d|\eta)_H\big) \in A\big\}\Big) = \mu\big(\{\eta \in H : F_h(\eta) \in A\}\big) = \mu\big(F_h^{-1}(A)\big)$$

zu nützen. Es ist die Gleichheit der beiden Größen (Definition der charakteristischen Funktion, Bilinearität des Skalarproduktes)

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu_h}(\kappa) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\cdot\xi} \, \mathrm{d}\mu_h(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\cdot\xi} \, \mathrm{d}\mu\big(F_h^{-1}(\xi)\big) \,, \\
\widehat{\mu}\bigg(\sum_{k=1}^d \kappa_k \, h_k\bigg) &= \int_H \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\sum_{k=1}^d \kappa_k h_k \middle| \eta\right)_H} \, \mathrm{d}\mu(\eta) \\
&= \int_H \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^d \kappa_k (h_k|\eta)_H} \, \mathrm{d}\mu(\eta) \\
&= \int_H \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\cdot F_h(\eta)} \, \mathrm{d}\mu(\eta) \,,
\end{aligned}$$

nachzuweisen. Mittels Integraltransformation ($\xi = F_h(\eta) \in \mathbb{R}^d$ bzw. $\eta \in F_h^{-1}(\xi) \subseteq H$)

$$\widehat{\mu_h}(\kappa) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\cdot\xi} \, \mathrm{d}\mu\big(F_h^{-1}(\xi)\big) = \int_H \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\cdot F_h(\eta)} \, \mathrm{d}\mu(\eta) = \widehat{\mu}\bigg(\sum_{k=1}^d \kappa_k \, h_k\bigg)$$

folgt die angegebene Relation. ◇

Resultat (Gleichheit von Wahrscheinlichkeitsmaßen). Es seien $\mu_1, \mu_2 : \mathscr{B}(H) \to [0,1]$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße. Falls für beliebige Dimensionen $d \in \mathbb{N}$ und für alle Elemente in H^d die charakteristischen Funktionen der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaße übereinstimmen, so sind die Wahrscheinlichkeitsmaße gleich

$$\Big(\forall d \in \mathbb{N} \;\; \forall h \in H^d: \quad \widehat{\mu}_{1,h} = \widehat{\mu}_{2,h} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}\Big) \quad \Longrightarrow \quad \mu_1 = \mu_2 : \mathscr{B}(H) \to [0,1]\,.$$

Erklärung. Es sei daran erinnert, daß das System der Zylindermengen durch

$$\mathscr{Z} = \Big\{\big\{\eta \in H : \big(h_1^*(\eta), \dots, h_d^*(\eta)\big) \in A\big\} : h_1^*, \dots, h_d^* \in H^*, A \in \mathscr{B}\big(\mathbb{R}^d\big), d \in \mathbb{N}\Big\}$$

definiert ist. Der Darstellungssatz von Riesz impliziert, daß das Mengensystem

$$\mathscr{Z} = \Big\{\big\{\eta \in H : \big((h_1|\eta)_H, \dots, (h_d|\eta)_H\big) \in A\big\} : h = (h_1, \dots, h_d) \in H^d, A \in \mathscr{B}\big(\mathbb{R}^d\big), d \in \mathbb{N}\Big\}$$

mit dem Mengensystem der Zylindermengen übereinstimmt und insbesondere die Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(H)$ erzeugt. Die Vorgabe der Werte der Familie

$$(\mu_h)_{h \in H^d, d \in \mathbb{N}}, \qquad \mu_h : \mathscr{B}\big(\mathbb{R}^d\big) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \mu\Big(\big\{\eta \in H : \big((h_1|\eta)_H, \dots, (h_d|\eta)_H\big) \in A\big\}\Big),$$

legt also die Werte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf dem System der Zylindermengen fest

$$\Big(\forall d \in \mathbb{N} \;\; \forall h \in H^d: \quad \mu_{1,h} = \mu_{2,h} : \mathscr{B}\big(\mathbb{R}^d\big) \to [0,1]\Big) \quad \Longrightarrow \quad \mu_1 = \mu_2 : \mathscr{Z} \to [0,1]\,.$$

Das Resultat zur Gleichheit von Wahrscheinlichkeitsmaßen besagt, daß ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^d$ durch die zugehörige charakteristische Funktion bestimmt ist, und folglich gilt

$$\Big(\forall d \in \mathbb{N} \;\; \forall h \in H^d: \quad \widehat{\mu}_{1,h} = \widehat{\mu}_{2,h} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}\Big) \quad \Longrightarrow \quad \mu_1 = \mu_2 : \mathscr{Z} \to [0,1]\,.$$

Die Behauptung ergibt sich somit aus dem zuvor angegebenen Eindeutigkeitssatz für Wahrscheinlichkeitsmaße auf Banach-Räumen. ◇

Vorbemerkung. Das folgende Hilfsresultat wird an späterer Stelle zur Charakterisierung von Gauß-Maßen mittels Spurklasse-Operatoren benötigt (für den Spezialfall $d = 1$).

Resultat (Abschätzung für Produkte). Es bezeichne $\mu : \mathscr{B}(H) \to [0,1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Falls für eine natürlich Zahl $d \in \mathbb{N}$ die Bedingung

$$\forall\, h \in H: \qquad \int_H \big|(h|\eta)_H\big|^d \,\mathrm{d}\mu(\eta) < \infty$$

erfüllt ist, dann existiert eine Konstante $C > 0$ sodaß die folgende Abschätzung gültig ist

$$\forall\, (h_1, \dots, h_d) \in H^d: \qquad \int_H \prod_{k=1}^d \big|(h_k|\eta)_H\big| \,\mathrm{d}\mu(\eta) \leq C \prod_{k=1}^d \|h_k\|_H\,.$$

Erklärung. Im trivialen Fall $h_k = 0$ für mindestens einen Index $k \in \{1, \dots, d\}$ ist die Behauptung offensichtlich erfüllt. Somit ist es zulässig, normierte Elemente zu betrachten und dafür die Relation

$$\Big(\forall\, h \in H,\ \|h\|_H = 1: \quad \int_H \big|(h|\eta)_H\big|^d \,\mathrm{d}\mu(\eta) < \infty\Big)$$
$$\Longrightarrow \quad \Big(\forall\, h_1, \dots, h_d \in H,\ \|h_1\|_H = \dots = \|h_d\|_H = 1: \quad \int_H \prod_{k=1}^{d} \big|(h_k|\eta)_H\big| \,\mathrm{d}\mu(\eta) \leq C\Big)$$

zu zeigen. Der zugrundeliegende Hilbert-Raum ergibt sich als Vereinigung einer Familie von abgeschlossenen Mengen

$$H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n\,, \qquad H_n = \Big\{h \in H : \int_H \big|(h|\eta)_H\big|^d \,\mathrm{d}\mu(\eta) \leq n\Big\}\,.$$

Der Satz von Baire[3] sichert die Existenz eines Index $n_0 \in \mathbb{N}$, sodaß eine offene Kugel in H_{n_0} enthalten ist

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists\, h_0 \in H \quad \exists\, r_0 > 0: \qquad B_{2r_0}(h_0) = \big\{\eta_0 \in H : \|\eta_0 - h_0\|_H < 2r_0\big\} \subseteq H_{n_0}\,.$$

Offensichtlich gilt $h_0 \in H_{n_0}$, und ebenso erfüllt jedes Element der Form $\eta_0 = h_0 + r_0 h$ mit $\|h\|_H = 1$ wegen $\|\eta_0 - h_0\|_H = r_0\, \|h\|_H = r_0 < 2r_0$ die Bedingung $\eta_0 \in H_{n_0}$, d.h. es ist

$$\int_H \big|(h_0|\eta)_H\big|^d \,\mathrm{d}\mu(\eta) \leq n_0\,, \qquad \int_H \big|(\eta_0|\eta)_H\big|^d \,\mathrm{d}\mu(\eta) \leq n_0\,.$$

Dies zeigt die Schranke (multiplikatives Erweitern mit r_0^d, additives Erweitern mit h_0, Dreiecksungleichung, elementare Abschätzung $(a+b)^d \leq 2^{d-1}(a^d + b^d)$ für $a, b > 0$)

$$\begin{aligned}
\|h\|_H = 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_H \big|(h|\eta)_H\big|^d \,\mathrm{d}\mu(\eta) &= \tfrac{1}{r_0^d} \int_H \big|(r_0 h|\eta)_H\big|^d \,\mathrm{d}\mu(\eta) \\
&= \tfrac{1}{r_0^d} \int_H \big|(-\,h_0|\eta)_H + (h_0 + r_0 h|\eta)_H\big|^d \,\mathrm{d}\mu(\eta) \\
&\leq \tfrac{1}{r_0^d} \int_H \Big(\big|(h_0|\eta)_H\big| + \big|(\eta_0|\eta)_H\big|\Big)^d \,\mathrm{d}\mu(\eta) \\
&\leq \tfrac{2^{d-1}}{r_0^d} \int_H \Big(\big|(h_0|\eta)_H\big|^d + \big|(\eta_0|\eta)_H\big|^d\Big) \,\mathrm{d}\mu(\eta) \\
&\leq \tfrac{2^{d-1}}{r_0^d} \Big(\int_H \big|(h_0|\eta)_H\big|^d \,\mathrm{d}\mu(\eta) + \int_H \big|(\eta_0|\eta)_H\big|^d \,\mathrm{d}\mu(\eta)\Big) \\
&\leq \tfrac{2^d n_0}{r_0^d}\,.
\end{aligned}$$

[3] *Satz von Baire.* Der Satz von Baire für vollständige metrische Räume besagt, daß von abzählbar vielen abgeschlossenen Teilmengen, deren Vereinigung eine offene Kugel enthält, mindestens eine Teilmenge bereits eine offene Kugel enthält.

Mittels der Ungleichung von Hölder folgt die Relation (Entsprechung $h_k \leftrightarrow h$)

$$\|h_1\|_H = \cdots = \|h_d\|_H = 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_H \prod_{k=1}^{d} \left|\left(h_k|\eta\right)_H\right| \, \mathrm{d}\mu(\eta) \leq \prod_{k=1}^{d} \left(\int_H \left|\left(h_k|\eta\right)_H\right|^d \, \mathrm{d}\mu(\eta) \right)^{1/d} \leq \frac{2^d n_0}{r_0^d}\,,$$

was die Gültigkeit der Behauptung mit $C = \frac{2^d n_0}{r_0^d}$ zeigt. $\diamond$

1.3 Zufallsvariablen mit Werten in Hilbert-Räumen

Situation. Es bezeiche $(\Omega, \mathscr{A}, \mu_\Omega)$ den zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum; zusätzlich wird Vollständigkeit vorausgesetzt, d.h. sämtliche Teilmengen von Nullmengen seien Elemente der σ-Algebra $\mathscr{A}$. Wie zuvor bezeichne $(H, (\cdot|\cdot)_H, \|\cdot\|_H)$ einen mit der Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(H)$ versehenen separablen reellen Hilbert-Raum.

Vorbemerkung. Im Hinblick auf spätere Überlegungen zu Gauß'schen Zufallsvariablen werden zunächst Zufallsvariablen mit Werten in Hilbert-Räumen betrachtet und dafür insbesondere die Begriffe Erwartungswert und Kovarianzoperator präzisiert.

Bochner-Integral und Bochner–Lebesgue-Räume. Die Erweiterung des Lebesgue-Integrales auf Funktionen mit Werten in Hilbert-Räumen bzw. allgemeiner in Banach-Räumen führt auf das Bochner-Integral und die Bochner–Lebesgue-Räume; für eine kompakte Einführung des Bochner-Integrales sei beispielsweise auf BROKATE (2003) verwiesen.[4]

(i) *Bochner-Meßbarkeit.* Eine Funktion bzw. Zufallsvariable $Z : \Omega \to H$ heißt Bochner-meßbar, wenn für fast alle Elemente $\omega \in \Omega$ der zugehörige Funktionswert $Z(\omega)$ mittels einer Folge von elementaren Funktionen approximiert werden kann (wobei $h_j^{(K)} \in H$ und $A_j^{(K)} \in \mathscr{A}$ für $j \in \{1, \dots, J_K\}$ mit $J_K \in \mathbb{N}$ und $K \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkte Mengen)

$$\big(Z_K\big)_{K\in\mathbb{N}}, \qquad Z_K : \Omega \longrightarrow H : \omega \longmapsto Z_K(\omega) = \sum_{j=1}^{J_K} h_j^{(K)}\, \chi_{A_j^{(K)}}(\omega)\,,$$
$$\lim_{K\to\infty} \big\| Z_K(\omega) - Z(\omega) \big\|_H = 0\,.$$

(ii) *Bochner-Integrierbarkeit.* Es ist naheliegend, das Bochner-Integral einer elementaren Funktion durch die Relation (Linearität)

$$\begin{aligned}\int_\Omega Z_K(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) &= \int_\Omega \sum_{j=1}^{J_K} h_j^{(K)}\, \chi_{A_j^{(K)}}(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\\ &= \sum_{j=1}^{J_K} h_j^{(K)} \int_\Omega \chi_{A_j^{(K)}}(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\\ &= \sum_{j=1}^{J_K} h_j^{(K)}\, \mu_\Omega\big(A_j^{(K)}\big)\end{aligned}$$

[4] *Bemerkung.* Die zusätzliche Annahme der Separabilität erleichtert die Einführung dieses Integralbegriffes. Zur Vereinfachung kann zunächst angenommen werden, daß der betrachtete Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes abgeschlossenes Intervall ist und mit der Borel-σ-Algebra versehen ist.

zu erklären; unter der Voraussetzung

$$\lim_{K\to\infty}\int_\Omega \big\|Z_K(\omega)-Z(\omega)\big\|_H \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)=0$$

heißt die Zufallsvariable Bochner-integrierbar, und das zugehörige Bochner-Integral ist als Limes

$$\int_\Omega Z(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)=\lim_{K\to\infty}\int_\Omega Z_K(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)=\lim_{K\to\infty}\sum_{j=1}^{J_K} h_j^{(K)}\,\mu_\Omega\big(A_j^{(K)}\big)$$

definiert.

(iii) *Zusammenhang mit Lebesgue-Integrierbarkeit.* Eine Bochner-meßbare Zufallsvariable ist genau dann Bochner-integrierbar, wenn die durch die Norm definierte reellwertige Funktion Lebesgue-integrierbar ist

$$\begin{gathered}Z:\Omega\longrightarrow H:\omega\longrightarrow Z(\omega)\,,\\ z:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}:\omega\longmapsto\big\|Z(\omega)\big\|_H\,,\end{gathered}$$

weiters gilt die Abschätzung (vgl. Dreiechsungleichung)

$$\left\|\int_\Omega Z(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\right\|_H\le\int_\Omega\big\|Z(\omega)\big\|_H\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\,.$$

(iv) *Bochner–Lebesgue-Räume.* Die Bochner–Lebesgue-Räume sind wie folgt definiert (wobei $p\in[1,\infty]$, im Sinne von Äquivalenzklassen)

$$\begin{gathered}Z:\Omega\longrightarrow H:\omega\longrightarrow Z(\omega)\,,\qquad z:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}:\omega\longmapsto\big\|Z(\omega)\big\|_H\,,\\ L^p\big(\Omega,H\big)=\big\{Z:\Omega\to H\text{ Bochner-meßbar und }z\in L^p(\Omega,\mathbb{R})\big\}\,,\\ \big\|Z\big\|_{L^p(\Omega,H)}=\big\|z\big\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R})}\,.\end{gathered}$$

Die Bochner–Lebesgue-Räume bilden Banach-Räume; für $p=2$ ergibt sich ein Hilbert-Raum (für Zufallsvariablen $Z,Z_1,Z_2:\Omega\to H$)

$$\begin{aligned}\big(Z_1\big|Z_2\big)_{L^2(\Omega,H)}&=\int_\Omega\big(Z_1(\omega)\big|Z_2(\omega)\big)_H\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\,,\\ \big\|Z\big\|_{L^2(\Omega,H)}&=\sqrt{\int_\Omega\big\|Z(\omega)\big\|_H^2\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)}\,.\end{aligned}$$

Zufallsvariable, Erwartungswert.

(i) *Zufallsvariable, Induziertes Wahrscheinlichkeitsmaß.* Eine Zufallsvariable $Z:\Omega\to H$ ist eine meßbare Funktion, d.h. das Urbild jeder Borel-Menge $A\in\mathscr{B}(H)$ ist ein Element der σ-Algebra $\mathscr{A}$. Das von Z auf $\mathscr{B}(H)$ induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß wird wie üblich mittels Urbild auf Werte des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mu_\Omega:\mathscr{A}\to[0,1]$ zurückgeführt

$$\mu:\mathscr{B}(H)\longrightarrow[0,1]:A\longmapsto\mu(A)=\mu_\Omega\big(Z^{-1}(A)\big)\,.$$

(ii) *Vorbemerkung.* Wie zuvor angegeben, umfaßt der Hilbert-Raum $L^2(\Omega, H)$ alle Zufallsvariablen $Z : \Omega \to H$, welche die Integrabilitätsbedingung

$$\|Z\|_{L^2(\Omega,H)} = \sqrt{\int_\Omega \|Z(\omega)\|_H^2 \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)} < \infty$$

erfüllen. Die L^2-Norm ist offensichtlich durch den Erwartungswert der zugehörigen reellwertigen Zufallsvariable $\Omega \to \mathbb{R} : \omega \mapsto \|Z(\omega)\|_H^2$ gegeben

$$\|Z\|_{L^2(\Omega,H)}^2 = \int_\Omega \|Z(\omega)\|_H^2 \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = E\Big(\|Z\|_H^2\Big).$$

(iii) *Erwartungswert.* Der Erwartungswert der Zufallsvariable $Z : \Omega \to H$ ist durch das Bochner-Integral

$$E(Z) = \int_\Omega Z(\omega) \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) \in H$$

definiert. Man beachte, daß sich mittels der Ungleichung von Cauchy–Schwarz die folgende Abschätzung ergibt (verwende $\mu_\Omega(\Omega) = 1$)

$$\begin{aligned}\|E(Z)\|_H &\le \int_\Omega \|Z(\omega)\|_H \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\\ &\le \sqrt{\mu_\Omega(\Omega)}\sqrt{\int_\Omega \|Z(\omega)\|_H^2 \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)}\\ &= \|Z\|_{L^2(\Omega,H)} < \infty;\end{aligned}$$

somit ist der Erwartungswert unter der Voraussetzung $Z \in L^2(\Omega, H)$ wohldefiniert.

(iv) *Transformationslemma.* Das Transformationslemma[5] erlaubt es, den Erwartungswert mittels des induzierten Maßes anzugeben (formal $h = Z(\omega)$ bzw. $\omega \in Z^{-1}(h)$, Rechtfertigung durch Approximation mittels Stufenfunktionen)

$$E(Z) = \int_\Omega Z(\omega) \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = \int_H h \,\mathrm{d}\mu_\Omega(Z^{-1}(h)) = \int_H h \,\mathrm{d}\mu(h) \in H.$$

Allgemeiner gilt (wobei $F : H \to \widetilde{H}$, Rechtfertigung durch Approximation mittels Stufenfunktionen)

$$E\big(F(Z)\big) = \int_\Omega F\big(Z(\omega)\big) \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = \int_H F(h) \,\mathrm{d}\mu(h) \in \widetilde{H};$$

unter der Integrabilitätsannahme

$$F \in L^1\big(H, \widetilde{H}\big) \quad \Longrightarrow \quad \big\|E\big(F(Z)\big)\big\|_{\widetilde{H}} \le \|F\|_{L^1(H,\widetilde{H})} = \int_H \|F(h)\|_H \,\mathrm{d}\mu(h)$$

ist der Erwartungswert wohldefiniert.

[5] *Bemerkung.* Für reguläre (reelle) Funktionen $F : D_1 \to D_2$ und $Z : \Omega \to D_1$ entspricht das Transformationslemma der Substitutionsregel (aus $x = Z(\omega)$ folgt $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\omega} = Z'(\omega)$)

$$\int_\Omega F\big(Z(\omega)\big)\, Z'(\omega) \,\mathrm{d}\omega = \int_{Z(\Omega)} f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Kovarianzoperator.

(i) *Tensorprodukt.* Das Tensorprodukt zweier Elemente des betrachteten Hilbert-Raumes $h_1, h_2 \in H$ definiert einen stetigen linearen Operator

$$h_1 \otimes h_2 : H \longrightarrow H : \eta \longmapsto \big(h_2\big|\eta\big)_H h_1\,,$$
$$h_1 \otimes h_2 \in L(H)\,,$$

denn es gilt (Definition, Anwendung der Ungleichung von Cauchy-Schwarz)

$$\begin{aligned}\big\|h_1 \otimes h_2\big\|_{H\leftarrow H} &= \sup_{\substack{\eta\in H\\ \|\eta\|_H=1}} \big\|\big(h_1 \otimes h_2\big)(\eta)\big\|_H\\ &= \sup_{\substack{\eta\in H\\ \|\eta\|_H=1}} \big|\big(h_2\big|\eta\big)_H\big|\,\big\|h_1\big\|_H\\ &\leq \big\|h_1\big\|_H\,\big\|h_2\big\|_H\,.\end{aligned}$$

(ii) *Kovarianzoperator.* Für eine Zufallsvariable $Z : \Omega \to H$ betrachtet man speziell das Tensorprodukt (wobei $\omega \in \Omega$, beachte $Z(\omega) \in H$ sowie $E(Z) \in H$)

$$\begin{aligned}\big(Z(\omega) - E(Z)\big) \otimes \big(Z(\omega) - E(Z)\big) : &H \longrightarrow H\\ &\eta \longmapsto \big(Z(\omega) - E(Z)\big|\eta\big)_H \big(Z(\omega) - E(Z)\big)\,.\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung $Z \in L^2(\Omega, H)$ definiert der zugehörige Erwartungswert einen stetigen linearen Operator

$$\begin{aligned}K(Z) = E\Big(\big(Z - E(Z)\big) \otimes \big(Z - E(Z)\big)\Big) : &H \longrightarrow H\\ &\eta \longmapsto \int_\Omega \big(Z(\omega) - E(Z)\big|\eta\big)_H \big(Z(\omega) - E(Z)\big)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\,,\end{aligned}$$

welcher als Kovarianzoperator[6] bezeichnet wird; mittels der Ungleichung von Cauchy–Schwarz folgt dessen Wohldefiniertheit

$$\begin{aligned}\big\|\big(K(Z)\big)(\eta)\big\|_H &\leq \int_\Omega \big|\big(Z(\omega) - E(Z)\big|\eta\big)_H\big|\,\big\|Z(\omega) - E(Z)\big\|_H\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\\ &\leq \big\|\eta\big\|_H \int_\Omega \big\|Z(\omega) - E(Z)\big\|_H^2\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\\ &= \big\|\eta\big\|_H\,\big\|Z - E(Z)\big\|_{L^2(\Omega,H)}^2 < \infty\,,\end{aligned}$$

[6] *Bemerkung.* Man beachte, daß im Fall reellwertiger Zufallsvariablen $z, z_1, z_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ für die Größen

$$V(z) = \int_\Omega \big(z(\omega) - E(z)\big)^2\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\,,$$
$$K(z_1, z_2) = \int_\Omega \big(z_1(\omega) - E(z_1)\big)\big(z_2(\omega) - E(z_2)\big)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\,,$$
$$\tfrac{K(z_1,z_2)}{\sqrt{V(z_1)}\sqrt{V(z_2)}}\,,$$

die Bezeichnungen Varianz, Kovarianz und Korrelation üblich sind.

und insbesondere gilt $K(Z) \in L(H)$, denn

$$\big\| K(Z) \big\|_{H \leftarrow H} \leq \big\| Z - E(Z) \big\|^2_{L^2(\Omega,H)} .$$

(iii) *Korrelationsoperator.* Etwas allgemeiner ist für zwei quadratintegrable Zufallsvariablen $Z_1, Z_2 \in L^2(\Omega, H)$ der Korrelationsoperator durch

$$\begin{aligned} E\Big(\big(Z_1 - E(Z_1)\big) \otimes \big(Z_2 - E(Z_2)\big)\Big) : H &\longrightarrow H \\ \eta &\longmapsto \int_\Omega \big(Z_2(\omega) - E(Z_2)\big|\eta\big)_H \big(Z_1(\omega) - E(Z_1)\big) \, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) \end{aligned}$$

erklärt; ähnlich wie zuvor folgt dessen Stetigkeit mit Hilfe der Ungleichung von Cauchy–Schwarz

$$\begin{aligned} &\Big\| E\Big(\big(Z_1 - E(Z_1)\big) \otimes \big(Z_2 - E(Z_2)\big)\Big) \Big\|_{H \leftarrow H} \\ &\leq \int_\Omega \big\| Z_1(\omega) - E(Z_1) \big\|_H \big\| Z_2(\omega) - E(Z_2) \big\|_H \, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) \\ &\leq \sqrt{\int_\Omega \big\| Z_1(\omega) - E(Z_1) \big\|^2_H \, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)} \sqrt{\int_\Omega \big\| Z_2(\omega) - E(Z_2) \big\|^2_H \, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)} \\ &= \big\| Z_1 - E(Z_1) \big\|_{L^2(\Omega,H)} \big\| Z_2 - E(Z_2) \big\|_{L^2(\Omega,H)} . \end{aligned}$$

Vorbemerkung. Man beachte, daß der Wert des Kovarianzoperators (für $\eta_1 \in H$)

$$\big(K(Z)\big)(\eta_1) = \int_\Omega \big(Z(\omega) - E(Z)\big|\eta_1\big)_H \big(Z(\omega) - E(Z)\big) \, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)$$

mit dem Erwartungswert der reellwertigen Zufallsvariable (für $\eta_1, \eta_2 \in H$)

$$\big(Z - E(Z)\big|\eta_1\big)_H \big(Z - E(Z)\big|\eta_2\big)_H : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

zusammenhängt; es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \Big(\big(K(Z)\big)(\eta_1)\Big|\eta_2\Big)_H &= \int_\Omega \big(Z(\omega) - E(Z)\big|\eta_1\big)_H \big(Z(\omega) - E(Z)\big|\eta_2\big)_H \, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) \\ &= E\Big(\big(Z - E(Z)\big|\eta_1\big)_H \big(Z - E(Z)\big|\eta_2\big)_H\Big) . \end{aligned}$$

Insbesondere zeigt dies die Selbstadjungiertheit sowie die positive Semi-Definitheit des Kovarianzoperators (für Elemente $\eta, \eta_1, \eta_2 \in H$, aufgrund Beschränktheit ist Selbstadjungiertheit äquivalent zu Symmetrie)

$$\begin{gathered} \Big(\big(K(Z)\big)(\eta_1)\Big|\eta_2\Big)_H = \Big(\eta_1\Big|\big(K(Z)\big)(\eta_2)\Big)_H , \\ \Big(\big(K(Z)\big)(\eta)\Big|\eta\Big)_H = \int_\Omega \big(Z(\omega) - E(Z)\big|\eta\big)^2_H \, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) \geq 0 . \end{gathered}$$

Das folgende Resultat gibt zusätzlich eine Relation für die Spur des Kovarianzoperators an.

Resultat (Eigenschaften des Kovarianzoperators). Unter der Voraussetzung $Z \in L^2(\Omega, H)$ ist der zugehörige Kovarianzoperator

$$K(Z): H \longrightarrow H: \eta \longmapsto \int_\Omega \big(Z(\omega) - E(Z)\big|\eta\big)_H \big(Z(\omega) - E(Z)\big)\, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)$$

ein positiv semi-definiter selbstadjungierter Spurklasse-Operator, und inbesondere gilt die Relation

$$\mathrm{Spur}\big(K(Z)\big) = E\Big(\big\|Z - E(Z)\big\|_H^2\Big) = \big\|Z - E(Z)\big\|_{L^2(\Omega,H)}^2 .$$

Erklärung. Aufgrund der zuvor angegebenen Überlegungen ist nur die Relation für die Spur des Kovarianzoperators nachzuweisen. Aus der Forderung $Z \in L^2(\Omega, H)$ folgt insbesondere die Wohldefiniertheit der Größe (verwende $E(Z) \in H$)

$$E\Big(\big\|Z - E(Z)\big\|_H^2\Big) = \int_\Omega \big\|Z(\omega) - E(Z)\big\|_H^2\, \mathrm{d}\mu(\omega) = \big\|Z - E(Z)\big\|_{L^2(\Omega,H)}^2 < \infty .$$

Nach Wahl eines vollständigen Orthonormalsystemes $(v_k)_{k\in K}$ von H ergibt sich mittels der Parseval'schen Identität und einem Resultat für Spurklasse-Operatoren (nach Voraussetzung ist Hilbert-Raum separabel und somit K endlich oder $K = \mathbb{N}$, verwende Linearität des Erwartungswertes, Konvergenz der Reihen gegegeben)

$$\begin{aligned}
\big\|Z(\omega) - E(Z)\big\|_H^2 &= \sum_{k\in K} \big(Z(\omega) - E(Z)\big|v_k\big)_H^2 ,\\
E\Big(\big\|Z - E(Z)\big\|_H^2\Big) &= \sum_{k\in K} E\Big(\big(Z - E(Z)\big|v_k\big)_H^2\Big),\\
\big(K(Z)v_k\big|v_k\big)_H &= \int_\Omega \big(Z(\omega) - E(Z)\big|v_k\big)_H^2\, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = E\Big(\big(Z - E(Z)\big|v_k\big)_H^2\Big),\\
\mathrm{Spur}\big(K(Z)\big) &= \sum_{k\in K} \big(K(Z)v_k\big|v_k\big)_H = \sum_{k\in K} E\Big(\big(Z - E(Z)\big|v_k\big)_H^2\Big) = E\Big(\big\|Z - E(Z)\big\|_H^2\Big),
\end{aligned}$$

was die gewünschte Behauptung ist. ◇

Kapitel 2

Gauß-Maße und Wiener-Prozesse

Inhalt. Im Folgenden werden Wiener-Prozesse mit Werten in Hilbert-Räumen charakterisiert. Wesentlichen Grundlagen sind die Einführung von Gauß-Maßen mittels charakteristischer Funktionen und die Herleitung geeigneter Darstellungen für Gauß'sche Zufallsvariablen.

Überblick. Um eine Verbindung mit DENK (2014) herzustellen, sind die entsprechenden Verweise angegeben.

- Gauß-Maß auf Banach-Raum (Definition 2.6)

  Gauß-Maß auf Hilbert-Raum (Bemerkung 2.7)

  Charakterisierung von Gauß-Maßen (Satz 2.9, Definition 2.10)

- Gauß'sche Zufallsvariable (Definition 2.10)

  Eigenschaften zugehöriger reellwertiger Zufallsvariablen (Bemerkung 2.11)

  Darstellung von Gauß'schen Zufallsvariablen und Existenz von Gauß-Maßen (Satz 2.14, Korollar 2.15)

- Stochastische Unabhängigkeit von Mengensystemen und Zufallsvariablen (vgl. Definition A.2)

  Stochastischer Prozeß, Pfad, Stetigkeit (Definition 2.16)

  Wiener-Prozeß, Brown'sche Bewegung (Definition 2.19)

  Resultat zur Darstellung und Existenz von Wiener-Prozessen (Satz 2.20)

  Filtrierung, Filtrierter Raum, Normale Filtrierung (Definition 2.21)

  Adaptierter Prozeß (Definition 2.21)

  Wiener-Prozeß bezüglich einer Filtrierung (Definition 2.21)

  Konstruktion eines Wiener-Prozesses bezüglich einer Filtrierung (Satz 2.22)

2.1 Gauß-Maße auf Hilbert-Räumen

Situation. Wie zuvor bezeichne $(X, \|\cdot\|_X)$ einen mit der Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(X)$ versehenen separablen reellen Banach-Raum und $(H, (\cdot|\cdot)_H, \|\cdot\|_H)$ einen mit der Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(H)$ versehenen separablen reellen Hilbert-Raum.

Erinnerung (Vollständiges Orthonormalsystem, Spurklasse-Operator, Gauß-Maß).

(i) *Vollständiges Orthonormalsystem.* Da vorausgesetzt wurde, daß der zugrundeliegende Hilbert-Raum separabel ist, existiert ein höchstens abzählbares vollständiges Orthonormalsystem

$$\big(v_k\big)_{k\in K}, \qquad \big(v_k\big|v_\ell\big)_H = \delta_{k\ell}, \quad k,\ell \in K,$$

welches mittels des Verfahrens von Gram-Schmidt-Verfahren konstruiert werden kann; außerdem gilt folgende Darstellung und die Parseval'sche Identität (wobei $h \in H$, beachte $(h|v_k)_H \in \mathbb{R}$ für alle $k \in K$)

$$h = \sum_{k\in K} \big(h\big|v_k\big)_H\, v_k, \qquad \big\|h\big\|_H^2 = \sum_{k\in K} \big|\big(h\big|v_k\big)_H\big|^2 = \sum_{k\in K} \big(h\big|v_k\big)_H^2.$$

(ii) *Spurklasse-Operator.* Für jeden auf dem betrachteten Hilbert-Raum definierten positiv semi-definiten selbstadjungierten Spurklasse-Operator

$$Q \in \mathscr{S}_1(H) \text{ mit } Q^* = Q \text{ und } \big(Q\,h\big|h\big)_H \geq 0 \text{ für alle } h \in H$$

gilt die folgende Relation für die Spur-Norm (für beliebiges vollständiges Orthonormalsystem $(v_k)_{k\in K}$ in H)

$$\operatorname{Spur}(Q) = \sum_{k\in K} \big(Q\,v_k\big|v_k\big)_H = \sum_{k\in K} \lambda_k(Q) = \sum_{k\in K} \sigma_k(Q) = \big\|Q\big\|_{\mathscr{S}_1}.$$

(iii) *Gauß-Maß.* Bei Vorgabe von Erwartungswert $\alpha \in \mathbb{R}$ und Standardabweichung $\beta \geq 0$ ist die charakteristische Funktion und somit das zugehörige reelle Gauß-Maß eindeutig festgelegt

$$\begin{gathered} \nu = N\big(\alpha, \beta^2\big) : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1], \\ \widehat{\nu} = \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}^{-1}(\nu) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : \kappa \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\xi}\,\mathrm{d}\nu(\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\kappa - \frac{1}{2}\beta^2\kappa^2}, \\ \alpha = \int_{\mathbb{R}} \xi\,\mathrm{d}\nu(\xi), \qquad \beta^2 = \int_{\mathbb{R}} \big(\xi-\alpha\big)^2\,\mathrm{d}\nu(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \xi^2\,\mathrm{d}\nu(\xi) - \alpha^2. \end{gathered}$$

Vorbemerkung. Ein Gauß-Maß auf einem Banach-Raum wird mittels der Elemente des Dualraumes auf reelle Gauß-Maße zurückgeführt.

Gauß-Maß auf Banach-Raum.

(i) Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu : \mathscr{B}(X) \to [0,1]$ heißt ein Gauß-Maß, wenn für alle Elemente $x^* \in X^*$ das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu \circ (x^*)^{-1} : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$$

ein reelles Gauß-Maß ist; man beachte, daß für jedes Element $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ die Relation $(x^*)^{-1}(A) \in \mathscr{B}(X)$ gilt.

(ii) Ein Gauß-Maß $\mu : \mathscr{B}(X) \to [0,1]$ heißt zentriert, wenn für alle Elemente $x^* \in X^*$ das zugehörige reelle Gauß-Maß $\mu \circ (x^*)^{-1} : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ zentriert ist, d.h. der Erwartungswert Null ist.

Vorbemerkung. Im Spezialfall eines Hilbert-Raumes nützt man die Riesz'sche Darstellung $h^* = (h|\cdot)_H \in H^*$ mit eindeutiger Entsprechung von $h \in H$ und $h^* \in H^*$; damit erhält man die folgende Definition.

Gauß-Maß auf Hilbert-Raum. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu : \mathscr{B}(H) \to [0,1]$ heißt ein Gauß-Maß, wenn für alle Elemente $h \in H$ das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu_h = \mu \circ \big(h\big|\cdot\big)_H^{-1} : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \mu\Big(\big\{\eta \in H : \big(h\big|\eta\big)_H \in A\big\}\Big)$$

ein reelles Gauß-Maß ist.[1]

Charakterisierung von Gauß-Maßen auf Hilbert-Räumen. Um ein Gauß-Maß auf dem betrachteten Hilbert-Raum einzuführen, nützt man das zuvor angegebene Resultat zur Gleichheit von Wahrscheinlichkeitsmaßen; dieses besagt, daß die Familie zugehöriger Wahrscheinlichkeitsmaße $(\mu_h)_{h\in H}$ und insbesondere deren charakteristische Funktionen das Wahrscheinlichkeitsmaß eindeutig bestimmen.[2] Der Vollständigkeit halber sei nochmals an die Definitionen der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaße und der charakteristischen Funktion des Wahrscheinlichkeitsmaßes erinnert (Urbild)

$$\begin{gathered}\mu : \mathscr{B}(H) \longrightarrow [0,1]\,,\\ \mu_h = \mu \circ \big(h\big|\cdot\big)_H^{-1} : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \mu\Big(\big\{\eta \in H : \big(h\big|\eta\big)_H \in A\big\}\Big)\,,\\ \widehat{\mu} : H \longrightarrow \mathbb{C} : h \longmapsto \int_H \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(h|\eta)_H}\,\mathrm{d}\mu(\eta)\,.\end{gathered}$$

[1] *Bemerkung.* Man beachte, daß die durch das Skalarprodukt definierte lineare Funktion stetig und insbesondere Borel-meßbar ist

$$\big(\cdot\big|h\big)_H : H \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

[2] *Bemerkung.* Hier wird bereits verwendet, daß man aufgrund der speziellen Form der charakteristischen Funktion von Gauß-Maßen den Fall $h = (h_1,\dots,h_d) \in H^d$ auf den Fall $h \in H$ zurückführen kann.

Nach der angegebenen Definition und dem Resultat zur charakteristische Funktion eines reellen Gauß-Maßes ist das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu : \mathscr{B}(H) \to [0,1]$ also ein Gauß-Maß, wenn für alle Elemente $h \in H$ reelle Zahlen $\alpha_h, \beta_h \in \mathbb{R}$ mit $\beta_h \geq 0$ existieren, sodaß die charakterische Funktion des zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaßes die folgende Form hat

$$\widehat{\mu_h} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : \kappa \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa\xi} \, \mathrm{d}\mu_h(\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_h \kappa - \frac{1}{2}\beta_h^2 \kappa^2} .$$

Verwendet man das Transformationslemma, folgen zudem die Identitäten (entspricht Relation für charakteristische Funktionen $\widehat{\mu}(\kappa h) = \widehat{\mu_h}(\kappa)$ für $\kappa \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}(h) = \int_H \mathrm{e}^{\mathrm{i}(h|\eta)_H} \, \mathrm{d}\mu(\eta) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi} \, \mathrm{d}\mu_h(\xi) = \widehat{\mu_h}(1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_h - \frac{1}{2}\beta_h^2} , \\
\alpha_h = \int_{\mathbb{R}} \xi \, \mathrm{d}\mu_h(\xi) = \int_H \big(h\big|\eta\big)_H \, \mathrm{d}\mu(\eta) , \\
\beta_h^2 = \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \, \mathrm{d}\mu_h(\xi) - \alpha_h^2 = \int_H \big(h\big|\eta\big)_H^2 \, \mathrm{d}\mu(\eta) - \alpha_h^2 .
\end{aligned}$$

Zusammengefaßt gelten also folgende Implikationen

$$\big(\alpha_h, \beta_h\big)_{h\in H} \quad \longrightarrow \quad \big(\widehat{\mu_h}\big)_{h\in H} \quad \longrightarrow \quad \widehat{\mu} \quad \longrightarrow \quad \mu .$$

Das folgende Resultat besagt zusätzlich, daß durch den Erwartungswert

$$\big(q\big|h\big)_H = \alpha_h$$

ein Element $q \in H$ und durch die Varianz

$$\big(Qh\big|h\big)_H = \beta_h^2 \geq 0$$

ein positiv semi-definiter selbstadjungierter Spuklasse-Operator $Q \in \mathscr{S}_1(H)$ definiert wird.

Resultat (Charakterisierung von Gauß-Maßen). Ein Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu : \mathscr{B}(H) \longrightarrow [0,1]$$

ist genau dann ein Gauß-Maß, wenn ein Element $q \in H$ und ein positiv semi-definiter selbstadjungierter Spurklasse-Operator $Q \in \mathscr{S}_1(H)$ existieren, sodaß die zugehörige charakteristische Funktion durch

$$\widehat{\mu} : H \longrightarrow \mathbb{C} : h \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q|h)_H - \frac{1}{2}(Qh|h)_H}$$

gegeben ist; aufgrund des Zusammenhanges[3]

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(q|h)_H - \frac{1}{2}(Qh|h)_H} = \widehat{\mu}(h) = \widehat{\mu_h}(1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_h - \frac{1}{2}\beta_h^2} ,$$

[3] *Bemerkung.* Um die Übereinstimmung von $(q|h)_H$ mit α_h zu erreichen, ist das Vorzeichen anders als in DENK (2014) gewählt.

folgen daraus insbesondere die Relationen (wobei $h \in H$)

$$\big(q\big|h\big)_H = \alpha_h = \int_H \big(h\big|\eta\big)_H \,\mathrm{d}\mu(\eta)\,, \qquad \big(Qh\big|h\big)_H = \beta_h^2 = \int_H \big(h\big|\eta\big)_H^2 \,\mathrm{d}\mu(\eta) - \alpha_h^2\,,$$

und etwas allgemeiner gilt (wobei $h_1, h_2 \in H$)

$$\big(Qh_1\big|h_2\big)_H = \int_H \big(h_1\big|\eta\big)_H \big(h_2\big|\eta\big)_H \,\mathrm{d}\mu(\eta) - \big(q\big|h_1\big)_H \big(q\big|h_2\big)_H\,.$$

Das Gauß-Maß μ ist durch q und Q eindeutig bestimmt ist und vice versa. In Hinblick auf den Spezialfall $H = \mathbb{R}^d$ ist die Bezeichnung Normalverteilung mit Erwartungswert q und Kovarianzoperator Q gerechtfertigt

$$\mu = N\big(q, Q\big) : \mathscr{B}(H) \longrightarrow [0,1]\,.$$

Erklärung.

(i) Aufgrund der bereits angegebenen Überlegungen bleibt zu zeigen, daß sich bei Vorgabe von reellen Zahlen $(\alpha_h, \beta_h)_{h\in H}$ mit $\beta_h \geq 0$ für alle $h \in H$ aus den Relationen

$$\big(q\big|h\big)_H = \alpha_h\,, \quad \big(Qh\big|h\big)_H = \beta_h^2\,,$$

die Existenz eines Elementes $q \in H$ und eines linearen Operators $Q \in \mathscr{S}_1(H)$ ergibt.

(a) *Vorüberlegung.* Mittels Integraltransformation erhält man für Erwartungswert und Varianz die Darstellungen (setze $H \to \mathbb{R} : \eta \mapsto \xi = (h|\eta)_H$, verwende $\mu = \mu_h \circ (h|\cdot)_H$)

$$\alpha_h = \int_{\mathbb{R}} \xi \,\mathrm{d}\mu_h(\xi) = \int_H \big(h\big|\eta\big)_H \,\mathrm{d}\mu(\eta)\,, \qquad \beta_h^2 + \alpha_h^2 = \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \,\mathrm{d}\mu_h(\xi) = \int_H \big(h\big|\eta\big)_H^2 \,\mathrm{d}\mu(\eta)\,,$$

welche die Beschränktheit der auftretenden Integrale sicherstellen.

(b) *Existenz von $q \in H$.* Das Funktional

$$J : H \longrightarrow \mathbb{R} : h \longmapsto \int_H \big(h\big|\eta\big)_H \,\mathrm{d}\mu(\eta)$$

ist offensichtlich linear; das Hilfsresultat zur Abschätzung zeigt außerdem seine Stetigkeit (setze $d = 1$)

$$\begin{aligned} Jh = \int_H \big(h\big|\eta\big)_H \,\mathrm{d}\mu(\eta) = \alpha_h < \infty \\ \Longrightarrow \quad \int_H \big|\big(h\big|\eta\big)_H\big| \,\mathrm{d}\mu(\eta) \leq C\,\big\|h\big\|_H \\ \Longrightarrow \quad \big\|J\big\|_{\mathbb{R}\leftarrow H} = \sup_{\|h\|_H = 1} \big\|Jh\big\|_{\mathbb{R}} \leq C\,. \end{aligned}$$

Somit ist J ein Element des Dualraumes und entspricht nach dem Darstellungssatz von Riesz in eindeutiger Weise einem Element $q \in H$, nämlich $J = (q|\cdot)_H$, d.h. es gilt

$$\exists\, q \in H \quad \forall\, h \in H: \qquad Jh = \int_H \big(h\big|\eta\big)_H \,\mathrm{d}\mu(\eta) = \big(q\big|h\big)_H\,.$$

(c) *Existenz von $Q \in \mathscr{S}_1(H)$.* Analoge Überlegungen gelten für die stetige und symmetrische Bilinearform

$$B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R} : (h_1, h_2) \longmapsto \int_H \big(h_1\big|\eta\big)_H \big(h_2\big|\eta\big)_H \,\mathrm{d}\mu(\eta) - \big(q\big|h_1\big)_H \big(q\big|h_2\big)_H$$

und zeigen die Existenz und Eindeutigkeit eines stetigen und selbstadjungierten Operators Q, sodaß

$$\exists\, Q \in L(H) \text{ mit } Q^* = Q \quad \forall\, h_1, h_2 \in H :$$
$$B(h_1, h_2) = \int_H \big(h_1\big|\eta\big)_H \big(h_2\big|\eta\big)_H \,\mathrm{d}\mu(\eta) - \big(q\big|h_1\big)_H \big(q\big|h_2\big)_H = \big(Qh_1\big|h_2\big)_H = \big(h_1\big|Qh_2\big)_H .$$

Bei Gleichsetzen der Argumente folgt außerdem die positive-Semidefinitheit von Q (für $h \in H$)

$$\big(Qh\big|h\big)_H = \int_H \big(h\big|\eta\big)_H^2 \,\mathrm{d}\mu(\eta) - \big(q\big|h\big)_H^2 = \beta_h^2 \ge 0 .$$

Um zu zeigen, daß Q ein Spurklasse-Operator ist, werden zusätzliche Hilfsüberlegungen benötigt; die grundlegende Idee ist es, aus einer Abschätzung für die Exponentialfunktion auf die gewünschte Abschätzung für die Spur-Norm zu kommen

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(Qh|h)_H} \ge C \quad \longrightarrow \quad \big(Qh\big|h\big)_H \le C \quad \longrightarrow \quad \|Q\|_{\mathscr{S}_1} = \sum_{k \in K} \big(Q\,v_k\big|v_k\big)_H .$$

(d) *Erwartungswert Null.* Wie zuvor begründet, gilt (Integraltransformation $\zeta = \eta - q$)

$$\int_H \mathrm{e}^{\mathrm{i}(h|\eta)_H} \,\mathrm{d}\mu(\eta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q|h)_H - \frac{1}{2}(Qh|h)_H}$$
$$\Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(Qh|h)_H} = \int_H \mathrm{e}^{\mathrm{i}(h|\eta-q)_H} \,\mathrm{d}\mu(\eta) = \int_H \mathrm{e}^{\mathrm{i}(h|\zeta)_H} \,\mathrm{d}\mu(q+\zeta) .$$

Zur Vereinfachung setzen wir im Folgenden (entspricht Übergang zu $\mu(q+\cdot)$, bei einem translationsinvariantem Maß wie dem Lebesgue-Maß gilt $\mu(q+\cdot) = \mu$)

$$q = 0 .$$

(e) *Hilfsüberlegung.* Mittels der Identität (triviale Gleichheit $x = \frac{1}{2}\,2\,x$)

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(Qh|h)_H} &= \tfrac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(Qh|h)_H} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(Qh|h)_H}\Big) \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(Qh|h)_H} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(Q(-h)|(-h))_H}\Big) \\
&= \tfrac{1}{2}\bigg(\int_H \mathrm{e}^{\mathrm{i}(h|\eta)_H} \,\mathrm{d}\mu(\eta) + \int_H \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(h|\eta)_H} \,\mathrm{d}\mu(\eta)\bigg) \\
&= \int_H \cos\big(h\big|\eta\big)_H \,\mathrm{d}\mu(\eta)
\end{aligned}$$

und dem bekannten Resultat

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad \bigl|\sin x\bigr| \le |x| \\ &\Longrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R}: \quad 1 - \cos x = \cos\xi\Big|_x^0 = \int_0^x \sin\xi \,\mathrm{d}\xi \le \tfrac{1}{2}\, x^2 \end{aligned}$$

ergibt sich die Abschätzung (mit $c > 0$, direkte Abschätzung $\cos x \le 1$, Wahrscheinlichkeitsmaß)

$$\begin{aligned} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(Qh|h)_H} &= \int_H \bigl(1 - \cos\bigl(h\big|\eta\bigr)_H\bigr)\,\mathrm{d}\mu(\eta) \\ &= \int_{\|\eta\|_H \le c} \bigl(1 - \cos\bigl(h\big|\eta\bigr)_H\bigr)\,\mathrm{d}\mu(\eta) \\ &\quad + \int_{\|\eta\|_H > c} \bigl(1 - \cos\bigl(h\big|\eta\bigr)_H\bigr)\,\mathrm{d}\mu(\eta) \\ &\le \int_{\|\eta\|_H \le c} \tfrac{1}{2}\,\bigl(h\big|\eta\bigr)_H^2\,\mathrm{d}\mu(\eta) + \int_{\|\eta\|_H > c} 2\,\mathrm{d}\mu(\eta) \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{\|\eta\|_H \le c} \bigl(h\big|\eta\bigr)_H^2\,\mathrm{d}\mu(\eta) + 2\,\mu\bigl(\bigl\{\eta \in H : \|\eta\|_H > c\bigr\}\bigr)\,. \end{aligned}$$

Im Folgenden wird gezeigt, daß der durch das Integral über einen beschränkten Bereich definierte Operator auf einen Spurklasse-Operator führt

$$\tfrac{1}{2}\int_{\|\eta\|_H \le c} \bigl(h\big|\eta\bigr)_H^2\,\mathrm{d}\mu(\eta)\,.$$

(f) *Modifizierter Operator.* Analog zu den obigen Überlegungen erhält man für jede Konstante $c > 0$ mittels der stetigen und symmetrischen Bilinearform

$$B_c : H \times H \longrightarrow \mathbb{R} : (h_1, h_2) \longmapsto \int_{\|\eta\|_H \le c} \bigl(h_1\big|\eta\bigr)_H \bigl(h_2\big|\eta\bigr)_H\,\mathrm{d}\mu(\eta)$$

einen eindeutig bestimmten, stetigen, selbstadjungierten und positiv semi-definiten Operator

$$\begin{aligned} &\exists\, Q_c \in L(H) \text{ mit } Q_c^* = Q_c \quad \forall\, h_1, h_2, h \in H: \\ &\bigl(Q_c h_1\big|h_2\bigr)_H = \int_{\|\eta\|_H \le c} \bigl(h_1\big|\eta\bigr)_H \bigl(h_2\big|\eta\bigr)_H\,\mathrm{d}\mu(\eta)\,, \\ &\bigl(Q_c h\big|h\bigr)_H = \int_{\|\eta\|_H \le c} \bigl(h\big|\eta\bigr)_H^2\,\mathrm{d}\mu(\eta) \ge 0\,. \end{aligned}$$

Für ein beliebiges vollständiges Orthonormalsystem $(v_k)_{k\in K}$ folgt außerdem die Abschätzung (verwende zuvor angegebenes Resultat für Norm, Parseval'sche Identität, Wahrscheinlichkeitsmaß)

$$\begin{aligned}\|Q_c\|_{\mathscr{S}_1} &= \sum_{k\in K} \big(Q_c v_k\big|v_k\big)_H \\ &= \sum_{k\in K} \int_{\|\eta\|_H\le c} \big(v_k\big|\eta\big)_H^2 \,\mathrm{d}\mu(\eta)\,, \\ &= \int_{\|\eta\|_H\le c} \sum_{k\in K} \big(\eta\big|v_k\big)_H^2 \,\mathrm{d}\mu(\eta)\,, \\ &= \int_{\|\eta\|_H\le c} \|\eta\|_H^2 \,\mathrm{d}\mu(\eta) \\ &\le c^2 < \infty\,,\end{aligned}$$

was die Eigenschaft $Q_c \in \mathscr{S}_1(H)$ zeigt.

(g) *Spezielle Wahl.* Wählt man $c_0 > 0$ und $h_0 \in H$ in spezieller Weise, ergibt sich die Relation (Definition von Q_c, Logarithmus monoton steigend)

$$\begin{aligned}&\begin{cases}\mu\big(\{\eta\in H : \|\eta\|_H > c_0\}\big) \le \frac{1}{8}\,, \\ \big(Q_{c_0} h_0\big|h_0\big)_H = \int_{\|\eta\|_H\le c_0} \big(h_0\big|\eta\big)_H^2 \le 1\end{cases} \\ \Longrightarrow\quad & 1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(Qh_0|h_0)_H} \le \frac{1}{2}\int_{\|\eta\|_H\le c_0} \big(h_0\big|\eta\big)_H^2 \,\mathrm{d}\mu(\eta) + 2\,\mu\big(\{\eta\in H : \|\eta\|_H > c_0\}\big) \le \tfrac{3}{4} \\ \Longrightarrow\quad & \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(Qh_0|h_0)_H} \ge \tfrac{1}{4} \\ \Longrightarrow\quad & -\tfrac{1}{2}\big(Qh_0\big|h_0\big)_H \ge \ln\tfrac{1}{4} = -\ln 4 \\ \Longrightarrow\quad & \big(Qh_0\big|h_0\big)_H \le 2\ln 4\,;\end{aligned}$$

man beachte, daß die spezielle Wahl von c_0 für die erhaltene Schranke keine Rolle spielt.

(h) *Erweiterung.* Mittels geeigneter Skalierung ergibt sich nun auch für beliebige Elemente $h \in H$ mit $(Q_c h|h)_H \neq 0$ die Gültigkeit der folgenden Abschätzung (Verwendung der Schranke $\big(Qh_0\big|h_0\big)_H \le C = 2\ln 4$)

$$\begin{aligned}h_0 = \frac{1}{\sqrt{(Q_c h|h)_H}}\,h \quad&\Longleftrightarrow\quad h = \sqrt{\big(Q_c h\big|h\big)_H}\,h_0\,, \\ \big(Qh\big|h\big)_H = \big(Q_c h\big|h\big)_H &\big(Qh_0\big|h_0\big)_H \le C\,\big(Q_c h\big|h\big)_H\,;\end{aligned}$$

da sich $\big(Qh\big|h\big)_H$ durch $\big(Q_c h\big|h\big)_H$ abschätzen läßt, zeigt dies $Q \in \mathscr{S}_1(H)$, denn

$$\|Q\|_{\mathscr{S}_1} = \sum_{k\in K} \big(Q\,v_k\big|v_k\big)_H \le C \sum_{k\in K} \big(Q_c\,v_k\big|v_k\big)_H = C\,\|Q_c\|_{\mathscr{S}_1} < \infty\,.$$

(ii) Angenommen, die charakteristische Funktion von $\mu : \mathscr{B}(H) \to [0,1]$ ist von der Form

$$\widehat{\mu}(h) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(q|\eta)_H - \frac{1}{2}(Q\eta|\eta)_H}\,,$$

so folgt mittels des Resultates für die charakteristischen Funktionen ($d = 1$, $\kappa \in \mathbb{R}$)

$$\widehat{\mu_h}(\kappa) = \widehat{\mu}\big(\kappa h\big) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q|\kappa h)_H - \frac{1}{2}(Q\kappa h|\kappa h)_H} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(q|h)_H \kappa - \frac{1}{2}(Qh|h)_H \kappa^2}.$$

Dies zeigt, daß die Bedingung an die charakteristische Funktion eines reellen Gauß-Maßes mit

$$\alpha_h = \big(q\big|h\big)_H \in \mathbb{R}, \qquad \beta_h^2 = \big(Qh\big|h\big)_H \in \mathbb{R},$$

erfüllt sind; da Q nach Voraussetzung positiv semi-definit ist, gilt außerdem $\beta_h^2 \geq 0$. $\diamond$

2.2 Gauß'sche Zufallsvariablen mit Werten in Hilbert-Räumen

Situation. Wie zuvor bezeiche $(\Omega, \mathscr{A}, \mu_\Omega)$ den zugrundeliegenden vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum und $(H, (\cdot|\cdot)_H, \|\cdot\|_H)$ einen mit der Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(H)$ versehenen separablen reellen Hilbert-Raum.

Definition (Gauß'sche Zufallsvariable). Eine Zufallsvariable $Z:\Omega\to H$ heißt eine Gauß'sche Zufallsvariable, wenn das induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß ein Gauß-Maß ist; in Übereinstimmung mit den vorhergehenden Überlegungen wird das induzierte Maß mit (Urbild)

$$\mu : \mathscr{B}(H) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \mu(A) = \mu_\Omega\big(Z^{-1}(A)\big)$$

bezeichnet.

Vorbemerkung. Im Folgenden wird eine Darstellung für Gauß'sche Zufallsvariablen hergeleitet; dabei werden die Eigenschaften der durch Skalarprodukte definierten Zufallsvariablen wesentlich verwendet.

Eigenschaften zugehöriger Zufallsvariablen. Es bezeiche $Z:\Omega\to H:\omega\mapsto Z(\omega)$ eine Gauß'sche Zufallsvariable mit Erwartungswert $q\in H$ und positiv semi-definitem selbstadjungiertem Kovarianzoperator $Q\in\mathscr{S}_1(H)$.

(i) *Erwartungswert und Varianz.* Für jedes Element $h\in H$ ist die zugehörige reellwertige Zufallsvariable

$$z_h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto \big(Z(\omega)\big|h\big)_H$$

eine Gauß'sche Zufallsvariable; insbesondere gilt für das induzierte Maß die Relation[4]

$$\mu_{z_h} = \mu\circ\big(\cdot\,\big|h\big)_H^{-1} = \mu_h : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]\,.$$

[4] *Bemerkung.* Es ist zu zeigen, daß für jedes Element $h\in H$ die zugehörige reellwertige Zufallsvariable

$$z_h = \big(\cdot\,\big|h\big)_H\circ Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Gauß'sche Zufallsvariable ist, das heißt, daß das induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu_{z_h} = \mu_\Omega\circ z_h^{-1} : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$$

ein reelles Gauß-Maß ist.
(a) Per Definition ist $Z:\Omega\to H$ eine Gauß'sche Zufallsvariable, wenn das induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu = \mu_\Omega\circ Z^{-1} : \mathscr{B}(H) \longrightarrow [0,1]$$

ein Gauß-Maß ist, das heißt, für alle Elemente $h\in H$ ist das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu_h = \mu\circ\big(\cdot\,\big|h\big)_H^{-1} : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$$

Erwartungswert und Varianz sind durch folgende Relationen gegeben

$$E(z_h) = \int_\Omega \big(Z(\omega)\big|h\big)_H \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = \big(q\big|h\big)_H ,$$
$$V(z_h) = \int_\Omega \big(Z(\omega)\big|h\big)_H^2 \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) - E(z_h)^2 = \big(Qh\big|h\big)_H \geq 0 .$$

Erklärung. Aus dem zuvor angegebenen Resultat zur Charakterisierung eines Gauß-Maßes folgt (wobei $h \in H$)

$$\int_H \big(h\big|\eta\big)_H \,\mathrm{d}\mu(\eta) = \big(q\big|h\big)_H ,$$
$$\int_H \big(h\big|\eta\big)_H^2 \,\mathrm{d}\mu(\eta) - \big(q\big|h\big)_H^2 = \big(Qh\big|h\big)_H .$$

Die Bestimmung des Erwartungswert führt somit auf (wobei $h \in H$, setze $\eta = Z(\omega) \in H$ bzw. $\omega \in Z^{-1}(\eta) \subseteq \Omega$ und verwende $\mu = \mu_\Omega \circ Z^{-1}$)

$$\begin{aligned} E(z_h) &= \int_\Omega \big(Z(\omega)\big|h\big)_H \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) \\ &= \int_H \big(\eta\big|h\big)_H \,\mathrm{d}\mu(\eta) \\ &= \big(q\big|h\big)_H ; \end{aligned}$$

ähnliche Überlegungen gelten für die Varianz (wobei $h \in H$)

$$\begin{aligned} V(z_h) &= E\big(z_h^2\big) - E(z_h)^2 \\ &= \int_H \big(\eta\big|h\big)_H^2 \,\mathrm{d}\mu(\eta) - \big(q\big|h\big)_H^2 \\ &= \big(Qh\big|h\big)_H \end{aligned}$$

und zeigen das gewünschte Resultat. ◇

(ii) *Kovarianzoperator.* Der Kovarianzoperator erfüllt für alle Elemente $h_1, h_2 \in H$ die Relation
$$E\Big(\big(Z - q\big|h_1\big)_H \big(Z - q\big|h_2\big)_H\Big) = \big(Qh_1\big|h_2\big)_H .$$

---

ein reelles Gauß-Maß.

(b) Man beachte, daß folgender Zusammenhang zwischen den von Z und z_h induzierten Maßen besteht (Urbild)

$$z_h = \big(\cdot\big|h\big)_H \circ Z , \qquad z_h^{-1} = Z^{-1} \circ \big(\cdot\big|h\big)_H^{-1} ,$$
$$\mu = \mu_\Omega \circ Z^{-1} ,$$
$$\mu_{z_h} = \mu_\Omega \circ z_h^{-1} = \mu_\Omega \circ Z^{-1} \circ \big(\cdot\big|h\big)_H^{-1} = \mu \circ \big(\cdot\big|h\big)_H^{-1} = \mu_h .$$

Das gewünschte Resultat, daß z_h eine Gauß'sche Zufallsvariable ist, ist somit eine direkte Folgerung der Definition.

Erklärung. Verwendet man das etwas allgemeinere Resultat

$$\int_H \big(h_1\big|\eta\big)_H \big(h_2\big|\eta\big)_H \,\mathrm{d}\mu(\eta) - \big(q\big|h_1\big)_H \big(q\big|h_2\big)_H = \big(Qh_1\big|h_2\big)_H\,,$$

folgt wie zuvor mittels Transformationslemma die Identität

$$\begin{aligned}
E\Big(\big(Z-q\big|h_1\big)_H \big(Z-q\big|h_2\big)_H\Big) &= \int_H \big(\eta-q\big|h_1\big)_H \big(\eta-q\big|h_2\big)_H \,\mathrm{d}\mu(\eta) \\
&= \int_H \big(\eta\big|h_1\big)_H \big(\eta\big|h_2\big)_H \,\mathrm{d}\mu(\eta) \\
&\qquad - \big(q\big|h_2\big)_H \int_H \big(\eta\big|h_1\big)_H \,\mathrm{d}\mu(\eta) \\
&\qquad - \big(q\big|h_1\big)_H \int_H \big(\eta\big|h_2\big)_H \,\mathrm{d}\mu(\eta) \\
&\qquad + \big(q\big|h_1\big)_H \big(q\big|h_2\big)_H \int_H 1 \,\mathrm{d}\mu(\eta) \\
&= \int_H \big(\eta\big|h_1\big)_H \big(\eta\big|h_2\big)_H \,\mathrm{d}\mu(\eta) - \big(q\big|h_1\big)_H \big(q\big|h_2\big)_H \\
&= \big(Qh_1\big|h_2\big)_H\,,
\end{aligned}$$

welche zu zeigen war. ◇

(iii) *Integrabilität.* Unter den angegebenen Voraussetzungen ist $Z \in L^2(\Omega, H)$ sichergestellt, denn es gilt die Implikation

$$E\Big(\big\|Z-q\big\|_H^2\Big) = \mathrm{Spur}(Q) \quad\Longrightarrow\quad \big\|Z\big\|_{L^2(\Omega,H)}^2 = \int_\Omega \big\|Z(\omega)\big\|_H^2 \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = E\Big(\big\|Z\big\|_H^2\Big) < \infty\,.$$

Erklärung. Man beachte, daß ähnliche Überlegungen bei der Einführung des Kovarianzoperators angegeben wurden. Nach Wahl eines vollständigen Orthonormalsystemes $(v_k)_{k\in K}$ von H ergibt sich (Parseval'sche Identität, setze $h_1 = h_2 = v_k$ in (ii), Resultat zur Spur, Linearität des Erwartungswertes, Konvergenz der Reihe gegeben)

$$\begin{gathered}
\big\|Z-q\big\|_H^2 = \sum_{k\in K} \big(Z-q\big|v_k\big)_H^2\,, \\
E\Big(\big(Z-q\big|v_k\big)_H^2\Big) = \big(Qv_k\big|v_k\big)_H\,, \\
E\Big(\big\|Z-q\big\|_H^2\Big) = \sum_{k\in K} E\Big(\big(Z-q\big|v_k\big)_H^2\Big) = \sum_{k\in K} \big(Qv_k\big|v_k\big)_H = \mathrm{Spur}(Q) < \infty\,;
\end{gathered}$$

offensichtlich folgt damit auch $E(\|Z\|_H^2) < \infty$, denn

$$\begin{aligned}
E\Big(\big\|Z-q\big\|_H^2\Big) &= \int_\Omega \big(Z(\omega)-q\big|Z(\omega)-q\big)_H \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) \\
&= \int_\Omega \big\|Z(\omega)\big\|_H^2 \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) - 2\int_\Omega \big(Z(\omega)\big|q\big)_H \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) + \int_\Omega \big\|q\big\|_H^2 \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) \\
&= E\Big(\big\|Z\big\|_H^2\Big) - \big\|q\big\|_H^2\,.
\end{aligned}$$

Dies zeigt das gewünschte Resultat. ◇

Vorüberlegungen.

(i) *Voraussetzungen.* Es bezeichne $Z:\Omega\to H$ eine Gauß'sche Zufallsvariable mit Erwartungswert $q\in H$ und mit positiv semi-definitem selbstadjungiertem Kovarianzoperator $Q\in\mathscr{S}_1(H)$; weiters bezeichne $(e_k)_{k\in K}$ ein Orthonormalsystem von Eigenfunktionen mit zugehörigen positiven Eigenwerten $(\lambda_k)_{k\in K}$

$$Q\,e_k=\lambda_k\,e_k\,,\quad \lambda_k>0\,,\qquad k\in K\,,$$

und $(e_k)_{k\in\widetilde{K}}$ das entsprechende vollständige Orthonormalsystem von H (Ergänzung um orthonormale Eigenfunktionen zum Eigenwert Null)

$$Q\,e_k=0\,,\qquad k\in\widetilde{K}\setminus K\,.$$

(ii) *Darstellung mittels Eigenfunktionen.* Wie gezeigt wurde, ist für jedes Element $h\in H$ die durch das Skalarprodukt definierte Zufallsvariable eine Gauß'sche Zufallsvariable

$$z_h:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}:\omega\longmapsto\big(Z(\omega)\big|h\big)_H\,,\qquad E(z_h)=\big(q\big|h\big)_H\,,\qquad V(z_h)=\big(Qh\big|h\big)_H\,.$$

Verwendet man die Darstellung eines Bildelementes $Z(\omega)\in H$ bezüglich $(e_k)_{k\in\widetilde{K}}$ führt dies insbesondere auf die Relationen

$$\begin{gathered}
Z(\omega)=\sum_{k\in\widetilde{K}}\big(Z(\omega)\big|e_k\big)_H\,e_k\,,\\
z_{e_k}:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}:\omega\longmapsto\big(Z(\omega)\big|e_k\big)_H\,,\qquad k\in\widetilde{K}\,,\\
E(z_{e_k})=\big(q\big|e_k\big)_H\,,\qquad k\in\widetilde{K}\,,\\
V(z_{e_k})=\big(Q\,e_k\big|e_k\big)_H=\lambda_k>0\,,\quad k\in K\,,\qquad V(z_{e_k})=\big(Q\,e_k\big|e_k\big)_H=0\,,\quad k\in\widetilde{K}\setminus K\,.
\end{gathered}$$

Eine lineare Translation führt offenbar auf Zufallsvariablen mit Erwartungswert Null

$$\begin{gathered}
Z(\omega)-q=\sum_{k\in K}\big(Z(\omega)-q\big|e_k\big)_H\,e_k+\sum_{k\in\widetilde{K}\setminus K}\big(Z(\omega)-q\big|e_k\big)_H\,e_k\,,\\
\widetilde{z}_{e_k}:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}:\omega\longmapsto\big(Z(\omega)-q\big|e_k\big)_H\,,\qquad k\in\widetilde{K}\,,\\
E(\widetilde{z}_{e_k})=0\,,\quad k\in\widetilde{K}\,,\qquad V(\widetilde{z}_{e_k})=\lambda_k>0\,,\quad k\in K\,,\qquad V(\widetilde{z}_{e_k})=0\,,\quad k\in\widetilde{K}\setminus K\,;
\end{gathered}$$

da die zweite Summe in Hinblick auf Erwartungswert und Varianz keinen Beitrag liefert, ist in diesem Sinne die Schreibweise

$$\begin{gathered}
Z(\omega)-q=\sum_{k\in K}\big(Z(\omega)-q\big|e_k\big)_H\,e_k\,,\\
\widetilde{z}_{e_k}:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}:\omega\longmapsto\big(Z(\omega)-q\big|e_k\big)_H\,,\qquad k\in K\,,\\
E(\widetilde{z}_{e_k})=0\,,\quad V(\widetilde{z}_{e_k})=\lambda_k>0\,,\qquad k\in K\,,
\end{gathered}$$

gerechtfertigt. Mittels Skalierung erhält man somit die folgende Darstellung mit standardnormalverteilten Zufallsvariablen[5]

$$
\begin{gathered}
Z(\omega) - q = \sum_{k\in K} \sqrt{\lambda_k}\,\beta_k(\omega)\,e_k\,,\\
\beta_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\big(Z(\omega) - q\big|e_k\big)_H\,, \qquad k \in K\,,\\
E(\beta_k) = 0\,, \quad V(\beta_k) = 1\,, \qquad k \in K\,.
\end{gathered}
$$

(iii) *Stochastische Unabhängigkeit.* Mittels der zuvor abgeleiteten Identität (mit $h_1, h_2 \in H$)

$$E\Big(\big(Z - q\big|h_1\big)_H \big(Z - q\big|h_2\big)_H\Big) = \big(Qh_1\big|h_2\big)_H$$

und wegen der Orthogonalität der Familie $(e_k)_{k\in K}$, das heißt (wobei $k, \ell \in K$)

$$k \neq \ell: \qquad \big(e_k\big|e_\ell\big)_H = 0\,,$$

folgt für den Erwartungswertes eines Produktes die Identität (Einsetzen der Definition, Linearität des Erwartungswertes, Eigenfunktion)

$$
\begin{aligned}
k \neq \ell: \qquad E\big(\beta_k\,\beta_\ell\big) &= E\bigg(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\big(Z - q\big|e_k\big)_H \frac{1}{\sqrt{\lambda_\ell}}\big(Z - q\big|e_\ell\big)_H\bigg)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k\lambda_\ell}}\,E\Big(\big(Z - q\big|e_k\big)_H \big(Z - q\big|e_\ell\big)_H\Big)\\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k\lambda_\ell}}\big(Q\,e_k\big|e_\ell\big)_H\\
&= \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_\ell}}\,\big(e_k\big|e_\ell\big)_H\\
&= 0\,,
\end{aligned}
$$

was die Unkorreliertheit und damit die stochastische Unabhängigkeit von $(\beta_k)_{k\in K}$ zeigt.[6]

[5] *Bemerkung.* Da jede Zufallsvariable der Form $c\big(Z - q\big|h\big)_H : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Gauß'sche Zufallsvariable ist, ist auch jede Linearkombination wie etwa (wobei $J \in \mathbb{N}$ mit $J \leq K$ und $c_1, \dots, c_J \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{j=1}^{J} c_j\,\beta_j : \Omega \to \mathbb{R}$$

eine Gauß'sche Zufallsvariable, wie man durch Umformen leicht sieht

$$
\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{J} c_j\,\beta_j = \sum_{j=1}^{J} c_j\,\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\big(Z - q\big|e_j\big)_H = \big(Z - q\big|\sum_{j=1}^{J} c_j\,\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\,e_j\big)_H\,,\\
\Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{J} c_j\,\beta_j = \big(Z - q\big|h\big)_H \ \text{ mit } \ h = \sum_{j=1}^{J} c_j\,\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\,e_j\,.
\end{gathered}
$$

Dies impliziert übrigens auch, daß $(\beta_1, \dots, \beta_J) : \Omega \to \mathbb{R}^J$ eine Gauß'sche Zufallsvariable ist.

[6] *Bemerkung.* Man beachte, daß aus der stochastischen Unabhängigkeit von reellwertigen Zufallsvariablen deren Unkorreliertheit folgt; die Umkehrung ist im Allgemeinen nicht richtig. Im Spezialfall von normalverteilten Zufallsvariablen ist jedoch stochastiche Unabhängigkeit und Unkorreliertheit äquivalent.

Resultat (Darstellung von Gauß'schen Zufallsvariablen, Existenz von Gauß-Maßen). Es sei $q \in H$ und $Q \in \mathscr{S}_1(H)$ ein positiv semi-definiter selbstadjungierter Spurklasse-Operator mit zugehörigen orthonormalen Eigenfunktionen zu positiven Eigenwerten

$$\big(e_k\big)_{k\in K}\,, \qquad Q\,e_k = \lambda_k\,e_k\,, \quad \lambda_k > 0\,, \qquad k \in K\,.$$

Eine Zufallsvariable $Z : \Omega \to H$ ist genau dann eine Gauß'sche Zufallsvariable mit Erwartungswert q und Kovarianzoperator Q, wenn die folgende Darstellung mit stochastisch unabhängigen standardnormalverteilten reellen Zufallsvariablen gültig ist (insbesondere gilt $V(\beta_k) = E(\beta_k^2) = 1$ für $k \in K$)

$$\begin{gathered} Z(\omega) = q + \sum_{k\in K} \sqrt{\lambda_k}\,\beta_k(\omega)\,e_k\,, \qquad \omega \in \Omega\,, \\ \beta_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\big(Z(\omega) - q\big|e_k\big)_H\,, \qquad k \in K\,, \\ E(\beta_k) = 0\,, \qquad E\big(\beta_k\,\beta_\ell\big) = \big(e_k\big|e_\ell\big)_H = \delta_{k\ell}\,, \qquad k,\ell \in K\,; \end{gathered}$$

die Reihe konvergiert im Sinn des $L^2(\Omega, H)$, genauer

$$\big\|Z - q\big\|_{L^2(\Omega,H)}^2 = \mathrm{Spur}(Q)\,.$$

Dies zeigt insbesondere die Existenz des Gauß-Maßes $\mu = N(q,Q) : \mathscr{B}(H) \to [0,1]$, definiert über das induzierte Maß

$$\mu = \mu_\Omega \circ Z^{-1}\,.$$

Erklärung. Aufgrund der obigen Überlegungen ist für die erste Implikation nur mehr die Konvergenz der Reihe in $L^2(\Omega, H)$ nachzuweisen.

(i) *Konvergenz.* Mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation $(e_k|e_\ell)_H = \delta_{k\ell}$ für $k,\ell \in K$ berechnet sich die L^2-Norm wie folgt (wobei $\omega \in \Omega$, beachte $\beta_k(\omega) \in \mathbb{R}$, Satz von Pythagoras, verwende $V(\beta_k) = E(\beta_k^2) = 1$)

$$\begin{aligned} \Big\|\sum_{k\in K} \sqrt{\lambda_k}\,\beta_k(\omega)\,e_k\Big\|_H^2 &= \sum_{k,\ell\in K} \sqrt{\lambda_k}\sqrt{\lambda_\ell}\,\beta_k(\omega)\,\beta_\ell(\omega)\,\big(e_k\big|e_\ell\big)_H \\ &= \sum_{k\in K} \lambda_k\,\big(\beta_k(\omega)\big)^2\,, \\ \Big\|\sum_{k\in K} \sqrt{\lambda_k}\,\beta_k\,e_k\Big\|_{L^2(\Omega,H)}^2 &= \sum_{k\in K} \lambda_k \int_\Omega \big(\beta_k(\omega)\big)^2\,\mathrm{d}\mu_\Omega \\ &= \sum_{k\in K} \lambda_k \\ &= \mathrm{Spur}(Q) < \infty\,. \end{aligned}$$

Gibt man sich umgekehrt eine Zufallsvariable der Form (Werte $Z(\omega) - q$ sind durch Koeffizienten $(\sqrt{\lambda_k}\,\beta_k(\omega))_{k\in K}$ im obigen Sinne eindeutig bestimmt)

$$Z = q + \sum_{k\in K} \sqrt{\lambda_k}\,\beta_k\,e_k : \Omega \longrightarrow H$$

vor, so ist das zugehörige induzierte Maß $\mu = \mu_\Omega \circ Z^{-1} : \mathscr{B}(H) \to [0,1]$ ein Gauß-Maß auf dem zugrundeliegenden Hilbert-Raum; insbesondere wird durch die Eigenwerte $(\lambda_k)_{k\in K}$ und die zugehörigen Eigenfunktionen $(e_k)_{k\in K}$ ein Spurklasse-Operator definiert. Vgl. auch Denk (2014). $\diamond$

2.3 Wiener-Prozesse mit Werten in Hilbert-Räumen

Situation. Wie zuvor bezeiche $(\Omega, \mathscr{A}, \mu_\Omega)$ den zugrundeliegenden vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum und $(H, (\cdot|\cdot)_H, \|\cdot\|_H)$ einen mit der Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(H)$ versehenen separablen reellen Hilbert-Raum. Weiters sei $T \in (0, \infty)$.

Vorbemerkung. Im Folgenden wird die Definition eines Q-Wiener-Prozesses mit Werten im zugrundeliegenden Hilbert-Raum angegeben; dazu wird insbesondere die Charakterisierung der stochastischen Unabhängigkeit von Zufallsvariablen benötigt.[7]

Definition (Stochastische Unabhängigkeit).

(i) *Stochastische Unabhängigkeit von Mengensystemen.* Die Mengensysteme $\mathscr{M}_1 \subseteq \mathscr{A}$ und $\mathscr{M}_2 \subseteq \mathscr{A}$ heißen stochastisch unabhängig, wenn alle Mengen $M_1 \in \mathscr{M}_1$ und $M_2 \in \mathscr{M}_2$ stochastisch unabhängig sind, das heißt, es gilt die Relation

$$\mu_\Omega(M_1 \cap M_2) = \mu_\Omega(M_1)\, \mu_\Omega(M_2)\,.$$

(ii) *Stochastische Unabhängigkeit von Zufallsvariablen.* Die Zufallsvariablen $Z_1 : \Omega \to H$ und $Z_2 : \Omega \to H$ heißen stochastisch unabhängig, wenn für alle Mengen $B_1, B_2 \in \mathscr{B}(H)$ die zugehörigen Urbildmengen $A_1 = Z_1^{-1}(B_1) \in \mathscr{A}$ und $A_2 = Z_2^{-1}(B_2) \in \mathscr{A}$ unabhängig sind, das heißt, es gelte die Identität

$$\mu_\Omega(A_1 \cap A_2) = \mu_\Omega(A_1)\, \mu_\Omega(A_2)\,.$$

(iii) *Stochastische Unabhängigkeit einer Zufallsvariablen von einem Mengensystem.* Eine Zufallsvariable $Z : \Omega \to H$ heißt stochastisch unabhängig von einem Mengensystem $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{A}$, wenn die erzeugte σ-Algebra (Initial-σ-Algebra)

$$\sigma\Big(Z^{-1}\big(\mathscr{B}(H)\big)\Big) \subseteq \mathscr{A}$$

und $\mathscr{M}$ unabhängige Mengensysteme sind.

Bemerkung. Im Spezialfall zweier reellwertiger Zufallsvariablen folgt aus deren stochastischer Unabhängigkeit die Relation

$$z_1, z_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$
$$E(z_1 z_2) = E(z_1)\, E(z_2)\,,$$
$$\int_\Omega z_1(\omega)\, z_2(\omega)\, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = \int_\Omega z_1(\omega)\, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) \int_\Omega z_2(\omega)\, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\,.$$

Für zwei Zufallsvariablen $Z_1, Z_2 : \Omega \to H$ mit Werten in einem Hilbert-Raum ist das Produkt $Z_1(\omega)\, Z_2(\omega)$ im Allgemeinen jedoch nicht wohldefiniert.

[7] *Bemerkung.* Zur Vereinfachung wird hier nur der Spezialfall von zwei Zufallsvariablen betrachtet; für die allgemeine Definition sei auf Denk (2014) verwiesen.

Erinnerung (Stochastischer Prozeß, Pfad, Stetigkeit).

(i) *Stochastischer Prozeß.* Ein zeitlich kontinuierlicher stochastischer Prozeß in H ist eine Familie von Zufallsvariablen $(Z(t))_{t\in[0,T]}$ mit $Z(t):\Omega\to H$ für $t\in[0,T]$.

(ii) *Pfad, Stetigkeit.* Für ein Element $\omega\in\Omega$ wird die zugehörige Funktion

$$[0,T]\longrightarrow H : t\longmapsto \big(Z(t)\big)(\omega)$$

als Pfad bezeichnet. Ein zeitlich kontinuierlicher stochastischer Prozeß heißt stetig, wenn alle Pfade stetig sind.

(iii) *Identifikation.* Wie üblich wird ein stochastischer Prozeß $(Z(t))_{t\in[0,T]}$ mit der zugehörigen Zufallsvariable $Z:\Omega\to\{f:[0,T]\to H\}:\omega\to[t\mapsto(Z(t))(\omega)]$ bzw. mit der Funktion $Z:\Omega\times[0,T]\to H:(\omega,t)\to(Z(t))(\omega)$ identifiziert, vgl. Anhang.

Definition (Wiener-Prozeß, Brown'sche Bewegung). Es sei $Q\in\mathscr{S}_1(H)$ ein positiv semidefiniter selbstadjungierter Spurklasse-Operator. Ein stochastische Prozeß

$$\big(W(t)\big)_{t\in[0,T]}, \qquad W(t):\Omega\longrightarrow H, \quad t\in[0,T],$$

wird als Standard-Q-Wiener-Prozeß oder Q-Brown'sche Bewegung bezeichnet, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) *Anfangszeitpunkt.* Es ist $W(0)=0$ für fast alle $\omega\in\Omega$, d.h. es gilt

$$\mu_\Omega\Big(\big\{\omega\in\Omega:\big(W(0)\big)(\omega)=0\big\}\Big)=1\,.$$

(ii) *Stetigkeit.* Für fast alle Elemente $\omega\in\Omega$ ist der zugehörige Pfad stetig, d.h. es gilt

$$\mu_\Omega\Big(\big\{\omega\in\Omega:\text{Pfad }[0,T]\to H:t\mapsto\big(W(t)\big)(\omega)\text{ ist stetig}\big\}\Big)=1\,.$$

(iii) *Stochastische Unabhängigkeit.* Für beliebige Zeitpunkte $0=t_0<t_1<\cdots<t_K\le T$ sind die Zufallsvariablen (Zuwächse)

$$W(t_1), W(t_2)-W(t_1),\dots,W(t_K)-W(t_{K-1})$$

stochastisch unabhängig.

(iv) *Normalverteilung.* Für beliebige Zeitpunkte $t_1,t_2\in[0,T]$ mit $t_1<t_2$ ist $W(t_2)-W(t_1)$ eine Gauß'sche Zufallsvariable mit Erwartungswert Null und Kovarianzoperator $(t_2-t_1)Q$.

Vorüberlegungen.

(i) *Voraussetzungen.* Wie zuvor bezeichne $Q \in \mathscr{S}_1(H)$ einen positiv semi-definiten selbstadjungierten Spurklasse-Operator mit zugehörigen orthonormalen Eigenfunktionen zu positiven Eigenwerten

$$\big(e_k\big)_{k\in K}, \qquad Q\,e_k = \lambda_k\,e_k\,, \quad \lambda_k > 0\,, \qquad k \in K\,.$$

Es sei $(W(t))_{t\in[0,T]}$ ein Q-Wiener-Prozeß mit Werten im Hilbert-Raum H; insbesondere ist also $W(t): \Omega \to H$ eine Gauß'sche Zufallsvariable mit Erwartungswert Null und Kovarianzoperator $t\,Q$.

(ii) *Darstellung mittels Eigenfunktionen.* Das zuvor angegebene Resultat besagt, daß für jeden Zeitpunkt $t \in T$ die folgende Darstellung mit stochastisch unabhängigen standardnormalverteilten reellen Zufallsvariablen gültig ist (somit $V(\beta_k(t)) = E((\beta_k(t))^2) = 1$ für $k \in K$, Konvergenz in $L^2(\Omega, H)$)

$$\begin{gathered}
\big(W(t)\big)(\omega) = \sum_{k\in K} \sqrt{t\lambda_k}\,\big(\beta_k(t)\big)(\omega)\,e_k\,, \qquad \omega \in \Omega\,,\\
\beta_k(t): \Omega \longrightarrow \mathbb{R}: \omega \longmapsto \tfrac{1}{\sqrt{t\lambda_k}}\Big(\big(W(t)\big)(\omega)\Big|e_k\Big)_H, \qquad k \in K\,,\\
E\big(\beta_k(t)\big) = 0\,, \qquad E\big(\beta_k(t)\,\beta_\ell(t)\big) = \big(e_k\big|e_\ell\big)_H = \delta_{k\ell}\,, \qquad k,\ell \in K\,,\\
\big\|W(t)\big\|^2_{L^2(\Omega,H)} = \operatorname{Spur}(t\,Q)\,.
\end{gathered}$$

Mittels der Skalierung $w_k(t) = \sqrt{t}\,\beta_k(t)$ für $k \in K$ erhält man damit die Darstellung (insbesondere $V(w(t)) = t$ für $k \in K$)

$$\begin{gathered}
\big(W(t)\big)(\omega) = \sum_{k\in K} \sqrt{\lambda_k}\,\big(w_k(t)\big)(\omega)\,e_k\,, \qquad \omega \in \Omega\,,\\
w_k(t): \Omega \longrightarrow \mathbb{R}: \omega \longmapsto \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\Big(\big(W(t)\big)(\omega)\Big|e_k\Big)_H, \qquad k \in K\,,\\
E\big(w_k(t)\big) = 0\,, \qquad E\big(w_k(t)\,w_\ell(t)\big) = t\,\delta_{k\ell}\,, \qquad k,\ell \in K\,,\\
\big\|W(t)\big\|^2_{L^2(\Omega,H)} = \operatorname{Spur}(t\,Q)\,.
\end{gathered}$$

(iii) *Zusammenhang mit reellwertigen Wiener-Prozessen.* Für jedes Element $k \in K$ übertragen sich die Eigenschaften des Q-Wiener-Prozesses $(W(t))_{t\in[0,T]}$ direkt auf den durch $(w_k(t))_{t\in[0,T]}$ definierten stochastischen Prozeß.

(a) *Stetigkeit der Pfade.* Für fast alle $\omega \in \Omega$ ist der zugehörige Pfad $(w_k(\cdot))(\omega): [0,T] \to \mathbb{R}$ stetig, denn für Zeitpunkte $s,t \in [0,T]$ gilt (verwende Ungleichung von Cauchy-Schwarz, nach Voraussetzung ist fast jeder Pfad $(W(\cdot))(\omega): [0,T] \to H$ stetig, Normierung $\|e_k\|_H = 1$)

$$\begin{aligned}
\Big|\big(w_k(t)\big)(\omega) - \big(w_k(s)\big)(\omega)\Big| &= \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\,\bigg|\Big(\big(W(t) - W(s)\big)(\omega)\Big|e_k\Big)_H\bigg|\\
&\leq \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\,\Big\|\big(W(t) - W(s)\big)(\omega)\Big\|_H \quad \overset{t-s\to 0}{\longrightarrow} \quad 0\,.
\end{aligned}$$

(b) *Stochastische Unabhängigkeit.* Nach Voraussetzung sind für beliebige Zeitpunkte $t_1, \dots, t_J \in [0,T]$ mit $t_1 < \dots < t_J$ sämtliche Zuwächse stochastisch unabhängig; für $j, \widetilde{j} \in \{1, \dots, J\}$ mit $j \neq \widetilde{j}$ sind etwa die Zufallsvariablen $W(t_{j+1}) - W(t_j) : \Omega \to H$ und $W(t_{\widetilde{j}+1}) - W(t_{\widetilde{j}}) : \Omega \to H$ stochastisch unabhängig, das heißt, für beliebige Borel-Mengen mit zugehörigen Urbildmengen gilt die Identität

$$\begin{gathered}
B_1, B_2 \in \mathscr{B}(H)\,,\\
A_1 = \big(W(t_{j+1}) - W(t_j)\big)^{-1}(B_1) \in \mathscr{A}\,,\\
A_2 = \big(W(t_{\widetilde{j}+1}) - W(t_{\widetilde{j}})\big)^{-1}(B_2) \in \mathscr{A}\,,\\
\mu_\Omega(A_1 \cap A_2) = \mu_\Omega(A_1)\,\mu_\Omega(A_2)\,.
\end{gathered}$$

Aufgrund des folgenden Zusammenhanges mit stetiger und insbesondere Borel-meßbarer Funktion (Skalarprodukt stetig)

$$\begin{gathered}
g_k : H \longrightarrow \mathbb{R} : h \longmapsto \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \big(h \big| e_k\big)_H\,,\\
w_k(t_{j+1}) - w_k(t_j) = g_k \circ \big(W(t_{j+1}) - W(t_j)\big) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,,\\
\big(w_k(t_{j+1}) - w_k(t_j)\big)^{-1} = \big(W(t_{j+1}) - W(t_j)\big)^{-1} \circ g_k^{-1}\,,
\end{gathered}$$

erfüllen für beliebige Borel-Mengen die Urbildmengen die Relation

$$\begin{gathered}
\widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\,,\\
B_1 = g_k^{-1}\big(\widetilde{B}_1\big) \in \mathscr{B}(H)\,, \qquad B_2 = g_k^{-1}\big(\widetilde{B}_2\big) \in \mathscr{B}(H)\,,\\
A_1 = \big(w_k(t_{j+1}) - w_k(t_j)\big)^{-1}(\widetilde{B}_1) = \big(W(t_{j+1}) - W(t_j)\big)^{-1}(B_1) \in \mathscr{A}\,,\\
A_2 = \big(w_k(t_{\widetilde{j}+1}) - w_k(t_{\widetilde{j}})\big)^{-1}(\widetilde{B}_2) = \big(W(t_{\widetilde{j}+1}) - W(t_{\widetilde{j}})\big)^{-1}(B_2) \in \mathscr{A}\,,\\
\mu_\Omega(A_1 \cap A_2) = \mu_\Omega(A_1)\,\mu_\Omega(A_2)\,,
\end{gathered}$$

was das gewünschte Resultat ist.

(iv) *Abschätzung für Norm.* Man beachte, daß sich für die natürliche Norm die folgende Abschätzung ergibt (Definition der Norm)

$$\begin{aligned}
\big\|W\big\|_{L^2(\Omega, L^\infty([0,T],H))} &= \sqrt{\int_\Omega \big\|\big(W(\cdot)\big)(\omega)\big\|^2_{L^\infty([0,T],H)}\,\mathrm{d}\omega}\\
&= \sqrt{\int_\Omega \bigg(\sup_{t\in[0,T]} \big\|\big(W(t)\big)(\omega)\big\|_H\bigg)^2\,\mathrm{d}\omega}\\
&\leq 2\,\sqrt{T\,\mathrm{Spur(Q)}}\,.
\end{aligned}$$

Mittels der angegebenen Darstellung für Q-Wiener-Prozesse und der Parseval'schen Identität folgt nämlich (für Supremum einer reellen positiven Funktion gilt Gleichheit

$(\sup\{f(x) : x \in [a,b]\})^2 = \sup\{(f(x))^2 : x \in [a,b]\})$

$$
\begin{aligned}
\Big(\big(z(t)\big)(\omega)\Big)^2 &= \sum_{k\in K} \lambda_k \Big(\big(w_k(t)\big)(\omega)\Big)^2 \,, \\
\|W\|^2_{L^2(\Omega,L^\infty([0,T],H))} &= \int_\Omega \sup_{t\in[0,T]} \big\|\big(W(t)\big)(\omega)\big\|_H^2 \,\mathrm{d}\omega \\
&= \int_\Omega \sup_{t\in[0,T]} \Big\| \sum_{k\in K} \sqrt{\lambda_k}\,\big(w_k(t)\big)(\omega)\, e_k \Big\|_H^2 \,\mathrm{d}\omega \\
&= \int_\Omega \sup_{t\in[0,T]} \sum_{k\in K} \lambda_k \Big(\big(w_k(t)\big)(\omega)\Big)^2 \,\mathrm{d}\omega \\
&= \int_\Omega \Big(\sup_{t\in[0,T]} \big(z(t)\big)(\omega)\Big)^2 \,\mathrm{d}\omega \\
&= \|z\|^2_{L^2(\Omega,L^\infty([0,T],\mathbb{R}))} \,;
\end{aligned}
$$

die Anwendung der Doob'schen L^p-Ungleichung[8] für $p = 2$

$$
\|z\|^2_{L^2(\Omega,L^\infty([0,T],\mathbb{R}))} \leq 4\, \|z(T)\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R})}
$$

sowie die Identität $V(w_k(T)) = T$ und die bekannte Relation für die Spur-Norm zeigen

$$
\begin{aligned}
\|z(T)\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R})} &= \int_\Omega \sum_{k\in K} \lambda_k \Big(\big(w_k(T)\big)(\omega)\Big)^2 \,\mathrm{d}\omega \\
&= T \sum_{k\in K} \lambda_k \\
&= T\,\mathrm{Spur}(\mathrm{Q})\,.
\end{aligned}
$$

---

[8] *Vorbemerkung.* Auf die Herleitung der Doob'schen Maximal-Ungleichung und der Doob'schen L^p-Ungleichung kann hier nicht eingegangen werden; dazu sei auf grundlegende Referenzen zu reellwertigen stochastischen Prozessen verwiesen. Ohne nähere Erklärung wird verwendet, daß eindimensionale Wiener-Prozesse und folglich $(z(t))_{t\in[0,T]}$ die geforderten Eigenschaften erfüllen. Die Begriffe Martingal und Sub-Martingal werden an späterer Stelle für stochastische Prozesse mit Werten in Hilbert-Räumen eingeführt.

Doob'sche Maximal-Ungleichung. Es bezeichne $(z(t))_{t\in[0,T]}$ mit $z(t) : \Omega \to \mathbb{R}$ für $t \in [0,T]$ ein rechtsseitig stetiges Sub-Martingal, und für fast alle $\omega \in \Omega$ und $t \in [0,T]$ gelte $(z(t))(\omega) \geq 0$. Für jede positive reelle Zahl $r > 0$ und jeden Exponenten $p \in [1,\infty)$ gilt die Abschätzung

$$
r^p \,\mu_\Omega\big(\{\omega \in \Omega : \sup_{t\in[0,T]} z(t) \geq r\}\big) \leq \int_\Omega \Big(\big(z(T)\big)(\omega)\Big)^p \,\mathrm{d}\omega\,.
$$

Doob'sche L^p-Ungleichung. Es bezeichne $(z(t))_{t\in[0,T]}$ mit $z(t) : \Omega \to \mathbb{R}$ für $t \in [0,T]$ ein rechtsseitig stetiges Submartingal, und für fast alle $\omega \in \Omega$ und $t \in [0,T]$ gelte $(z(t))(\omega) \geq 0$. Unter der Voraussetzung $z(T) \in L^p(\Omega,\mathbb{R})$ mit Exponent $p \in (1,\infty)$ folgt $z \in L^p(\Omega, L^\infty([0,T],\mathbb{R}))$, und es gilt die Abschätzung

$$
\|z\|_{L^p(\Omega,L^\infty([0,T],\mathbb{R}))} \leq \tfrac{p}{p-1}\, \|z(T)\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R})}\,.
$$

Resultat (Darstellung und Existenz von Wiener-Prozessen). Es sei $Q \in \mathscr{S}_1(H)$ ein positiv semi-definiter selbstadjungierter Spurklasse-Operator mit zugehörigen orthonormalen Eigenfunktionen zu positiven Eigenwerten

$$\big(e_k\big)_{k\in K}, \qquad Q\,e_k = \lambda_k\, e_k, \quad \lambda_k > 0, \qquad k \in K.$$

Ein stochastischer Prozeß $(W(t))_{t\in[0,T]}$ mit $W(t) : \Omega \to H$ für $t \in [0,T]$ ist genau dann ein Q-Wiener-Prozeß, wenn die folgende Darstellung mit stochastisch unabhängigen reellwertigen Wiener-Prozessen gültig ist (insbesondere gilt $V(w_k(t)) = t$ für $k \in K$)

$$\begin{gathered}
\big(W(t)\big)(\omega) = \sum_{k\in K} \sqrt{\lambda_k}\,\big(w_k(t)\big)(\omega)\, e_k, \qquad \omega \in \Omega, \\
w_k(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \Big(\big(W(t)\big)(\omega)\Big| e_k\Big)_H, \qquad k \in K, \\
E\big(w_k(t)\big) = 0, \qquad E\big(w_k(t)\, w_\ell(t)\big) = t\,\delta_{k\ell}, \qquad k,\ell \in K, \\
\big\| W(t) \big\|^2_{L^2(\Omega,H)} = \mathrm{Spur}(t\,Q);
\end{gathered}$$

Konvergenz gilt im Sinne des $L^2(\Omega, L^\infty([0,T],H))$, genauer

$$\big\| W \big\|_{L^2(\Omega,L^\infty([0,T],H))} \leq 2\,\sqrt{T\,\mathrm{Spur(Q)}}\,.$$

Für jeden positiv semi-definiten selbstadjungierten Spurklasse-Operator $Q \in \mathscr{S}_1(H)$ zeigt dies insbesondere die Existenz eines Q-Wiener-Prozesses.

Erklärung. Siehe obige Argumente; zusätzliche Überlegungen zur stochastischen Unabhängigkeit sind in DENK (2014) angegeben. ◇

Vorbemerkung. Im Folgenden wird zusätzlich benötigt, daß der betrachtete Wiener-Prozess in einem gewissen Sinn an eine Filtrierung des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraumes angepasst ist.

Erinnerung (Filtrierung, Filtrierter Raum, Normale Filtrierung). Wie bisher bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, \mu_\Omega)$ den zugrundeliegenden vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum.

(i) *Filtrierung.* Eine Filtrierung des Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathscr{A}, \mu_\Omega)$ ist eine Familie $(\mathscr{A}(t))_{t\in[0,T]}$ von σ-Algebren, welche die Bedingung

$$\forall\, t_1, t_2 \in [0,T] \quad \text{mit} \quad t_1 \leq t_2 : \quad \mathscr{A}(t_1) \subseteq \mathscr{A}(t_2) \subseteq \mathscr{A}$$

erfüllt; man nennt $(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{A}(t))_{t\in[0,T]}, \mu_\Omega)$ einen filtrierten Raum.

(ii) *Normale Filtrierung.* Eine Filtrierung $(\mathscr{A}(t))_{t\in[0,T]}$ heißt normal, wenn die Relationen

$$\begin{gathered}
\big\{A \in \mathscr{A} : \mu_\Omega(A) = 0\big\} \subseteq \mathscr{A}(0), \\
\forall\, t_1 \in [0,T) : \quad \mathscr{A}(t_1) = \bigcap_{t_2 > t_1} \mathscr{A}(t_2) \subseteq \mathscr{A}
\end{gathered}$$

gelten.

Erinnerung (Adaptierter Prozeß). Es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{A}(t))_{t\in[0,T]}, \mu_\Omega)$ den zugrundeliegenden filtrierten vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum. Ein stochastischer Prozeß $(Z(t))_{t\in[0,T]}$ heißt adaptiert bezüglich $(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{A}(t))_{t\in[0,T]}, \mu_\Omega)$, wenn für alle Elemente $t \in [0,T]$ die Zufallsvariable $Z(t)$ bezüglich $\mathscr{A}(t)$ meßbar ist.

Definition (Wiener-Prozeß bezüglich einer Filtrierung). Man spricht von einem Q-Wiener-Prozeß bezüglich der Filtrierung $(\mathscr{A}(t))_{t\in[0,T]}$, wenn zusätzlich folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Der Q-Wiener-Prozeß $(W(t))_{t\in[0,T]}$ ist adaptiert bezüglich der Filtrierung $(\mathscr{A}(t))_{t\in[0,T]}$.

(ii) Für alle Zeitpunkte $t_1, t_2 \in [0,T]$ mit $t_1 < t_2$ ist die Zufallsvariable $W(t_2) - W(t_1) : \Omega \to H$ stochastisch unabhängig von $\mathscr{A}(t_1)$, das heißt, die erzeugte σ-Algebra (Initial-σ-Algebra)
$$\sigma\Big(\big(W(t_2) - W(t_1)\big)^{-1}\big(\mathscr{B}(H)\big)\Big)$$
und $\mathscr{A}(t_1)$ sind unabhängig.

Resultat (Konstruktion eines Wiener-Prozesses bezüglich einer Filtrierung). Es bezeichne $(W(t))_{t\in[0,T]}$ einen Q-Wiener-Prozeß. Mittels der folgenden Konstruktion erhält man eine normale Filtrierung, und insbesondere ist $(W(t))_{t\in[0,T]}$ ein Q-Wiener-Prozeß bezüglich dieser Filtrierung

(i) $\mathscr{M}(t) = \sigma\big(W(t_1) : t_1 \le t\big)$

(ii) $\mathscr{N}(t) = \sigma\big(\mathscr{M}(t) \cup \{A \in \mathscr{A} : \mu_\Omega(A) = 0\}\big)$

(iii) $\mathscr{A}(t_1) = \bigcap\limits_{t_2 > t_1} \mathscr{N}(t_2)$ für $t_2 \in [0,T)$ und speziell $\mathscr{A}(T) = \mathscr{N}(T)$.

Erklärung. Siehe DENK (2014). ◇

Kapitel 3

Bedingter Erwartungswert und Martingal

Inhalt. Im Folgenden werden Grundlagen zu bedingten Erwartungswerten und Martingalen angegeben; ein wesentliches Resultat besagt, daß Wiener-Prozesse bezüglich einer normalen Filtrierung quadratintegrable stetige Martingale sind. Aufgrund der Knappheit der Zeit werden Beweise nicht ausgeführt; dazu sei auf Denk (2014) verwiesen.

Überblick. Um eine Verbindung mit Denk (2014) herzustellen, sind die entsprechenden Verweise angegeben.

- Bedingter Erwartungswert einer reellwertigen Zufallsvariable (Satz A.11)

  Resultat zur Existenz und Eindeutigkeit des bedingten Erwartungswertes (Definition und Satz 2.23)

  Bemerkung (Bemerkung 2.27)

  Eigenschaften des zugehörigen Operators (Bemerkung 2.24)

  Resultat zum bedingten Erwartungswert bei Unabhängigkeit (Lemma 2.25)

- Martingal (Definition 2.26)

  Charakterisierung eines Martingals mittels der Elemente des Dualraumes (Bemerkung 2.27)

  Norm eines Martingals definiert reellwertiges Sub-Martingal (Lemma 2.28)

  Doob'sche Maximalungleichung für reellwertige Martingale (Satz A.10)

  Doob'sche Maximalungleichung (Satz 2.29)

  Quadratintegrable stetige Martingal (Definition 2.30)

  Banach-Raum der quadratintegrablen stetigen Martingale (Lemma 2.31)

- Martingal-Eigenschaft von Wiener-Prozessen (Lemma 2.32)

3.1 Bedingter Erwartungswert

Situation. Wie zuvor bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, \mu_\Omega)$ den zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum und $(H, (\cdot|\cdot)_H, \|\cdot\|_H)$ einen mit der Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(H)$ versehenen separablen reellen Hilbert-Raum.

Erinnerung (Bedingte Wahrscheinlichkeit, Bedingter Erwartungswert).

(i) *Bedingte Wahrscheinlichkeit.* Für Elemente $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ mit $\mu_\Omega(A_2) > 0$ heißt

$$\mu_\Omega(A_2) > 0: \qquad \mu_\Omega\big(A_1 \big| A_2\big) = \frac{\mu_\Omega(A_1 \cap A_2)}{\mu_\Omega(A_2)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit von A_1 gegeben A_2. Die zugehörige Funktion

$$\mu_\Omega(A_2) > 0: \qquad \mu_\Omega\big(\cdot \big| A_2\big) : \mathscr{A} \longrightarrow [0,1] : A_1 \longmapsto \mu_\Omega\big(A_1 \big| A_2\big)$$

gibt die Wahrscheinlichkeit unter der Hypothese, daß das Ereignis A_2 eintritt, an und führt auf ein Wahrscheinlichkeitsmaß; insbesondere sind die Normierungsbedingung

$$\mu_\Omega\big(\Omega \big| A_2\big) = \frac{\mu_\Omega(\Omega \cap A_2)}{\mu_\Omega(A_2)} = 1$$

und etwa für disjunkte Mengen $A_1, \widetilde{A}_1 \in \mathscr{A}$ die Eigenschaft der σ-Additivität erfüllt (wegen $(A_1 \cap A_2) \cap (\widetilde{A}_1 \cap A_2) = \emptyset$ folgt $\mu_\Omega((A_1 \cap A_2) \cap (\widetilde{A}_1 \cap A_2)) = \mu_\Omega(A_1 \cap A_2) + \mu_\Omega(\widetilde{A}_1 \cap A_2)$)

$$\begin{aligned} A_1 \cap \widetilde{A}_1 = \emptyset: \qquad \mu_\Omega\big(A_1 \cap \widetilde{A}_1 \big| A_2\big) &= \frac{\mu_\Omega\big((A_1 \cap A_2) \cap (\widetilde{A}_1 \cap A_2)\big)}{\mu_\Omega(A_2)} \\ &= \frac{\mu_\Omega(A_1 \cap A_2)}{\mu_\Omega(A_2)} + \frac{\mu_\Omega(\widetilde{A}_1 \cap A_2)}{\mu_\Omega(A_2)} \\ &= \mu_\Omega\big(A_1 \big| A_2\big) + \mu_\Omega\big(\widetilde{A}_1 \big| A_2\big). \end{aligned}$$

(ii) *Vorüberlegungen.*

(a) Für eine kontinuierliche Zufallsvariable $z_1 : \Omega \to \mathbb{R}$, eine Borel-Menge $B_1 \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, eine diskrete Zufallsvariable $z_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ und eine reelle Zahl $r_2 \in \mathbb{R}$ werden die zugehörigen Urbildmengen (Entsprechung $A_1 = z_1^{-1}(B_1) \in \mathscr{A}$ und $A_2 = z_2^{-1}(r_2)$)

$$z_1^{-1}(B_1) = \big\{\omega \in \Omega : z_1(\omega) \in B_1\big\}, \qquad z_2^{-1}(r_2) = \big\{\omega \in \Omega : z_2(\omega) = r_2\big\},$$

betrachtet; unter der Voraussetzung $\mu_\Omega(z_2^{-1}(r_2)) > 0$ ist es naheliegend, die bedingte Wahrscheinlichkeit von z_1 gegeben r_2 und entsprechend den bedingten Erwartungswert von z_1 gegeben r_2 wie folgt zu erklären (Wahrscheinlichkeitsmaß)

$$\mu_\Omega\big(z_2^{-1}(r_2)\big) > 0: \qquad \nu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1] : B_1 \longrightarrow \mu_\Omega\big(z_1^{-1}(B_1) \big| z_2^{-1}(r_2)\big),$$
$$E(\nu) = \int_{\mathbb{R}} r_1 \, \mathrm{d}\nu(r_1);$$

mittels Definition erhält man (setze $r_1 = z_1(\omega)$ bzw. $\omega \in z_1^{-1}(r_1)$)

$$\nu(B_1) = \mu_\Omega\big(z_1^{-1}(B_1)\big|z_2^{-1}(r_2)\big) = \frac{\mu_\Omega\big(z_1^{-1}(B_1) \cap z_2^{-1}(r_2)\big)}{\mu_\Omega\big(z_2^{-1}(r_2)\big)},$$

$$E(\nu) = \frac{1}{\mu_\Omega\big(z_2^{-1}(r_2)\big)} \int_\mathbb{R} r_1 \,\mathrm{d}\mu_\Omega\big(z_1^{-1}(r_1) \cap z_2^{-1}(r_2)\big) = \frac{1}{\mu_\Omega\big(z_2^{-1}(r_2)\big)} \int_{z_2^{-1}(r_2)} z_1(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\,.$$

Gebräuchlichen Kurzschreibweisen sind

$$\mu_\Omega\big(z_1 \in B_1\big|z_2 = r_2\big) = \mu_\Omega\big(z_1^{-1}(B_1)\big|z_2^{-1}(r_2)\big),$$

$$E\big(z_1\big|z_2 = r_2\big) = \int_\mathbb{R} r_1 \,\mathrm{d}\mu_\Omega\big(z_1 = r_1\big|z_2 = r_2\big).$$

(b) Da für eine kontinuierliche Zufallsvariable $z_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ die Urbildmenge eines einzelnes Punktes immer auf eine Nullmenge führt

$$\forall r_2 \in \mathbb{R}: \qquad \mu_\Omega\big(z_2^{-1}(r_2)\big) = 0\,,$$

lassen sich die angegebenen Relationen nicht direkt erweitern; man nützt deshalb die folgende Sichtweise.

(c) Die folgenden Überlegungen sind unter den Voraussetzungen, daß $z_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ eine beschränkte kontinuierliche Zufallsvariable und $z_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable sind, gerechtfertigt. Man beachte, daß die Funktion (zur Klarheit zusätzliche Mengenklammern beim Urbild, Bildelement $z_2(\omega)$ entspricht r_2)

$$R_2 = \Big\{r_2 \in \mathbb{R} : \mu_\Omega\big(z_2^{-1}(r_2)\big) > 0\Big\} \subset \mathbb{R}\,,$$

$$\widetilde{\Omega} = z_2^{-1}(R_2) = \Big\{\omega \in \Omega : \mu_\Omega\big(z_2^{-1}(\{z_2(\omega)\})\big) > 0\Big\} \subseteq \Omega\,,$$

$$E\big(z_1\big|z_2 = z_2(\cdot)\big) : \widetilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto E\big(z_1\big|z_2 = z_2(\omega)\big),$$

eine reellwertige Zufallsvariable definiert; genauer, die Funktion $E(z_1|z_2 = z_2(\cdot))$ ist bezüglich der von z_2 erzeugten Initial-σ-Algebra

$$\sigma(z_2) = \sigma\Big(z_2^{-1}\big(\mathscr{B}(\mathbb{R})\big)\Big) \subseteq \mathscr{A}$$

meßbar und beschränkt. Mit Hilfe der Definition des bedingten Erwartungswertes

$$E\big(z_1\big|z_2 = r_2\big) = \frac{1}{\big(\mu_\Omega \circ z_2^{-1}\big)(r_2)} \int_{z_2^{-1}(r_2)} z_1(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)$$

ergibt sich für jede Borel-Menge $B_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ mit Urbildmenge $A_2 = z_2^{-1}(B_2) \in \sigma(z_2)$ die

Relation (setze $r_2 = z_2(\omega)$ bzw. $\omega \in z_2^{-1}(r_2)$, diskrete Zufallsvariable)

$$\begin{aligned}
\int_{z_2^{-1}(B_2)\cap\widetilde{\Omega}} E\big(z_1 \big| z_2 = z_2(\omega)\big)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) &= \int_{B_2\cap R_2} E\big(z_1 \big| z_2 = r_2\big)\,\mathrm{d}\big(\mu_\Omega \circ z_2^{-1}\big)(r_2)\\
&= \sum_{r_2\in B_2\cap R_2} E\big(z_1 \big| z_2 = r_2\big)\,\big(\mu_\Omega \circ z_2^{-1}\big)(r_2)\\
&= \sum_{r_2\in B_2\cap R_2} \int_{z_2^{-1}(r_2)} z_1(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\\
&= \int_{z_2^{-1}(B_2)\cap\widetilde{\Omega}} z_1(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\,;
\end{aligned}$$

in diesem Sinne ist die folgende Identität zu verstehen

$$\forall\, A_2 \in \sigma(z_2) = \sigma\Big(z_2^{-1}\big(\mathscr{B}(\mathbb{R})\big)\Big): \qquad \int_{A_2} E\big(z_1 \big| z_2 = z_2(\omega)\big)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = \int_{A_2} z_1(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\,.$$

Diese Relation wird nun genützt, um den bedingten Erwartungswert für kontinuierliche Zufallsvariablen zu definieren; der bedingte Erwartungswert stellt unter allen bezüglich der von z_2 erzeugten Initial-σ-Algebra meßbaren Zufallsvariablen die beste Approximation an z_1 im Sinne der L^2-Norm dar.

(iii) *Bedingter Erwartungswert für Zufallsvariablen.* Für eine Zufallsvariable $z : \Omega \to \mathbb{R}$ (betrachtet bezüglich $\mathscr{A}$) mit $z \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ und eine Unter-σ-Algebra $\mathscr{A}_0 \subseteq \mathscr{A}$ wird durch die Bedingung

$$\forall\, A_0 \in \mathscr{A}_0 : \qquad \int_{A_0} z_0(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = \int_{A_0} z(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)$$

eine Zufallsvariable $z_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ (betrachtet bezüglich $\mathscr{A}_0$) mit $z_0 \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ definiert; diese Zufallsvariable ist für fast alle Elemente $\omega \in \Omega$ eindeutig bestimmt und wird als bedingter Erwartungswert von z gegeben $\mathscr{A}_0$ bezeichnet

$$E\big(z \big| \mathscr{A}_0\big) = z_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

(iv) *Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes.* Es seien $z, \widetilde{z} : \Omega \to \mathbb{R}$ und $z_k : \Omega \to \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen, und es bezeichne $\mathscr{A}_0 \subseteq \mathscr{A}$ eine Unter-σ-Algebra. Der bedingte Erwartungswert erfüllt die folgenden grundlegenden Eigenschaften.

(a) *Stochastische Unabhängigkeit.* Falls die Zufallsvariable z stochastisch unabhängig von $\mathscr{A}_0$ sowie $\widetilde{z}$ ist, folgen für fast alle $\omega \in \Omega$ die Identitäten

$$\begin{aligned}
\Big(E\big(z \big| \mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega) &= E(z)\,,\\
\Big(E\big(z\,\widetilde{z} \big| \mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega) &= E(z)\,\Big(E\big(\widetilde{z} \big| \mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\,.
\end{aligned}$$

(b) *Meßbarkeit.* Falls die Zufallsvariable z bezüglich der σ-Algebra $\mathscr{A}_0$ meßbar ist

$$\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}): \qquad z^{-1}(B) \in \mathscr{A}_0\,,$$

so folgen die Identitäten

$$\begin{aligned}\Big(E\big(z\,\big|\,\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega) &= z(\omega)\,,\\ \Big(E\big(z\,\widetilde{z}\,\big|\,\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega) &= z(\omega)\,\Big(E\big(\widetilde{z}\,\big|\,\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\,.\end{aligned}$$

(c) *Erwartungswert.* Es gilt

$$E\Big(E\big(z\,\big|\,\mathscr{A}_0\big)\Big) = E(z)\,.$$

(d) *Linearität.* Für fast alle $\omega \in \Omega$ gilt (wobei $c \geq 0$)

$$\begin{aligned}\Big(E\big(z+\widetilde{z}\,\big|\,\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega) &= \Big(E\big(z\,\big|\,\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega) + \Big(E\big(\widetilde{z}\,\big|\,\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\,,\\ \Big(E\big(c\,z\,\big|\,\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega) &= c\,\Big(E\big(z\,\big|\,\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\,.\end{aligned}$$

(e) *Monotonie.* Falls für fast alle $\omega \in \Omega$ die Relation

$$z_1(\omega) \leq z_2(\omega)$$

gilt, so erfüllen die bedingten Erwartungswerte für fast alle $\omega \in \Omega$ die Relation

$$\Big(E\big(z_1\,\big|\,\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega) \leq \Big(E\big(z_2\,\big|\,\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\,.$$

(f) *Absolutbetrag.* Für fast alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$\left|\Big(E\big(z\,\big|\,\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\right| \leq \Big(E\big(|z|\,\big|\,\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\,.$$

(g) *Ungleichung von Jensen.* Für konvexe Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ überträgt sich die Ungleichung von Jensen auf bedingte Erwartungswerte, d.h. für fast alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$f\bigg(\Big(E\big(z\,\big|\,\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\bigg) \leq \Big(E\big(f(z)\,\big|\,\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\,.$$

(h) *Monotone Konvergenz.* Falls für fast alle $\omega \in \Omega$ die Folge $(z_k(\omega))_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise und monoton steigend gegen $z(\omega)$ konvergiert, so folgt für fast alle $\omega \in \Omega$ die punktweise und monoton steigende Konvergenz der bedingten Erwartungswerte

$$\lim_{k\to\infty}\Big(E\big(z_k\,\big|\,\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega) = \Big(E\big(z\,\big|\,\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\,.$$

(i) *Majorisierte Konvergenz.* Es bezeichne

$$z_{\sup} : \Omega \to \mathbb{R} : \omega \to \sup_{k\in\mathbb{N}} \big| z_k(\omega) \big| \, ,$$

und es gelte $z_{\sup} \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$. Unter der Voraussetzung, daß für fast alle $\omega \in \Omega$ die Folge $(z_k(\omega))_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen $z(\omega)$ konvergiert, folgt für fast alle $\omega \in \Omega$ die punktweise Konvergenz der bedingten Erwartungswerte

$$\lim_{k\to\infty} \Big(E\big(z_k \big| \mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega) = \Big(E\big(z \,\big|\, \mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega) \, .$$

(j) *Lemma von Fatou.* Falls die Zufallsvariablen nicht-negative Werte annehmen, gilt für fast alle $\omega \in \Omega$ die Abschätzung

$$\Big(E\big(\liminf_{k\to\infty} z \,\big|\, \mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega) \leq \liminf_{k\to\infty} \Big(E\big(z_k \big| \mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega) \, .$$

Vorbemerkung. Das folgende Resultat erweitert den Begriff des bedingten Erwartungswertes auf Zufallsvariablen mit Werten in Hilbert-Räumen.

Resultat (Existenz und Eindeutigkeit des bedingten Erwartungswertes).

(i) Für eine Zufallsvariable $Z : \Omega \to H$ (betrachtet bezüglich $\mathscr{A}$) mit $Z \in L^1(\Omega, H)$ und eine Unter-σ-Algebra $\mathscr{A}_0 \subseteq \mathscr{A}$ wird durch die Relation

$$\forall \, A_0 \in \mathscr{A}_0 : \qquad \int_{A_0} Z_0(\omega) \, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = \int_{A_0} Z(\omega) \, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)$$

eine Zufallsvariable $Z_0 : \Omega \to H$ (betrachtet bezüglich $\mathscr{A}_0$) mit $Z_0 \in L^1(\Omega, H)$ definiert; diese Zufallsvariable ist für fast alle Elemente $\omega \in \Omega$ eindeutig bestimmt[1] und wird als bedingter Erwartungswert von Z gegeben $\mathscr{A}_0$ bezeichnet

$$E\big(Z \,\big|\, \mathscr{A}_0\big) = Z_0 \, .$$

(ii) Unter der Voraussetzung $Z \in L^p(\Omega, H)$ für einen Exponenten $p \in [1, \infty)$ ist für fast alle $\omega \in \Omega$ die folgende Abschätzung gültig (beachte $\| Z \|_H \in L^p(\Omega, \mathbb{R})$)

$$\Big\| \Big(E\big(Z \,\big|\, \mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega) \Big\|_H^p \leq \Big(E\big(\| Z \|_H^p \big| \mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega) \, .$$

Erklärung. Siehe Denk (2014).

(i) *Existenz.* Der Nachweis der Existenz und der gewünschten Abschätzung für die Norm beruht auf der Approximation von Zufallsvariablen mittels Funktionen spezieller Form und Grenzübergang. Als Ergänzung zu Denk (2014) sind dazu die folgenden Überlegungen angegeben.

[1] *Bemerkung.* Der bedingte Erwartungswert ist insbesondere im Sinne des $L^1(\Omega, H)$ eindeutig bestimmt.

(a) *Vorbemerkung.* Für die charakteristische Funktion (mit $A \in \mathscr{A}$)

$$\chi_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto \chi_A(\omega)$$

ist der zugehörige bedingte Erwartungswert durch die Relation (wobei $A_0 \in \mathscr{A}_0$, unterscheide Fälle $A_0 \cap A \neq \emptyset$ bzw. $A_0 \cap A = \emptyset$)

$$E\big(\chi_A \big| \mathscr{A}_0\big) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$\int_{A_0} \Big(E\big(\chi_A \big| \mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = \int_{A_0} \chi_A(\omega)\, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = \mu_\Omega(A_0 \cap A)\,,$$

definiert. Entsprechende Überlegungen gelten für Linearkombinationen (mit $c_k \in \mathbb{R}$ und $A^{(k)} \in \mathscr{A}$ für $k \in \{1,\dots,K\}$, zur Vereinfachung setze $\chi_k = \chi_{A^{(k)}}$, wobei $A_0 \in \mathscr{A}_0$)

$$\sum_{k=1}^{K} c_k\, \chi_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto \sum_{k=1}^{K} c_k\, \chi_k(\omega)\,,$$
$$E\bigg(\sum_{k=1}^{K} c_k\, \chi_k \bigg| \mathscr{A}_0\bigg) = \sum_{k=1}^{K} c_k\, E\big(\chi_k \big| \mathscr{A}_0\big) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$\sum_{k=1}^{K} c_k \int_{A_0} \chi_k(\omega)\, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = \sum_{k=1}^{K} c_k\, \mu_\Omega\big(A_0 \cap A^{(k)}\big)\,.$$

(b) *Elementare Zufallsvariablen.* Für die naheliegende Erweiterung auf Zufallsvariablen der speziellen Form (wobei $h_k \in H$ und $A^{(k)} \in \mathscr{A}$ für $k \in \{1,\dots,K\}$, wie zuvor setze $\chi_k = \chi_{A^{(k)}}$)

$$Z : \Omega \longrightarrow H : \omega \longmapsto Z(\omega) = \sum_{k=1}^{K} h_k\, \chi_k(\omega)$$

ergibt sich die Relation (wobei $A_0 \in \mathscr{A}_0$)

$$\int_{A_0} Z(\omega)\, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = \sum_{k=1}^{K} h_k \int_{A_0} \chi_k(\omega)\, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = \sum_{k=1}^{K} h_k\, \mu_\Omega\big(A_0 \cap A^{(k)}\big)\,.$$

Daraus folgert man, daß der bedingte Erwartungswert durch

$$E\big(Z \big| \mathscr{A}_0\big) = \sum_{k=1}^{K} h_k\, E\big(\chi_k \big| \mathscr{A}_0\big) : \Omega \longrightarrow H$$

gegeben ist.

(ii) *Abschätzung.* In der obigen Situation ergeben sich unter der sinnvollen Annahme disjunkter Mengen die Relationen (verwende $\chi_k(\omega)\, \chi_\ell(\omega) = \delta_{k\ell}\, (\chi_k(\omega))^2$, analoge Relation für bedingten Erwartungswert)

$$
\begin{aligned}
\big\|Z(\omega)\big\|_H^2 &= \Big\|\sum_{k=1}^K h_k\,\chi_k(\omega)\Big\|_H^2 \\
&= \sum_{k,\ell=1}^K \chi_k(\omega)\,\chi_\ell(\omega)\,\big(h_k\big|h_\ell\big)_H \\
&= \sum_{k=1}^K \big(\chi_k(\omega)\big)^2\,\big\|h_k\big\|_H^2\,, \\
\Big(E\big(\|Z\|_H^2\big|\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega) &= \sum_{k=1}^K \Big(E\big(\chi_k^2\big|\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\,\big\|h_k\big\|_H^2\,, \\
\Big\|\Big(E\big(Z\,\big|\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\Big\|_H^2 &= \Big\|\sum_{k=1}^K h_k\,\Big(E\big(\chi_k\big|\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\Big\|_H^2 \\
&= \sum_{k,\ell=1}^K \Big(E\big(\chi_k\big|\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\,\Big(E\big(\chi_\ell\big|\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\,\big(h_k\big|h_\ell\big)_H \\
&= \sum_{k=1}^K \bigg(\Big(E\big(\chi_k\big|\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\bigg)^2\,\big\|h_k\big\|_H^2\,.
\end{aligned}
$$

Da die quadratische Funktion konvex ist, erhält man mittels der Ungleichung von Jensen für bedingte Erwartungswerte die gewünschte Abschätzung (wobei $k \in \{1,\dots,K\}$)

$$
\begin{aligned}
& f\bigg(\Big(E\big(\chi_k\big|\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\bigg) \leq \Big(E\big(f(\chi_k)\,\big|\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\,, \\
\Longrightarrow\quad & \bigg(\Big(E\big(\chi_k\big|\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\bigg)^2 \leq \Big(E\big(\chi_k^2\big|\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\,, \\
\Longrightarrow\quad & \Big\|\Big(E\big(Z\,\big|\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\Big\|_H^2 = \sum_{k=1}^K \bigg(\Big(E\big(\chi_k\big|\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\bigg)^2\,\big\|h_k\big\|_H^2 \\
& \qquad \leq \sum_{k=1}^K \Big(E\big(\chi_k^2\big|\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\,\big\|h_k\big\|_H^2 = \Big(E\big(\|Z\|_H^2\big|\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\,.
\end{aligned}
$$

Die entsprechende Relation für $p = 1$ erhält man wegen $\chi_k(\omega)\,\chi_\ell(\omega) = 0$ für $k \neq \ell$ mittels Dreiecksungleichung; etwa für $K = 2$ ist nämlich (für $\omega \in \Omega$, in Kurzschreibweise)

$$
\begin{aligned}
\big\|Z\big\|_H &= \sqrt{\chi_1^2\,\|h_1\|_H^2 + \chi_2^2\,\|h_2\|_H^2} \\
&= \sqrt{\big(\chi_1\|h_1\|_H + \chi_2\|h_2\|_H\big)^2} \\
&= \chi_1\big\|h_1\big\|_H + \chi_2\big\|h_2\big\|_H\,, \\
\Big\|E\big(Z\,\big|\mathscr{A}_0\big)\Big\|_H &= \Big\|E\big(\chi_1\big|\mathscr{A}_0\big)\,h_1 + E\big(\chi_2\big|\mathscr{A}_0\big)\,h_2\Big\|_H \\
&\leq E\big(\chi_1\big|\mathscr{A}_0\big)\,\big\|h_1\big\|_H + E\big(\chi_2\big|\mathscr{A}_0\big)\,\big\|h_2\big\|_H = E\big(\|Z\|_H\big|\mathscr{A}_0\big)\,.
\end{aligned}
$$

Ähnliche Überlegungen zeigen den allgemeinen Fall. ◇

Bemerkung. In der obigen Situation gilt für jedes Element des Dualraumes $h^* \in H^*$ die Identität (für $\omega \in \Omega$, Kurzschreibweise)

$$h^*\Big(E\big(Z\,|\mathscr{A}_0\big)\Big) = E\big(h^*(Z)\big|\mathscr{A}_0\big);$$

man beachte dazu die Gültigkeit der Relation (für $A_0 \in \mathscr{A}_0$, wie zuvor bezeichne $Z_0 = E(Z\,|\mathscr{A}_0)$, verwende Linearität von h^* und definierende Relation für bedingten Erwartungswert)

$$\begin{aligned}\int_{A_0} h^*\big(Z_0(\omega)\big)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) &= h^*\bigg(\int_{A_0} Z_0(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\bigg)\\ &= h^*\bigg(\int_{A_0} Z(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\bigg)\\ &= \int_{A_0} h^*\big(Z(\omega)\big)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega).\end{aligned}$$

Wegen des Darstellungssatzes von Riesz entspricht dies für alle Elemente $h \in H$ der Identität (Kurzschreibweise)

$$\Big(E\big(Z\,|\mathscr{A}_0\big)\Big|h\Big)_H = E\Big(\big(Z\big|h\big)_H\Big|\mathscr{A}_0\Big).$$

Resultat (Eigenschaften des zugehörigen Operators). Für jeden Exponenten $p \in [1,\infty)$ definiert der bedingte Erwartungswert einen stetigen linearen Operator (Integrabilität bezüglich $\mathscr{A}$ bzw. $\mathscr{A}_0$)

$$E\big(\,\cdot\,\big|\mathscr{A}_0\big) : L^p(\Omega,H) \longrightarrow L^p(\Omega,H) : Z \longmapsto E\big(Z\big|\mathscr{A}_0\big);$$

dieser lineare Operator ist insbesondere eine Projektion und eine Isometrie

$$E\big(E\big(\,\cdot\,\big|\mathscr{A}_0\big)\big|\mathscr{A}_0\big) = E\big(\,\cdot\,\big|\mathscr{A}_0\big), \qquad \big\|E\big(\,\cdot\,\big|\mathscr{A}_0\big)\big\|_{L^p(\Omega,H)\leftarrow L^p(\Omega,H)} = 1.$$

Erklärung. Im Folgenden wird nur die Eigenschaft der Isometrie und damit der Stetigkeit nachgewiesen. Laut dem vorherigen Resultat ist die Abschätzung (wobei $\omega \in \Omega$)

$$\Big\|\Big(E\big(Z\,|\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\Big\|_H^p \leq \Big(E\big(\|Z\|_H^p\,|\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)$$

gültig. Integration bezüglich $\omega \in \Omega$ führt auf (verwende Definition des Erwartungswertes und Identität $E(E(z\,|\mathscr{A}_0)) = E(z)$)

$$\begin{aligned}\big\|E\big(Z\,|\mathscr{A}_0\big)\big\|_{L^p(\Omega,H)}^p &= \int_\Omega \Big\|\Big(E\big(Z\,|\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\Big\|_H^p\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\\ &\leq \int_\Omega \Big(E\big(\|Z\|_H^p\,|\mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\\ &= E\Big(E\big(\|Z\|_H^p\,|\mathscr{A}_0\big)\Big)\\ &= E\big(\|Z\|_H^p\big)\\ &= \|Z\|_{L^p(\Omega,H)}^p\end{aligned}$$

und zeigt somit die Schranke

$$\big\| E\big(\cdot \,\big|\, \mathscr{A}_0\big) \big\|_{L^p(\Omega,H) \leftarrow L^p(\Omega,H)} \leq 1\,;$$

andererseits gilt für jede bezüglich $\mathscr{A}_0$ meßbare Zufallsvariable

$$\begin{gathered} E\big(Z \,\big|\, \mathscr{A}_0\big) = Z\,, \\ \big\| E\big(Z \,\big|\, \mathscr{A}_0\big) \big\|_{L^p(\Omega,H)}^p = \|Z\|_{L^p(\Omega,H)}^p\,. \end{gathered}$$

Damit erhält man die Isometrie-Eigenschaft. ◇

Resultat (Bedingter Erwartungswert bei Unabhängigkeit). Es seien $Z_1 : \Omega \to H_1$ sowie $Z_2 : \Omega \to H_2$ zwei Zufallsvariablen, und es bezeichne $\mathscr{A}_0 \subseteq \mathscr{A}$ eine Unter-σ-Algebra; weiters sei Z_1 meßbar bezüglich $\mathscr{A}_0$ und Z_2 stochastisch unabhängig von $\mathscr{A}_0$. Für jede meßbare und beschränkte reellwertige Funktion $F : H_1 \times H_2 \to \mathbb{R}$ gilt dann für fast alle $\omega_1 \in \Omega$ die folgende Identität

$$\Big(E\big(F(Z_1, Z_2) \,\big|\, \mathscr{A}_0\big)\Big)(\omega_1) = E\Big(F\big(Z_1(\omega_1), Z_2\big)\Big) = \int_\Omega F\big(Z_1(\omega_1), Z_2(\omega_2)\big)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega_2)\,.$$

Ohne Erklärung. ◇

3.2 Martingale mit Werten in Hilbert-Räumen

Situation. Es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{A}(t))_{t\in[0,T]}, \mu_\Omega)$ mit $T \in (0,\infty)$ den zugrundeliegenden filtrierten vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum und $(H, (\cdot|\cdot)_H, \|\cdot\|_H)$ einen mit der Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(H)$ versehenen separablen reellen Hilbert-Raum.

Vorbemerkung. Die folgende Definition erweitert den Begriff des Martingales auf stochastische Prozesse mit Werten in Hilbert-Räumen.

Definition (Martingal). Ein bezüglich der Filtrierung $(\mathscr{A}(t))_{t\in[0,T]}$ adaptierter stochastischer Prozeß $(Z(t))_{t\in[0,T]}$ mit $Z(t) \in L^1(\Omega, H)$ für $t \in [0,T]$, welcher für alle $t_1, t_2 \in [0,T]$ mit $t_1 \leq t_2$ und für fast alle $\omega \in \Omega$ die Bedingung (wegen Integrabilitätsbedingung ist bedingter Erwartungswert insbesondere wohldefiniert)

$$\Big(E\big(Z(t_2)\,\big|\,\mathscr{A}(t_1)\big)\Big)(\omega) = \big(Z(t_1)\big)(\omega)$$

erfüllt, wird als Martingal bezeichnet.

Bemerkung. Die zuvor angegebene Bemerkung erlaubt es, die Martingal-Eigenschaft eines stochastischen Prozesses

$$\big(Z(t)\big)_{t\in[0,T]}, \qquad Z(t) : \Omega \longrightarrow H : \omega \longmapsto \big(Z(t)\big)(\omega), \quad t \in [0,T],$$

auf die Martingal-Eigenschaft der reellwertigen stochastischen Prozesse (wobei $h \in H$)

$$\big(z_h(t)\big)_{t\in[0,T]}, \qquad z_h(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto \Big(\big(Z(t)\big)(\omega)\Big|h\Big)_H, \quad t \in [0,T],$$

zurückzuführen; genauer, der stochastische Prozeß $(Z(t))_{t\in[0,T]}$ ist ein Martingal, wenn für jedes $h \in H$ der reellwertige stochastische Prozeß $\big(z_h(t)\big)_{t\in[0,T]}$ ein Martingal ist.

Vorbemerkung. Das folgende Resultat besagt, daß die Norm eines Martingales bzw. deren Potenzen auf ein Sub-Martingal führen.

Erinnerung (Sub-Martingal, Super-Martingal). Im Spezialfall eines reellwertigen stochastischen Prozesses $(z(t))_{t\in[0,T]}$ spricht man von einem Sub-Martingal, wenn anstelle der Gleichheit für $t_1, t_2 \in [0,T]$ mit $t_1 \leq t_2$ die Relation

$$\big(z(t_1)\big)(\omega) \leq \Big(E\big(z(t_2)\,\big|\,\mathscr{A}(t_1)\big)\Big)(\omega)$$

gültig ist; entsprechend erfüllt ein Super-Martingal für $t_1, t_2 \in [0,T]$ mit $t_1 \leq t_2$ die Bedingung

$$\big(z(t_1)\big)(\omega) \geq \Big(E\big(z(t_2)\,\big|\,\mathscr{A}(t_1)\big)\Big)(\omega)\,.$$

Resultat (Norm eines Martingales). Es bezeichne $(Z(t))_{t\in[0,T]}$ mit $Z(t):\Omega\to H$ für $t\in[0,T]$ ein Martingal. Für jeden Exponenten $p\in[1,\infty)$ ist der reellwertige stochastische Prozeß

$$\big(z(t)\big)_{t\in[0,T]}, \qquad z(t):\Omega\longrightarrow\mathbb{R}:\omega\longmapsto\big\|\big(Z(t)\big)(\omega)\big\|_H^p, \quad t\in[0,T],$$

ein Sub-Martingal, das heißt, für alle $t_1,t_2\in[0,T]$ mit $t_1\leq t_2$ gilt die Relation (wobei $\omega\in\Omega$)

$$\big\|\big(Z(t_1)\big)(\omega)\big\|_H^p\leq\Big(E\big(\|Z(t_2)\|_H^p\,\big|\,\mathscr{A}(t_1)\big)\Big)(\omega).$$

Erklärung.

(i) Für $p=1$ verwendet man das Resultat zur Charakterisierung der Norm (separabler Banach-Raum, Folgerung des Satzes von Hahn-Banach, Folge von Elementen des Dualraumes)

$$\exists\,(h_k^*)_{k\in\mathbb{N}}: \qquad \|\cdot\|_H=\sup_{k\in\mathbb{N}}h_k^*(\cdot).$$

Damit ergibt sich die Abschätzung (wobei $t_1\leq t_2$, Martingal-Eigenschaft, obige Bemerkung ermöglicht Vertauschen der Auswertung von h_k^* beim bedingten Erwartungswert, Abschätzung $h_k^*(h)\leq\|\cdot\|_H$ und Monotonie-Eigenschaft des bedingten Erwartungswertes)

$$\begin{aligned}\big\|\big(Z(t_1)\big)(\omega)\big\|_H&=\sup_{k\in\mathbb{N}}h_k^*\Big(\big(Z(t_1)\big)(\omega)\Big)\\&=\sup_{k\in\mathbb{N}}h_k^*\Big(\Big(E\big(Z(t_2)\,\big|\,\mathscr{A}(t_1)\big)\Big)(\omega)\Big)\\&=\sup_{k\in\mathbb{N}}\Big(E\Big(h_k^*\big(Z(t_2)\big)\,\Big|\,\mathscr{A}(t_1)\Big)\Big)(\omega)\\&\leq\Big(E\big(\|Z(t_2)\|_H\,\big|\,\mathscr{A}(t_1)\big)\Big)(\omega).\end{aligned}$$

(ii) Für allgemeine Exponenten wie etwa $p=2$ nützt man zusätzlich die Ungleichung von Jensen für bedingte Erwartungswerte

$$\begin{aligned}\big\|\big(Z(t_1)\big)(\omega)\big\|_H^2&\leq\Big(\Big(E\big(\|Z(t_2)\|_H\,\big|\,\mathscr{A}(t_1)\big)\Big)(\omega)\Big)^2\\&\leq\Big(E\big(\|Z(t_2)\|_H^2\,\big|\,\mathscr{A}(t_1)\big)\Big)(\omega).\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung.

◇

Vorbemerkung. Die Doob'sche Maximalungleichung wird benötigt, um nachzuweisen, daß der Vektorraum der stetigen quadratintegrablen Martingale einen Banach-Raum bildet. Es sei daran erinnert, daß ein stochastischer Prozeß $(Z(t))_{t\in[0,T]}$ mit $Z(t):\Omega\to H$ für $t\in[0,T]$ stetig ist, wenn für (fast) alle $\omega\in\Omega$ die Funktion (Pfad)

$$[0,T]\longrightarrow H:t\longmapsto\big(Z(t)\big)(\omega)$$

stetig ist; entsprechend ist rechtssseitige bzw. linksseitige Stetigkeit erklärt.

Erinnerung (Doob'sche L^p-Ungleichung). Es sei $(z(t))_{t\in[0,T]}$ mit $z(t):\Omega\to\mathbb{R}$ für $t\in[0,T]$ ein reellwertiges rechtsseitig stetiges Submartingal, und für $t\in[0,T]$ und fast alle $\omega\in\Omega$ gelte $(z(t))(\omega)\geq 0$. Unter der Voraussetzung $z(T)\in L^p(\Omega,\mathbb{R})$ mit Exponent $p\in(1,\infty)$ folgt $z\in L^p(\Omega,L^\infty([0,T],\mathbb{R}))$, und es gilt die Abschätzung

$$\big\|z\big\|_{L^p(\Omega,L^\infty([0,T],\mathbb{R}))}\leq\tfrac{p}{p-1}\,\big\|z(T)\big\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R})}\,.$$

Doob'sche Maximalungleichung. Es bezeichne $(Z(t))_{t\in[0,T]}$ mit $Z(t):\Omega\to H$ für $t\in[0,T]$ ein rechtsseitig stetiges Martingal, und für einen Exponenten $p\in(1,\infty)$ gelte $Z(T)\in L^p(\Omega,H)$. Dann ergibt sich die Abschätzung

$$\big\|Z\big\|_{L^p(\Omega,L^\infty([0,T],H))}\leq\tfrac{p}{p-1}\,\big\|Z(T)\big\|_{L^p(\Omega,H)}\,.$$

Erklärung. Das angegebene Resultat zur Norm eines Martingales stellt sicher, daß der zugehörige stochastische Prozeß

$$\big(z(t)\big)_{t\in[0,T]}\,,\qquad z(t):\Omega\longrightarrow\mathbb{R}:\omega\longmapsto\big\|\big(Z(t)\big)(\omega)\big\|_H\,,\quad t\in[0,T]\,,$$

ein nicht-negatives Submartingal ist; aufgrund der Stetigkeit der Norm übertägt sich auch die Eigenschaft der rechtsseitigen Stetigkeit auf $(z(t))_{t\in[0,T]}$. Mittels der Definition der Normen und der Doob'schen L^p-Ungleichung für reellwertige Martingale ergibt sich

$$\begin{aligned}\big\|Z\big\|^p_{L^p(\Omega,L^\infty([0,T],H))}&=\int_\Omega\Big(\sup_{t\in[0,T]}\big\|\big(Z(t)\big)(\omega)\big\|_H\Big)^p\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)=\big\|z\big\|^p_{L^p(\Omega,L^\infty([0,T],\mathbb{R}))}\,,\\ \big\|Z(T)\big\|^p_{L^p(\Omega,H)}&=\int_\Omega\big\|\big(Z(T)\big)(\omega)\big\|^p_H\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)=\big\|z(T)\big\|^p_{L^p(\Omega,\mathbb{R})}\,,\\ \big\|z\big\|_{L^p(\Omega,L^\infty([0,T],\mathbb{R}))}&\leq\tfrac{p}{p-1}\,\big\|z(T)\big\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R})}\,,\end{aligned}$$

und somit die gewünschte Abschätzung. ◇

Bemerkung. Man beachte, daß aus dem obigen Resultat durch Bildung des Erwartungswertes die Relation (mit $t_1\in[0,T]$ und $t_2=T$, wegen $E(E(z\,|\,\mathscr{A}_0))=E(z)$, Definition der Norm)

$$\begin{aligned}\big\|\big(Z(t_1)\big)(\omega)\big\|^p_H&\leq\Big(E\big(\big\|Z(T)\big\|^p_H\,|\,\mathscr{A}(t_1)\big)\Big)(\omega)\,,\\ E\Big(\big\|Z(t_1)\big\|^p_H\Big)&\leq E\Big(E\big(\big\|Z(T)\big\|^p_H\,|\,\mathscr{A}(t_1)\big)\Big)=E\big(\big\|Z(T)\big\|^p_H\big)\,,\\ \big\|Z(t_1)\big\|_{L^p(\Omega,H)}&\leq\big\|Z(T)\big\|_{L^p(\Omega,H)}\,,\end{aligned}$$

folgt; dies zeigt, daß das Supremum der L^p-Norm bei $t=T$ angenommen wird

$$\big\|Z\big\|_{L^\infty([0,T],L^p(\Omega,H))}=\sup_{t\in[0,T]}\big\|Z(t)\big\|_{L^p(\Omega,H)}=\big\|Z(T)\big\|_{L^p(\Omega,H)}\,.$$

Bezeichnung (Quadratintegrable stetige Martingale). Für den Vektorraum der quadratintegrablen stetigen Martingale mit zeitlichem Bereich $[0,T]$ und mit Werten im Hilbert-Raum H wird im Folgenden die Abkürzung

$$\mathscr{M}^2\big([0,T],H\big) = \Big\{Z = \big(Z(t)\big)_{t\in[0,T]} \text{ quadratintegrables stetiges Martingal}\Big\}$$

verwendet; insbesondere gilt somit (für fast alle $\omega \in \Omega$)

$$\mu_\Omega\Big(\big\{\omega \in \Omega : \text{Pfad } [0,T] \to H : t \mapsto \big(Z(t)\big)(\omega) \text{ stetig}\big\}\Big) = 1\,,$$

$$Z(t) \in L^2(\Omega,H)\,, \qquad t \in [0,T]\,,$$

$$\Big(E\big(Z(t_2)\,\big|\,\mathscr{A}(t_1)\big)\Big)(\omega) = \big(Z(t_1)\big)(\omega)\,, \qquad t_1,t_2 \in [0,T]\,, \quad t_1 \le t_2\,.$$

Das folgende Resultat besagt, daß der Raum der quadratintegrablen stetigen Martingale bezüglich der natürlichen Norm vollständig ist.

Resultat (Banach-Raum der quadratintegrablen stetigen Martingale).

(i) Auf dem Vektorraum der quadratintegrablen stetigen Martingale sind die Normen

$$\big\|Z\big\|_{\mathscr{M}^2([0,T],H)} = \big\|Z(T)\big\|_{L^2(\Omega,H)} = \sqrt{\int_\Omega \big\|\big(Z(T)\big)(\omega)\big\|_H^2 \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)}\,,$$

$$\big\|Z\big\|_{L^2(\Omega,L^\infty([0,T],H))} = \sqrt{\int_\Omega \Big(\sup_{t\in[0,T]} \big\|\big(Z(t)\big)(\omega)\big\|_H\Big)^2 \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)}\,,$$

äquivalent.
Erklärung. Offensichtlich ist

$$\begin{aligned}\big\|Z(T)\big\|_{L^2(\Omega,H)} &= \sqrt{\int_\Omega \big\|\big(Z(T)\big)(\omega)\big\|_H^2 \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)}\\ &\le \sqrt{\int_\Omega \Big(\sup_{t\in[0,T]} \big\|\big(Z(t)\big)(\omega)\big\|_H\Big)^2 \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)} = \big\|Z\big\|_{L^2(\Omega,L^\infty([0,T],H))}\,;\end{aligned}$$

aufgrund der Doob'sche Maximalungleichung mit Exponent $p = 2$ gilt die Abschätzung

$$\big\|Z\big\|_{L^2(\Omega,L^\infty([0,T],H))} \le 2\,\big\|Z(T)\big\|_{L^2(\Omega,H)}\,.$$

Dies zeigt die Relation

$$\big\|Z\big\|_{\mathscr{M}^2([0,T],H)} \le \big\|Z\big\|_{L^2(\Omega,L^\infty([0,T],H))} \le 2\,\big\|Z\big\|_{\mathscr{M}^2([0,T],H)}$$

und damit die Äquivalenz der Normen. ◇

(ii) Versehen mit diesen Normen ist der Vektorraum $\mathscr{M}^2([0,T],H)$ eine abgeschlossene Teilmenge des Banach-Raumes $L^2(\Omega,L^\infty([0,T],H))$ und bildet somit einen Banach-Raum.
Erklärung. Siehe Denk (2014). ◇

3.3 Martingal-Eigenschaft von Wiener-Prozessen

Situation. Es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, \mu_\Omega)$ den zugrundeliegenden vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum und $(H, (\cdot|\cdot)_H, \|\cdot\|_H)$ einen mit der Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(H)$ versehenen separablen reellen Hilbert-Raum.

Vorüberlegungen. Zum Nachweis der Martingal-Eigenschaft von Wiener-Prozessen werden folgende Überlegungen genützt.

(i) *Darstellung eines Wiener-Prozesses.* An früherer Stelle wurde die folgende Darstellung eines Q-Wiener-Prozesses $(W(t))_{t\in[0,T]}$ mit $W(t) : \Omega \to H$ für $t \in [0,T]$ hergeleitet (mit stochastisch unabhängigen reellwertigen Wiener-Prozessen $(w_k(t))_{t\in[0,T]}$ für $k \in K$)

$$\begin{gathered}
\big(W(t)\big)(\omega) = \sum_{k\in K} \sqrt{\lambda_k}\,\big(w_k(t)\big)(\omega)\, e_k\,, \qquad t \in [0,T]\,, \quad \omega \in \Omega\,,\\
w_k(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \Big(\big(W(t)\big)(\omega)\Big| e_k\Big)_H\,, \qquad k \in K\,,\\
E\big(w_k(t)\big) = 0\,, \qquad E\big(w_k(t)\, w_\ell(t)\big) = t\,\delta_{k\ell}\,, \qquad k,\ell \in K;
\end{gathered}$$

dabei bezeichnet $Q \in \mathscr{S}_1(H)$ einen positiv semi-definiten selbstadjungierten Spurklasse-Operator mit zugehörigen orthonormalen Eigenfunktionen zu positiven Eigenwerten

$$\big(e_k\big)_{k\in K}\,, \qquad Q\, e_k = \lambda_k\, e_k\,, \quad \lambda_k > 0\,, \qquad k \in K\,.$$

(ii) *Bemerkung.* Aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit der normalverteilten Zufallsvariablen $w_k(t_2) - w_k(t_1)$ und $w_k(t_1)$ für $t_1 < t_2$ und $k \in K$ sind insbesondere die Identitäten

$$\begin{gathered}
E\big(w_k(t_1)\big) = 0\,, \qquad V\big(w_k(t_1)\big) = E\Big(\big(w_k(t_1)\big)^2\Big) = t_1\,,\\
E\big(w_k(t_2)\, w_k(t_1)\big) = t_1\,,\\
V\big(w_k(t_2) - w_k(t_1)\big) = E\Big(\big(w_k(t_2) - w_k(t_1)\big)^2\Big) = t_2 - t_1\,,
\end{gathered}$$

gültig; elementare Rechnungen zeigen nämlich

$$\begin{gathered}
E\Big(\big(w_k(t_2) - w_k(t_1)\big)\, w_k(t_1)\Big) = E\big(w_k(t_2) - w_k(t_1)\big)\, E\big(w_k(t_1)\big) = 0\,,\\
0 = E\Big(w_k(t_2)\, w_k(t_1) - \big(w_k(t_1)\big)^2\Big) = E\big(w_k(t_2)\, w_k(t_1)\big) - V\big(w_k(t_1)\big)\,,\\
E\big(w_k(t_2)\, w_k(t_1)\big) = V\big(w_k(t_1)\big) = t_1\,,\\
E\Big(\big(w_k(t_2) - w_k(t_1)\big)^2\Big) = V\big(w_k(t_2)\big) - 2\,E\big(w_k(t_1)\, w_k(t_2)\big) + V\big(w_k(t_1)\big) = t_2 - t_1\,.
\end{gathered}$$

(iii) *Stetigkeit.* Aus der angegebenen Darstellung folgt insbesondere die Stetigkeit der Pfade (Parseval'sche Identität, Stetigkeit der Pfade von $(w_k(t))_{t\in[0,T]}$ für $k \in K$ überträgt sich auf

$(W(t))_{t\in[0,T]})$

$$\big\|\big(W(t_2)-W(t_1)\big)(\omega)\big\|_H^2 = \Big\|\sum_{k\in K}\sqrt{\lambda_k}\,\big(w_k(t_2)-w_k(t_1)\big)(\omega)\,e_k\Big\|_H^2$$
$$= \sum_{k\in K}\lambda_k\Big(\big(w_k(t_2)-w_k(t_1)\big)(\omega)\Big)^2 .$$

(iv) *Integrabilität.* Die Konvergenz der Reihe gilt im Sinne des $L^2(\Omega,H)$; genauer, wegen

$$\begin{aligned}\|W(t)\|_{L^2(\Omega,H)} &= \sqrt{\int_\Omega \big\|\big(W(t)\big)(\omega)\big\|_H^2\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)}\\ &= \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{N}}\lambda_k\int_\Omega \big(w_k(t)\big)(\omega)^2\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)}\\ &= \sqrt{t\,\mathrm{Spur}(Q)}\\ &\le \sqrt{T\,\mathrm{Spur}(Q)} < \infty\end{aligned}$$

ist $W(t)\in L^2(\Omega,H)$ für alle $t\in[0,T]$ und zudem

$$W \in L^\infty\big([0,T],L^2(\Omega,H)\big).$$

(v) *Filtrierung.* Es bezeichne $(\mathscr{A}(t))_{t\in[0,T]}$ die gemäß eines früheren Resultates konstruierte Filtrierung; insbesondere sei $W(t_2)-W(t_1)$ für alle $t_1,t_2\in[0,T]$ mit $t_1<t_2$ stochastisch unabhängig von $\mathscr{A}(t_1)$. Man beachte, daß sich damit für die durch das Skalarprodukt definierten reellwertigen Zufallsvariablen folgende Vereinfachungen für die bedingten Erwartungswerte ergeben (wobei $h\in H$ und $\omega\in\Omega$)

$$z_h = \big(W(t_2)-W(t_1)\big|h\big)_H : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad E(z_h)=0\,,$$
$$\Big(E\big(z_h\big|\mathscr{A}(t_1)\big)\Big)(\omega) = E(z_h) = 0\,.$$

(vi) *Martingal-Eigenschaft.* Es bleibt zu zeigen, daß ein Q-Wiener-Prozeß die Martingal-Eigenschaft für $t_1,t_2\in[0,T]$ mit $t_1<t_2$ und fast alle $\omega\in\Omega$ erfüllt ist

$$\Big(E\big(W(t_2)\,\big|\mathscr{A}(t_1)\big)\Big)(\omega) = \big(W(t_1)\big)(\omega)\,.$$

Mittels der zuvor angegebenen Überlegung erhält man für jedes Element $A_1\in\mathscr{A}(t_1)$ (für vollständiges Orthonormalsystem $(h_k)_{k\in\widetilde{K}}$ von H, Bilinearität des Skalarproduktes, definierende Relation für bedingten Erwartungswert $E(z_h\,|\mathscr{A}(t_1))=0$)

$$\left(\int_{A_1}\big(W(t_2)-W(t_1)\big)(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\middle|h_k\right)_H = \int_{A_1} z_{h_k}(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = 0\,, \qquad k\in\widetilde{K}\,.$$

Da alle Koeffizienten gleich Null sind, folgt daraus die Martingal-Eigenschaft (definierende Relation für bedingten Erwartungswert)

$$\int_{A_1} \big(W(t_2) - W(t_1)\big)(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = 0\,,$$

$$\int_{A_1} \big(W(t_2)\big)(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = \int_{A_1} \big(W(t_1)\big)(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\,,$$

$$\Big(E\big(W(t_2)\big|\mathscr{A}(t_1)\big)\Big)(\omega) = \big(W(t_1)\big)(\omega)\,.$$

Insgesamt zeigen diese Überlegungen das folgende Resultat.

Resultat (Martingal-Eigenschaft von Wiener-Prozessen). Ein Q-Wiener-Prozeß bezüglich einer normalen Filtrierung ist ein quadratintegrables stetiges Martingal

$$\big(W(t)\big)_{t\in[0,T]} \in \mathscr{M}^2\big([0,T],H\big)\,.$$

Kapitel 4

Zylindrische Wiener-Prozesse

Inhalt. Im Folgenden wird die Erweiterung von Wiener-Prozessen auf zylindrische Wiener-Prozesse skizziert; nähere Informationen dazu finden sich in DENK (2014).

Überblick. Um eine Verbindung mit DENK (2014) herzustellen, sind die entsprechenden Verweise angegeben.

- Zylindrische Wiener-Prozesse (vgl. Bemerkung 2.33 sowie Definition und Satz 2.34)

4.1 Zylindrische Wiener-Prozesse mit Werten in Hilbert-Räumen

Vorbemerkung. In Hinblick auf stochastische Evolutionsgleichungen wird folgende Erweiterung von Wiener-Prozessen mit Werten in einem Hilbert-Raum betrachtet. Anstelle der bisherigen Bezeichnung $Q \in \mathscr{S}_1(H)$ wird die Bezeichnung $Q_1 \in \mathscr{S}_1(H_1)$ verwendet.[1]

Zylindrischer Wiener-Prozeß (Spezialfall $P = I$). Unter den folgenden Voraussetzungen und mit folgenden Bezeichnungen ergibt sich ein Q_1-Wiener-Prozeß $(W(t))_{t\in[0,T]}$ mit Werten in H_1; man spricht auch von einem zylindrischer P-Wiener-Prozeß in $\widetilde{H}_1$.

(i) Es bezeichne H_1 den zugrundeliegenden reellen separablen Hilbert-Raum.

(ii) Es bezeichne $\widetilde{H}_1$ einen weiteren reellen separablen Hilbert-Raum, und es sei $(\widetilde{e}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von $\widetilde{H}_1$. Weiters bezeichne $J : \widetilde{H}_1 \to H_1$ einen injektiven Hilbert–Schmidt-Operator;[2] insbesondere definiert dann (mit adjungiertem Operator $J^* : H_1 \to \widetilde{H}_1$)

$$Q_1 = JJ^* : H_1 \longrightarrow H_1$$

einen injektiven positiv semi-definiten selbstadjungierten Spurklasse-Operator.

(iii) Mittels der Darstellung (beachte $J\widetilde{e}_k \in H_1$ für $k \in \mathbb{N}$, mit unabhängigen reellwertigen Wiener-Prozessen $(\beta_k(t))_{t\in[0,T]}$ für $k \in \mathbb{N}$)

$$W(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \beta_k(t)\, J\widetilde{e}_k : \Omega \longrightarrow H_1\,, \qquad t \in [0,T]\,,$$

erhält man einen Q_1-Wiener-Prozeß $(W(t))_{t\in[0,T]}$ mit Werten in H_1.

Ohne Erklärung. ◇

---

[1] *Bemerkung.* Die in DENK (2014) verwendete irreführende Bezeichnung Q wird durch P ersetzt. Man beachte, daß im Spezialfall des Identitätsoperators $P = I : \widetilde{H}_1 \to \widetilde{H}_1$ insbesondere die Voraussetzungen Injektivität, Stetigkeit, Selbstadjungiertheit und positive Semi-Definitheit erfüllt sind und sich folgende Vereinfachungen ergeben

$$P = I : \widetilde{H}_1 \to \widetilde{H}_1\,, \qquad H_0 = \mathrm{Bi}\big(P^{1/2}\big) = \widetilde{H}_1\,, \qquad \|\cdot\|_{H_0} = \|\cdot\|_{\widetilde{H}_1}\,;$$

jedes vollständiges Orthonormalsystem $(\widetilde{e}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\widetilde{H}_1$ entspricht Eigenfunktionen, denn

$$P\,\widetilde{e}_k = 1 \cdot \widetilde{e}_k\,, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Im Fall eines unendlich-dimensionalen Hilbert-Raumes ist der Identitätsoperator jedoch *kein* Spurklasse-Operator, d.h. $I \notin \mathscr{S}_1(\widetilde{H}_1)$.

[2] *Beispiel.* Eine zulässige Wahl ist die Bijektion (somit $\widetilde{H}_1 = H_1$)

$$(\alpha_k)_{\kappa\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})\,, \quad \alpha_k > 0 \ \text{ für jedes } k \in \mathbb{N}\,, \qquad J : \widetilde{H}_1 \longrightarrow H_1 : h_1 \longmapsto \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k \big(h\big|\widetilde{e}_k\big)_H\, \widetilde{e}_k\,.$$

Teil III

Das stochastische Integral

Kapitel 1

Konstruktion des stochastischen Integrales

Inhalt. Im Folgenden wird das stochastische Integral bezüglich eines Wiener-Prozesses für elementare Integranden mit Werten in einem Hilbert-Raum eingeführt und grundlegende Eigenschaften abgeleitet.

Überblick. Um eine Verbindung mit DENK (2014) herzustellen, sind die entsprechenden Verweise angegeben.

- Elementarer stochastischer Prozeß (Definition 3.2)

  Stochastisches Integral (Definition 3.2)

- Resultat zur Martingal-Eigenschaft ((Lemma 3.3)

  Resultat zur Itô-Isometrie ((Satz 3.4)

  Bemerkung zu Erwartungswert und Kovarianzoperator ((Bemerkung 3.14)

1.1 Einführung für elementare Integranden

Situation. Es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{A}(t))_{t\in[0,T]}, \mu_\Omega)$ mit $T \in (0,\infty)$ den zugrundeliegenden normal filtrierten vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum, und es seien $(H_1, (\cdot|\cdot)_{H_1}, \|\cdot\|_{H_1})$ sowie $(H_2, (\cdot|\cdot)_{H_2}, \|\cdot\|_{H_2})$ zwei mit den entsprechenden Borel-σ-Algebren $\mathscr{B}(H_1)$ und $\mathscr{B}(H_2)$ versehene separable reelle Hilbert-Räume. Weiters bezeichne $Q_1 \in \mathscr{S}_1(H_1)$ einen positiv semidefiniten selbstadjungierten Spurklasse-Operator, und es sei $(W(t))_{t\in[0,T]}$ mit $W(t): \Omega \to H_1$ für $t \in [0,T]$ ein Q_1-Wiener-Prozeß bezüglich der betrachteten Filtrierung.[1]

Erinnerung. Es bezeichne $(w(t))_{t\in[0,T]}$ mit $w(t): \Omega \to \mathbb{R}$ für $t \in [0,T]$ einen reellwertigen Wiener-Prozeß.

(i) *Stochastisches Integral für elementare Integranden.* Für eine natürliche Zahl $K \in \mathbb{N}$ bezeichne $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_K = T$ eine fixierte Zerlegung des Zeitintervalles und $(z_k)_{k=0}^K$ einen zeitlich diskreten reellwertigen stochastischen Prozeß, d.h. für alle $k \in \{0,1,\dots,K\}$ gelte insbesondere $z_k: \Omega \to \mathbb{R}$. Betrachtet man als Integrand den elementaren zeitlich kontinuierlichen stochastischen Prozeß (Treppenfunktion)

$$\big(z(t)\big)_{t\in[0,T]}, \qquad z(t): \Omega \longrightarrow \mathbb{R}: \omega \longmapsto \sum_{k=0}^{K-1} z_k(\omega)\, \chi_{[t_k,t_{k+1})}(t) + z_K(\omega)\, \chi_{\{t_K\}}(t), \quad t \in [0,T],$$

so ist es naheliegend, das stochastische Integral durch (Eigenschaft der Linearität wird vorausgesetzt, kein Beitrag des letzten Summanden)

$$\begin{aligned}\int_0^T \big(z(t)\big)(\omega)\, \mathrm{d}\big(w(t)\big)(\omega) &= \sum_{k=0}^{K-1} z_k(\omega) \int_0^T \chi_{[t_k,t_{k+1})}(t)\, \mathrm{d}\big(w(t)\big)(\omega)\\ &= \sum_{k=0}^{K-1} z_k(\omega) \int_{t_k}^{t_{k+1}} 1\, \mathrm{d}\big(w(t)\big)(\omega)\\ &= \sum_{k=0}^{K-1} z_k(\omega) \big(w(t_{k+1}) - w(t_k)\big)(\omega), \qquad \omega \in \Omega,\end{aligned}$$

zu definieren; wegen $z(t_k) = z_k$ für $k \in \{0,1,\dots,K\}$ ist die Kurzschreibweise

$$\int_0^T z(t)\, \mathrm{d}w(t) = \sum_{k=0}^{K-1} z(t_k) \big(w(t_{k+1}) - w(t_k)\big)$$

gerechtfertigt.[2]

---

[1] *Bemerkung.* Falls nicht anders angegeben, wird der Banach-Raum der stetigen linearen Operatoren $\big(L(H_1,H_2), \|\cdot\|_{H_2\leftarrow H_1}\big)$ mit der zugehörigen Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(L(H_1,H_2))$ versehen oder die von der Familie der Semi-Normen

$$(p_{h_1})_{h_1\in H_1}, \qquad p_{h_1}: L(H_1,H_2) \longrightarrow \mathbb{R}: A \longmapsto \big\|A h_1\big\|_{H_2}, \quad h_1 \in H_1,$$

erzeugte starke Operatortopologie betrachtet, vgl. auch DENK (2014).

[2] *Bemerkung.* Ein alternativer Ansatz wie etwa

$$\widetilde{z}(t) = z_0\, \chi_{\{t_0\}}(t) + \sum_{k=0}^{K-1} z_k\, \chi_{(t_k,t_{k+1}]}(t), \qquad t \in [0,T],$$

(ii) *Itô-Integral und Erweiterung.* Zur Einführung des Itô-Integrales nützt man die Tatsache, daß für Integranden $z \in L^2(\Omega \times [0,T],\mathbb{R})$ eine Folge von approximierenden elementaren stochastischen Prozessen der zuvor angegebenen Struktur existiert (zur Vereinfachung betrachte äquidistante Zerlegung mit $t_K = T$ und dann $K \to \infty$, bei hinreichend regulären Funktionen wäre Wahl $z^{(K)}(t_k) = z(t_k)$ naheliegend, wobei $t \in [0,T]$)

$$z^{(K)} \xrightarrow{K\to\infty} z \quad \text{in } L^2\big(\Omega \times [0,T],\mathbb{R}\big), \qquad z^{(K)}(t) = \sum_{k=0}^{K-1} z^{(K)}(t_k)\,\chi_{[t_k,t_{k+1})}(t) + z^{(K)}(t_K)\,\chi_{\{t_K\}}(t)\,,$$

und die Folge der zugehörigen stochastischen Integrale (entspricht Linksregel)

$$\left(\int_0^T z^{(K)}(t)\,\mathrm{d}w(t)\right)_{K\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{K-1} z^{(K)}(t_k)\big(w(t_{k+1}) - w(t_k)\big)\right)_{K\in\mathbb{N}}$$

eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega,\mathbb{R})$ bildet; die Vollständigkeit von $L^2(\Omega,\mathbb{R})$ sichert die Existenz eines Grenzwertes, welcher als Itô-Integral bezeichnet wird

$$\int_0^T z^{(K)}(t)\,\mathrm{d}w(t) = \sum_{k=0}^{K-1} z^{(K)}(t_k)\big(w(t_{k+1}) - w(t_k)\big) \xrightarrow{K\to\infty} \int_0^T z(t)\,\mathrm{d}w(t) \quad \text{in } L^2(\Omega,\mathbb{R})\,.$$

Die einschränkende Bedingung $z \in L^2(\Omega\times[0,T],\mathbb{R})$ kann zudem durch die Voraussetzung $z \in L^2_\omega([0,T],\mathbb{R})$ ersetzt werden.

(iii) *Stratonovich-Integral.* Betrachtet man Approximationen, welche der Trapezregel entsprechen, so ergibt sich das Stratonovich-Integral

$$\sum_{k=0}^{K-1} \tfrac{1}{2}\big(z^{(K)}(t_k) + z^{(K)}(t_{k+1})\big)\big(w(t_{k+1}) - w(t_k)\big) \xrightarrow{K\to\infty} \int_0^T z(t)\circ\mathrm{d}w(t)\,.$$

Vorbemerkung. In Analogie zum reellwertigen Fall wird das stochastische Integral zunächst für spezielle Integranden erklärt; man beachte, daß die Definitionsbereiche und Bildbereiche sinnvoll gewählt sind und das stochastische Integral auf einen stochastischen Prozess mit Werten in H_2 führt

$$\begin{gathered}
\big(W(t)\big)_{t\in[0,T]}\,, \qquad W(t):\Omega \longrightarrow H_1\,, \quad t\in[0,T]\,,\\
\big(Z(t)\big)_{t\in[0,T]}\,, \qquad Z(t):\Omega \longrightarrow L(H_1,H_2)\,, \quad t\in[0,T]\,,\\
\big(J(t)\big)_{t\in[0,T]}\,, \quad J(t):\Omega \longrightarrow H_2:\omega \longmapsto \big(J(t)\big)(\omega) = \int_0^t \underbrace{\underbrace{\big(Z(\tau)\big)(\omega)}_{H_2\leftarrow H_1}\,\mathrm{d}\underbrace{\big(W(\tau)\big)(\omega)}_{\in H_1}}_{\in H_2}\,, \quad t\in[0,T]\,.
\end{gathered}$$

Die Einführung des Itô-Integrales benötigt zusätzliche Überlegungen und wird deswegen erst an späterer Stelle behandelt.

würde auf denselben Wert des Integrales führen, vgl. DENK (2014); in diesem Fall gilt jedoch $\widetilde{z}(t_{k+1}) = z_k$ für $k \in \{0,1,\dots,K-1\}$.

Definition (Elementarer stochastischer Prozeß, Stochastisches Integral).

(i) *Elementarer stochastischer Prozeß.* Ein zeitlich kontinuierlicher stochastischer Prozeß $(Z(t))_{t\in[0,T]}$ mit $Z(t):\Omega\to L(H_1,H_2)$ für $t\in[0,T]$ heißt elementar

$$\big(Z(t)\big)_{t\in[0,T]}\in\mathscr{E}(H_1,H_2)\,,$$

wenn er sich in der Form (fixierte Zerlegung des Zeitintervalles $0=t_0<t_1<\cdots<t_K=T$ mit $K\in\mathbb{N}$, für $t\in[0,T]$)

$$Z(t):\Omega\longrightarrow L(H_1,H_2):\omega\longmapsto\big(Z(t)\big)(\omega)=\sum_{k=0}^{K-1}Z_k(\omega)\,\chi_{[t_k,t_{k+1})}(t)+Z_K(\omega)\,\chi_{\{t_K\}}(t)\,,$$
$$Z_k:\Omega\longrightarrow L(H_1,H_2)\,,\qquad k\in\{0,1,\dots,K\}\,,$$

darstellen läßt; dabei wird vorausgesetzt, daß der definierende zeitlich diskrete stochastische Prozeß $(Z_k)_{k=0}^K$ zusätzlich die folgende Bedingungen erfüllt.

(a) Die Zufallsvariable $Z_k:\Omega\to L(H_1,H_2)$ ist meßbar bezüglich der σ-Algebra $\mathscr{A}(t_k)$.

(b) Der Bildbereich der Zufallsvariable $Z_k:\Omega\to L(H_1,H_2)$ ist endlich, d.h. die folgende Darstellung ist gültig (wobei $L_k\in\mathbb{N}$ und $A_1^{(k)},\dots,A_{L_k}^{(k)}\in\mathscr{A}(t_k)$ paarweise disjunkt für jeden Index $k\in\{0,1,\dots,K\}$)

$$Z_k:\Omega\longrightarrow L(H_1,H_2):\omega\longmapsto Z_k(\omega)=\sum_{\ell=1}^{L_k}z_\ell^{(k)}\,\chi_{A_\ell^{(k)}}(\omega)\,,$$
$$z_\ell^{(k)}\in L(H_1,H_2)\,,\qquad \ell\in\{1,\dots,L_k\}\,.$$

Insgesamt führt dies auf die spezielle Form

$$\begin{aligned}\big(Z(t)\big)(\omega)&=\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{\ell=1}^{L_k}z_\ell^{(k)}\,\chi_{A_\ell^{(k)}}(\omega)\,\chi_{[t_k,t_{k+1})}(t)\\&\quad+\sum_{\ell=1}^{L_K}z_\ell^{(K)}\,\chi_{A_\ell^{(K)}}(\omega)\,\chi_{\{t_K\}}(t)\,,\qquad t\in[0,T]\,,\quad\omega\in\Omega\,.\end{aligned}$$

(c) *Stochastisches Integral.* Es ist naheliegend, das stochastische Integral eines elementaren Integranden bezüglich eines Wiener-Prozesses wie folgt zu erklären ($\chi_{\{t_K\}}(t)$ hat keinen Beitrag zum Wert des Integrales)

$$\begin{aligned}\big(J(T)\big)(\omega)&=\int_0^T\big(Z(t)\big)(\omega)\,\mathrm{d}\big(W(t)\big)(\omega)\\&=\sum_{k=0}^{K-1}Z_k(\omega)\int_0^T\chi_{[t_k,t_{k+1})}(t)\,\mathrm{d}\big(W(t)\big)(\omega)\\&=\sum_{k=0}^{K-1}Z_k(\omega)\,\big(W(t_{k+1})-W(t_k)\big)(\omega)\,;\end{aligned}$$

wie üblich, ist die kompakte Kurzschreibweise dafür (Relation $Z_k = Z(t_k)$ konsistent)

$$J(T) = \int_0^T Z(t)\,\mathrm{d}W(t) = \sum_{k=0}^{K-1} Z(t_k)\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)\,.$$

Das Einsetzen der speziellen Form der definierenden Zufallsvariablen führt auf

$$\big(J(T)\big)(\omega) = \int_0^T \big(Z(t)\big)(\omega)\,\mathrm{d}\big(W(t)\big)(\omega) = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{\ell=1}^{L_k} z_\ell^{(k)}\,\chi_{A_\ell^{(k)}}(\omega)\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)(\omega)\,;$$

eine direkte Erweiterung dieser Darstellung wird an späterer Stelle zum Nachweis der Martingal-Eigenschaft des stochastischen Integrales genützt.

(d) *Stochastischer Prozeß.* Wählt man etwas allgemeiner einen Zeitpunkt $t \in [0,T]$ mit $t \in (t_j, t_{j+1}]$ für ein $j \in \{0,1,\dots,K-1\}$, so erhält man

$$\begin{aligned}
J(t) &= \int_0^t Z(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau)\\
&= \int_0^{t_j} Z(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau) + \int_{t_j}^t Z(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau)\\
&= \sum_{k=0}^{j-1} Z(t_k)\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big) + Z(t_j)\big(W(t) - W(t_j)\big)\,, \qquad t \in [0,T]\,.
\end{aligned}$$

Das stochastische Integral eines elementaren Prozesses definiert somit einen zeitlich kontinuierlichen stochastischen Prozeß

$$\begin{gathered}
\big(J(t)\big)_{t\in[0,T]}\,, \qquad J(t) : \Omega \longrightarrow H_2\,, \quad t \in [0,T]\,,\\
J(t) = \int_0^t Z(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau) = \sum_{k=0}^{j-1} Z(t_k)\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big) + Z(t_j)\big(W(t) - W(t_j)\big)\,,\\
t \in (t_j, t_{j+1}]\,, \qquad j \in \{0,1,\dots,K-1\}\,.
\end{gathered}$$

1.2 Martingal-Eigenschaft und Itô-Isometrie

Situation. Wie zuvor bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{A}(t))_{t\in[0,T]}, \mu_\Omega)$ mit $T \in (0,\infty)$ den zugrundeliegenden normal filtrierten vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum und $(H_1, (\cdot|\cdot)_{H_1}, \|\cdot\|_{H_1})$ sowie $(H_2, (\cdot|\cdot)_{H_2}, \|\cdot\|_{H_2})$ zwei mit den entsprechenden Borel-σ-Algebren $\mathscr{B}(H_1)$ und $\mathscr{B}(H_2)$ versehene separable reelle Hilbert-Räume. Weiters bezeichne $Q_1 \in \mathscr{S}_1(H_1)$ einen positiv semidefiniten selbstadjungierten Spurklasse-Operator, und es sei $(W(t))_{t\in[0,T]}$ mit $W(t): \Omega \to H_1$ für $t \in [0,T]$ ein Q_1-Wiener-Prozeß bezüglich der betrachteten Filtrierung.

Vorbemerkung. Ein erstes grundlegendes Resultat besagt, daß das stochastische Integral eines elementaren Prozesses bezüglich eines Wiener-Prozesses

$$\big(J(t)\big)_{t\in[0,T]}, \qquad J(t): \Omega \longrightarrow H_2, \quad t \in [0,T],$$
$$J(t) = \int_0^t Z(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau) = \sum_{k=0}^{j-1} Z(t_k)\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big) + Z(t_j)\big(W(t) - W(t_j)\big),$$
$$t \in (t_j, t_{j+1}], \qquad j \in \{0,1,\dots,K-1\},$$

auf ein quadratintegrables stetiges Martingal führt. Der Vollständigkeit halber sei nochmals daran erinnert, daß $Z_k = Z(t_k)$ für jeden Index $k \in \{0,1,\dots,K_1\}$ wie folgt gegeben ist

$$Z_k: \Omega \longrightarrow L(H_1,H_2): \omega \longmapsto Z_k(\omega) = \sum_{\ell=1}^{L_k} z_\ell^{(k)}\, \chi_{A_\ell^{(k)}}(\omega),$$
$$z_\ell^{(k)} \in L(H_1,H_2), \quad A_\ell^{(k)} \in \mathscr{A}(t_k), \qquad \ell \in \{1,\dots,L_k\}.$$

Resultat (Martingal-Eigenschaft). Es gilt die Implikation

$$\big(Z(t)\big)_{t\in[0,T]} \in \mathscr{E}(H_1,H_2)$$
$$\Longrightarrow \quad \big(J(t)\big)_{t\in[0,T]} = \left(\int_0^t Z(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau)\right)_{t\in[0,T]} \in \mathscr{M}^2\big([0,T],H_2\big).$$

Erklärung.

(i) *Stetigkeit.* Für festes $\omega \in \Omega$ ist $Z_k(\omega) \in L(H_1,H_2)$; zusammen mit der Stetigkeit der Pfade von Wiener-Prozessen folgt somit die Stetigkeit des stochastischen Integrales.

(ii) *Integrabilität.* An früherer Stelle wurde die Eigenschaft $W(t) \in L^2(\Omega,H_1)$ für alle $t \in [0,T]$ nachgewiesen; aufgrund der speziellen Struktur von Z_k gilt außerdem

$$\|Z_k\|_{L^\infty(\Omega,L(H_1,H_2))} = \sup_{\omega\in\Omega} \|Z_k(\omega)\|_{L(H_1,H_2)} < \infty.$$

Mittels der Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&\big\| Z_k(\omega) \big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)(\omega) \big\|_{H_2} \\
&\qquad \leq \big\| Z_k(\omega) \big\|_{H_2 \leftarrow H_1} \big\| \big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)(\omega) \big\|_{H_1} \\
&\qquad \leq \big\| Z_k \big\|_{L^\infty(\Omega, L(H_1, H_2))} \big\| \big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)(\omega) \big\|_{H_1}, \\
&\big\| Z_k \big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big) \big\|_{L^2(\Omega, H_2)} \\
&\qquad = \sqrt{\int_\Omega \big\| Z_k(\omega) \big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)(\omega) \big\|_{H_2}^2 \,\mathrm{d}\omega} \\
&\qquad \leq \big\| Z_k \big\|_{L^\infty(\Omega, L(H_1, H_2))} \big\| W(t_{k+1}) - W(t_k) \big\|_{L^2(\Omega, H_1)}, \\
&\big\| J(t) \big\|_{L^2(\Omega, H_2)} \\
&\qquad \leq \max_{k \in \{0,1,K-1\}} \big\| Z_k \big\|_{L^\infty(\Omega, L(H_1, H_2))} \big\| W(t_{k+1}) - W(t_k) \big\|_{L^2(\Omega, H_1)},
\end{aligned}
$$

ergibt sich somit die gewünschte Integrabilitätseigenschaft.

(iii) *Martingal-Eigenschaft.* Zur Vereinfachung der Überlegungen nehmen wir an, daß die betrachteten Zeitpunkte die Bedingungen $s, t \in [t_j, t_{j+1}]$ mit $s < t$ und $j \in \{1, \dots, K-1\}$ erfüllen; offensichtlich ist die Differenz $J(t) - J(s)$ dann durch

$$
\begin{aligned}
J(t) &= \sum_{k=0}^{j-1} Z(t_k) \big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big) + Z(t_j) \big(W(t) - W(t_j)\big), \\
J(s) &= \sum_{k=0}^{j-1} Z(t_k) \big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big) + Z(t_j) \big(W(s) - W(t_j)\big), \\
& J(t) - J(s) = Z(t_j) \big(W(t) - W(s)\big),
\end{aligned}
$$

gegeben. Nach Voraussetzung hat $Z(t_j)$ die Form (wobei $\omega \in \Omega$)

$$
Z_j(\omega) = \sum_{\ell=1}^{L_j} z_\ell^{(j)} \chi_{A_\ell^{(j)}}(\omega), \qquad A_\ell^{(j)} \in \mathscr{A}(t_j);
$$

man beachte, daß für jedes Element $A_s \in A(t_s)$ der Durchschnitt mit $A_\ell^{(j)}$ ebenfalls der Forderung $A_s \cap A_\ell^{(j)} \in \mathscr{A}(t_s)$ genügt. Aus der Martingal-Eigenschaft von Wiener-Prozessen erhält man somit die Martingal-Eigenschaft des stochastischen Integrales

$$
\begin{aligned}
&\int_{A_s \cap A_\ell^{(j)}} \big(W(t) - W(s)\big)(\omega) \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = 0 \\
\Longrightarrow \quad &\int_{A_s} \big(J(t) - J(s)\big)(\omega) \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = \sum_{\ell=1}^{L_j} z_\ell^{(j)} \int_{A_s} \chi_{A_\ell^{(j)}}(\omega) \big(W(t) - W(s)\big)(\omega) \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) \\
&= \sum_{\ell=1}^{L_j} z_\ell^{(j)} \int_{A_s \cap A_\ell^{(j)}} \big(W(t) - W(s)\big)(\omega) \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Ähnliche Überlegungen zeigen den allgemeinen Fall. ◇

Vorbemerkung. Es sei daran erinnert, daß der Banach-Raum der quadratintegrablen stetigen Martingale auf H_2 mit der Norm

$$\|Z\|_{\mathscr{M}^2([0,T],H_2)} = \|Z(T)\|_{L^2(\Omega,H_2)} = \sqrt{\int_\Omega \|\big(Z(T)\big)(\omega)\|_{H_2}^2 \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)}$$

versehen ist. Das folgende Resultat gibt eine Relation für die Martingal-Norm des stochastischen Integrales an.

Resultat (Itô-Isometrie). Für jeden elementaren Prozeß erfüllt das zugehörige stochastische Integral (in Hinblick auf Norm ist Betrachtung des Wertes bei $t = T$ ausreichend)

$$\big(Z(t)\big)_{t\in[0,T]} \in \mathscr{E}(H_1,H_2)\,, \qquad J(T) = \int_0^T Z(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau) = \sum_{k=0}^{K-1} Z(t_k)\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)\,,$$

die Gleichheit (weitere Relation zur Vereinfachung für Quadrate angegeben)

$$\begin{gathered}
\|J(T)\|_{L^2(\Omega,H_2)} = \|ZQ^{1/2}\|_{L^2(\Omega,L^2([0,T],\mathscr{S}_2(H_1,H_2)))}\,,\\
\int_\Omega \|\big(J(T)\big)(\omega)\|_{H_2}^2 \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = \int_\Omega\int_0^T \|\big(Z(\tau)\big)(\omega)\,Q^{1/2}\|_{\mathscr{S}_2(H_1,H_2)}^2 \,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\,.
\end{gathered}$$

Erklärung.

(i) *Vereinfachung.* Zur Vereinfachung werden detailierte Überlegungen für den Spezialfall zweier Summanden (wobei $\ell, m \in \{0,1,\dots,K-1\}$ und $\ell < m$)

$$\begin{gathered}
Z(\tau) = Z(t_\ell)\,\chi_{[t_\ell,t_{\ell+1})}(\tau) + Z(t_m)\,\chi_{[t_m,t_{m+1})}(\tau)\,, \qquad \tau \in [0,T]\,,\\
J(T) = \int_0^T Z(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau) = Z(t_\ell)\big(W(t_{\ell+1}) - W(t_\ell)\big) + Z(t_m)\big(W(t_{m+1}) - W(t_m)\big)\,,
\end{gathered}$$

angegeben.

(ii) *Hilfsresultate.* Es gilt (wobei $h_1 \in H_1$, $h_2, \widetilde{h}_2 \in H_2$, $B \in L(H_1,H_2)$ und $A \in \mathscr{S}_2(H_1,H_2)$, für vollständiges Orthonormalsystem $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von H_2 verwende Parseval'sche Identität, adjungierter Operator, Resultat für Spurklasse-Norm)

$$\begin{gathered}
\|h_2 + \widetilde{h}_2\|_{H_2}^2 = \|h_2\|_{H_2}^2 + \|\widetilde{h}_2\|_{H_2}^2 + 2\big(h_2\big|\widetilde{h}_2\big)_{H_2}\,,\\
\|Bh_1\|_{H_2}^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \big(Bh_1\big|v_k\big)_{H_2}^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \big(h_1\big|B^*v_k\big)_{H_1}^2\,,\\
\|A\|_{\mathscr{S}_2(H_1,H_2)}^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \|Av_k\|_{H_2}^2 = \|A^*\|_{\mathscr{S}_2(H_2,H_1)}^2\,.
\end{gathered}$$

Ein Q-Wiener-Prozeß erfüllt die Relationen (wobei $h_1, \widetilde{h}_1 \in H_1$, Erwartungswert bzw. Kovarianzoperator, verwende Selbstadjungiertheit von $Q^{1/2}$)

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big(\big(W(t_{j+1}) - W(t_j)\big)(\omega) \Big| h_1 \Big)_{H_1} \, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = 0\,,\\
&\int_\Omega \Big(\big(W(t_{j+1}) - W(t_j)\big)(\omega) \Big| h_1 \Big)_{H_1} \Big(\big(W(t_{j+1}) - W(t_j)\big)(\omega) \Big| \widetilde{h}_1 \Big)_{H_1} \Big) \, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\\
&\qquad = (t_{j+1} - t_j) \big(Q\, h_1 \big| \widetilde{h}_1\big)_{H_1}\,,\\
&\int_\Omega \Big(\big(W(t_{j+1}) - W(t_j)\big)(\omega) \Big| h_1 \Big)_{H_1}^2 \, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = (t_{j+1} - t_j) \, \big\| Q^{1/2}\, h_1 \big\|_{H_1}^2\,.
\end{aligned}$$

(iii) *Erwartungswert.* Eine Anwendung der ersten beiden Hilfsresultate ergibt

$$\begin{aligned}
&J(T) = Z(t_\ell) \big(W(t_{\ell+1}) - W(t_\ell)\big) + Z(t_m) \big(W(t_{m+1}) - W(t_m)\big)\,,\\
&\big\| \big(J(T)\big)(\omega) \big\|_{H_2}^2\\
&\quad = \sum_{j\in\{\ell,m\}} \big\| \big(Z(t_j)\big)(\omega) \big(W(t_{j+1}) - W(t_j)\big)(\omega) \big\|_{H_2}^2\\
&\qquad + 2 \Big(\big(Z(t_\ell)\big)(\omega) \big(W(t_{\ell+1}) - W(t_\ell)\big)(\omega) \Big| \big(Z(t_m)\big)(\omega) \big(W(t_{m+1}) - W(t_m)\big)(\omega) \Big)_{H_2}\\
&\quad = \sum_{j\in\{\ell,m\}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \Big(\big(W(t_{j+1}) - W(t_j)\big)(\omega) \Big| \Big(\big(Z(t_j)\big)(\omega)\Big)^* v_k \Big)_{H_1}^2\\
&\qquad + 2 \Big(\big(W(t_{\ell+1}) - W(t_\ell)\big)(\omega) \Big| \Big(\big(Z(t_\ell)\big)(\omega)\Big)^* \big(Z(t_m)\big)(\omega) \big(W(t_{m+1}) - W(t_m)\big)(\omega) \Big)_{H_1}\,.
\end{aligned}$$

Die Bildung des Erwartungswertes führt offensichtlich auf die Relation

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \big\| \big(J(T)\big)(\omega) \big\|_{H_2}^2 \, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) &= \sum_{j\in\{\ell,m\}} \sum_{k\in\mathbb{N}} S_{jk}^{(1)} + 2\, S^{(2)}\,,\\
z_{jk}^{(1)} &= \Big(W(t_{j+1}) - W(t_j) \Big| \big(Z(t_j)\big)^* v_k \Big)_{H_1}^2\,,\\
z^{(2)} &= \Big(W(t_{\ell+1}) - W(t_\ell) \Big| \big(Z(t_\ell)\big)^* Z(t_m) \big(W(t_{m+1}) - W(t_m)\big) \Big)_{H_1}\,,\\
S_{jk}^{(1)} = \int_\Omega z_{jk}^{(1)}(\omega) \, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\,, &\qquad S^{(2)} = \int_\Omega z^{(2)}(\omega) \, \mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\,;
\end{aligned}$$

man beachte, daß die reellwertigen Zufallsvariablen $z_{jk}^{(1)}$ und $z^{(2)}$ die Form

$$\begin{aligned}
z_{jk}^{(1)} &= F\Big(\big(Z(t_j)\big)^* v_k, W(t_{j+1}) - W(t_j) \Big)\,,\\
z^{(2)} &= \widetilde{F}\Big(\big(Z(t_\ell)\big)^* Z(t_m) \big(W(t_{m+1}) - W(t_m)\big), W(t_{\ell+1}) - W(t_\ell) \Big)\,,
\end{aligned}$$

haben.

(iv) *Zusammenhang mit bedingtem Erwartungswert.* Die weiteren Überlegungen beruhen auf dem Resultat, daß der Erwartungswert einer reellwertigen Zufallsvariable auf den Erwartungswert des bedingten Erwartungswertes zurückgeführt werden kann

$$\begin{aligned} E(z) &= E\Big(E\big(z\,\big|\mathscr{A}_0\big)\Big)\,,\\ S^{(1)}_{jk} = E\big(z^{(1)}_{jk}\big) &= E\Big(E\big(z^{(1)}_{jk}\,\big|\mathscr{A}(t_j)\big)\Big)\,,\\ S^{(2)} = E\big(z^{(2)}\big) &= E\Big(E\big(z^{(2)}\,\big|\mathscr{A}(t_\ell)\big)\Big)\,. \end{aligned}$$

zusätzlich werden die folgenden Identitäten gezeigt (für $\omega_1 \in \Omega$)

$$\begin{aligned} E\big(z^{(1)}_{jk}\,\big|\mathscr{A}(t_j)\big) &= \widetilde{S}^{(1)}_{jk}\,,\\ \widetilde{S}^{(1)}_{jk}(\omega_1) &= \int_\Omega \Big(\big(W(t_{j+1}) - W(t_j)\big)(\omega)\Big|\Big(\big(Z(t_j)\big)(\omega_1)\Big)^* v_k\Big)^2_{H_1}\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\,,\\ E\big(z^{(2)}\,\big|\mathscr{A}(t_\ell)\big) &= \widetilde{S}^{(2)}\,,\\ \widetilde{S}^{(2)}(\omega_1) &= \int_\Omega \Big(\big(W(t_{\ell+1}) - W(t_\ell)\big)(\omega)\Big|\Big(\big(Z(t_\ell)\big)^* Z(t_m)\,\big(W(t_{m+1}) - W(t_m)\big)\Big)(\omega_1)\Big)_{H_1}\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\,. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt dies die Relation

$$\begin{aligned} \int_\Omega \big\|\big(J(T)\big)(\omega)\big\|^2_{H_2}\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) &= \sum_{j\in\{\ell,m\}}\sum_{k\in\mathbb{N}} S^{(1)}_{jk} + 2\,S^{(2)}\\ &= \sum_{j\in\{\ell,m\}}\int_\Omega \sum_{k\in\mathbb{N}} \widetilde{S}^{(1)}_{jk}(\omega_1)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega_1) + 2\int_\Omega S^{(2)}(\omega_1)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega_1)\,. \end{aligned}$$

(v) *Bedingte Erwartungswerte.* Man beachte, daß einerseits $(Z(t_j))^*\,v_k$ nach Voraussetzung bezüglich $\mathscr{A}(t_j)$ meßbar ist und andererseits der Zuwachs $W(t_{j+1}) - W(t_j)$ stochastisch unabhängig von $\mathscr{A}(t_j)$ ist; ein an früherer Stelle angegebenes Resultat zum bedingter Erwartungswert bei stochastischer Unabhängigkeit kann deshalb auf die betrachtete Situation angewendet werden (für $\omega_1 \in \Omega$)

$$\begin{gathered} Z_1 = \big(Z(t_j)\big)^*\,v_k\,,\qquad Z_2 = W(t_{j+1}) - W(t_j)\,,\qquad F(z_1,z_2) = \big(z_1\big|z_2\big)^2_{H_1}\,,\\ \Big(E\big(z^{(1)}_{jk}\,\big|\mathscr{A}(t_j)\big)\Big)(\omega_1) = \Big(E\big(F(Z_1,Z_2)\,\big|\mathscr{A}(t_j)\big)\Big)(\omega_1) = \int_\Omega F\big(Z_1(\omega_1), Z_2(\omega)\big)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = \widetilde{S}^{(1)}_{jk}(\omega_1)\,. \end{gathered}$$

Da $\big(Z(t_\ell)\big)^*\,Z(t_m)\,\big(W(t_{m+1}) - W(t_m)\big)$ für $\ell < m$ bezüglich $\mathscr{A}(t_\ell)$ meßbar ist, zeigen ähnliche Überlegungen die Relation

$$\begin{gathered} Z_1 = \big(Z(t_\ell)\big)^*\,Z(t_m)\,\big(W(t_{m+1}) - W(t_m)\big)\,,\qquad Z_2 = W(t_{\ell+1}) - W(t_\ell)\,,\\ \widetilde{F}(z_1,z_2) = \big(z_1\big|z_2\big)_{H_1}\,,\\ \Big(E\big(z^{(2)}\,\big|\mathscr{A}(t_\ell)\big)\Big)(\omega_1) = \Big(E\big(\widetilde{F}(Z_1,Z_2)\,\big|\mathscr{A}(t_\ell)\big)\Big)(\omega_1) = \int_\Omega \widetilde{F}\big(Z_1(\omega_1), Z_2(\omega)\big)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = \widetilde{S}^{(2)}(\omega_1)\,. \end{gathered}$$

(vi) *Bestimmung der Norm.* Es bleibt über, die Norm

$$\int_\Omega \big\|\big(J(T)\big)(\omega)\big\|_{H_2}^2 \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = \sum_{j\in\{\ell,m\}} \int_\Omega \sum_{k\in\mathbb{N}} \widetilde{S}_{jk}^{(1)}(\omega_1)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega_1) + 2\int_\Omega S^{(2)}(\omega_1)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega_1)$$

zu bestimmen. Mit Hilfe der zuvor angegebenen Hilfsresultate ergibt sich

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_{jk}^{(1)}(\omega_1) &= \int_\Omega \Big(\big(W(t_{j+1})-W(t_j)\big)(\omega)\Big|\Big(\big(Z(t_j)\big)(\omega_1)\Big)^* v_k\Big)_{H_1}^2 \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\,,\\
&= (t_{j+1}-t_j)\,\Big\|Q^{1/2}\Big(\big(Z(t_j)\big)(\omega_1)\Big)^* v_k\Big\|_{H_1}^2\,,\\
\sum_{k\in\mathbb{N}} \widetilde{S}_{jk}^{(1)}(\omega_1) &= (t_{j+1}-t_j)\sum_{k\in\mathbb{N}} \Big\|Q^{1/2}\Big(\big(Z(t_j)\big)(\omega_1)\Big)^* v_k\Big\|_{H_1}^2\\
&= (t_{j+1}-t_j)\Big\|Q^{1/2}\Big(\big(Z(t_j)\big)(\omega_1)\Big)^*\Big\|_{\mathscr{S}_2(H_2,H_1)}^2\\
&= (t_{j+1}-t_j)\Big\|\big(Z(t_j)\big)(\omega_1)\,Q^{1/2}\Big\|_{\mathscr{S}_2(H_1,H_2)}^2\,.
\end{aligned}$$

Mittels ähnlicher Argument folgt

$$\begin{aligned}
h_1(\omega_1) &= \Big(\big(Z(t_\ell)\big)^* Z(t_m)\big(W(t_{m+1})-W(t_m)\big)\Big)(\omega_1)\,,\\
\widetilde{S}^{(2)}(\omega_1) &= \int_\Omega \Big(\big(W(t_{\ell+1})-W(t_\ell)\big)(\omega)\Big|h_1(\omega_1)\Big)_{H_1}\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = 0\,.
\end{aligned}$$

Insgesamt zeigt dies die Gleichheit

$$\int_\Omega \big\|\big(J(T)\big)(\omega)\big\|_{H_2}^2 \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = \int_\Omega \sum_{j\in\{\ell,m\}} (t_{j+1}-t_j)\Big\|\big(Z(t_j)\big)(\omega_1)\,Q^{1/2}\Big\|_{\mathscr{S}_2(H_1,H_2)}^2 \,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega_1)\,.$$

Abschließend ist noch zu beachten, daß aus der speziellen Struktur elementarer Prozesse (wobei $w = Q^{1/2} v_k$, zusätzliche Auswertung bei $\omega\in\Omega$)

$$\begin{aligned}
Z(\tau) &= Z(t_\ell)\,\chi_{[t_\ell,t_{\ell+1})}(\tau) + Z(t_m)\,\chi_{[t_m,t_{m+1})}(\tau)\,,\\
\big\|Z(\tau)\,w\big\|_{H_2}^2 &= \chi_{[t_\ell,t_{\ell+1})}(\tau)\,\big\|Z(t_\ell)\,w\big\|_{H_2}^2 + \chi_{[t_m,t_{m+1})}(\tau)\,\big\|Z(t_m)\,w\big\|_{H_2}^2\,,\\
\big\|Z(\tau)\,Q^{1/2}\big\|_{\mathscr{S}_2(H_1,H_2)}^2 &= \chi_{[t_\ell,t_{\ell+1})}(\tau)\,\big\|Z(t_\ell)\,Q^{1/2}\big\|_{\mathscr{S}_2(H_1,H_2)}^2\\
&\quad + \chi_{[t_m,t_{m+1})}(\tau)\,\big\|Z(t_m)\,Q^{1/2}\big\|_{\mathscr{S}_2(H_1,H_2)}^2\,,\\
\int_0^T \big\|Z(\tau)\,Q^{1/2}\big\|_{\mathscr{S}_2(H_1,H_2)}^2\,\mathrm{d}\tau &= \sum_{j\in\{\ell,m\}} (t_{j+1}-t_j)\big\|Z(t_j)\,Q^{1/2}\big\|_{\mathscr{S}_2(H_1,H_2)}^2\,.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich das gewünschte Resultat. ◇

Erwartungswert und Kovarianzoperator. Ähnliche Überlegungen wie zuvor zeigen, daß Erwartungswert und Kovarianzoperator durch (wobei $t \in [0, T]$)

$$E\big(J(t)\big) = \int_\Omega \big(J(t)\big)(\omega)\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega) = 0\,,$$
$$K\big(J(t)\big) = \int_\Omega \int_0^t \big(Z(\tau)\big)(\omega)\,Q\,\big(Z(\tau)\big)^*(\omega)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\mu_\Omega(\omega)\,,$$

gegeben sind.

Kapitel 2

Itô-Integral und Itô-Formel

Inhalt. Die Einführung des Itô-Integrales für allgemeinere stochastische Prozesse erfolgt mittels Limesbildung; bei der Charakterisierung der zulässigen Integranden sind gewisse technische Schwierigkeiten zu meistern. Ein wesentliches Resultat in Hinblick auf stochastische partielle Differentialgleichungen ist die Itô-Formel. Auf eine Darstellung der Resultate wird an dieser Stelle verzichtet, siehe dazu DENK (2014), Seite 25 bis Seite 31.

Teil IV

Stochastische partielle Differentialgleichungen

Inhalt. Im Folgenden werden stochastische Evolutionsgleichungen der Form

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t) = \Big(A\,u(t) + G\big(t,u(t)\big)\Big)\,\mathrm{d}t + B\,\mathrm{d}W(t)\,, & t \in (0,T)\,,\\ u(0) = u_0\,, \end{cases}$$

untersucht; es sei nochmals daran erinnert, daß diese Formulierung als Integralgleichung zu verstehen ist. Unter der grundlegende Annahme, daß der definierende unbeschränkte lineare Operator eine stark-stetige bzw. spezieller eine analytische Semigruppe erzeugt, und geeigneten Voraussetzungen an die zusätzliche Nichtlinearität sowie die stochastische Störung kann man ein Resultat zur Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung in einem abgeschwächten Sinn herleiten; der Nachweis zusätzlicher Regularitätseigenschaften der Lösung ist jedoch im Allgemeinen ein schwieriges Unterfangen.

Additives Rauschen. Da die stochastische Störung von der einfachen Form $B\,\mathrm{d}W(t)$ ist und insbesondere nicht von der gesuchten Lösung abhängt, spricht man von einer stochastischen Evolutionsgleichung mit additivem Rauschen, im Gegensatz zum multiplikativen Rauschen.

Bemerkung. In Hinblick auf die zeitliche Diskretisierung einer stochastischen Differentialgleichung wird im Folgenden ein beschränktes Zeitintervall der Form $[0,T] \subset \mathbb{R}$ mit $T > 0$ betrachtet.

Kapitel 1

Lineare stochastische partielle Differentialgleichungen

Inhalt. Als erster Schritt wird eine lineare stochastischen Evolutionsgleichung der speziellen Form (setze $G = 0$ und $u_0 = 0$)

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t) = A\,u(t)\,\mathrm{d}t + B\,\mathrm{d}W(t)\,, & t \in (0,T)\,, \\ u(0) = 0\,, \end{cases}$$

behandelt; die Erweiterung auf eine stochastische partielle Differentialgleichung mit zusätzlicher orts- und zeitabhängiger Inhomogenität sowie einen allgemeinen Anfangswert

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t) = \big(A\,u(t) + g(t)\big)\,\mathrm{d}t + B\,\mathrm{d}W(t)\,, & t \in (0,T)\,, \\ u(0) = u_0\,, \end{cases}$$

ist dann vergleichsweise einfach.

Überblick. Um eine Verbindung mit DENK (2014) herzustellen, sind die entsprechenden Verweise angegeben.

- Vorhersagbarer stochastischer Prozeß (Definition 3.8)
- Voraussetzungen an lineare stochastische Evolutionsgleichung

  Starke Lösung, Milde Lösung, Schwache Lösung (Definition 4.2)

  Resultat zum stochastischen Faltungsintegral (Satz 4.4)

  Resultat zur Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung (Lemma 4.5, Satz 4.6)

1.1 Voraussetzungen

Vorbemerkung. Grundlegende Voraussetzungen an die auftretenden Operatoren und die stochastische Störung werden im Folgenden angegeben. Zunächst sei an die Definition eines zylindrischen Wiener-Prozesses erinnert; zur Vereinfachung wird zusätzlich $\widetilde{H}_1 = H_1$ angenommen.

Erinnerung (Zylindrischer Wiener-Prozeß, Spezialfall $P = I$). Ein Q_1-Wiener-Prozeß $(W(t))_{t\in[0,T]}$ auf einem Hilbert-Raum H_1 wird im Spezialfall $P = I$ als zylindrischer P-Wiener-Prozeß in $\widetilde{H}_1$ bezeichnet, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Es seien H_1 und $\widetilde{H}_1$ reelle separable Hilbert-Räume.

(ii) Es sei $(\widetilde{e}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von $\widetilde{H}_1$.

(iii) Es sei $J : \widetilde{H}_1 \to H_1$ ein injektiver Hilbert–Schmidt-Operator. Insbesondere definiert dann

$$Q_1 = JJ^* : H_1 \longrightarrow H_1$$

einen injektiven positiv semi-definiten selbstadjungierten Spurklasse-Operator.

Mit unabhängigen reellwertigen Wiener-Prozessen $(\beta_k(t))_{t\in[0,T]}$ ergibt sich die Darstellung

$$W(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \beta_k(t)\, J\widetilde{e}_k : \Omega \longrightarrow H_1\,, \qquad t \in [0,T]\,.$$

Vorhersagbarkeit. Ein stochastischer Prozeß $(Z(t))_{t\in[0,T]}$ mit $Z(t) : \Omega \to H$ heißt vorhersagbar, wenn die zugehörige Abbildung $\Omega \times [0,T] \to H : (\omega,t) \mapsto (Z(t))(\omega)$ bezüglich der von dem Mengensystem

$$\mathscr{M} = \big\{A(0)\times\{0\} : A(0) \in \mathscr{A}(0)\big\} \cup \big\{A(t_1)\times(t_1,t_2] : A(t_1) \in \mathscr{A}(t_1), 0 \le t_1 < t_2 \le T\big\}$$

erzeugten σ-Algebra meßbar ist, d.h. das Urbild jeder Borel-Menge $B \in \mathscr{B}(H)$ liegt in $\sigma(\mathscr{M})$.

Voraussetzungen. Wesentliche Bezeichnungen und Voraussetzungen sind die folgenden.

(i) Es sei $T \in (0,\infty)$.

(ii) Es seien H_1 und H_2 reelle separable Hilbert-Räume.

(iii) Es sei $(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{A}(t))_{t\in[0,T]}, \mu)$ ein normal filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum.

(iv) Es sei $(W(t))_{t\in[0,T]}$ mit $W(t) : \Omega \to H_1$ ein zylindrischer Wiener-Prozeß bzw. Q_1-Wiener-Prozeß bezüglich der Filtrierung $(\mathscr{A}(t))_{t\in[0,T]}$.

(v) Es sei $A : D(A) \subset H_2 \to H_2$ der infinitesimale Erzeuger einer stark-stetigen Semigruppe $(\mathrm{e}^{tA})_{t\in[0,\infty)}$ auf H_2.

(vi) Es sei $B : H_1 \to H_2$ ein beschränkter linearer Operator.

(vii) Es sei $(g(t))_{t\in[0,T]}$ mit $g(t) : \Omega \to H_2$ ein vorhersagbarer stochastischer Prozeß für welchen die Bedingung $g \in L^1((0,T), H_2)$ für fast alle $\omega \in \Omega$ erfüllt sei.

(viii) Der gewählte Anfangswert erfülle die Eigenschaft $u_0 \in H_2$.

Bemerkung. Wie die folgende Überlegung zeigt, sind die Voraussetzungen sinnvoll gewählt

$$\mathrm{d}u(t) = \big(A\,u(t) + g(t)\big)\,\mathrm{d}t + B\,\mathrm{d}W(t)\,, \quad t \in (0,T)\,, \qquad u(0) = u_0\,,$$

$$\int_0^t 1\,\mathrm{d}u(\tau) = \int_0^t \big(A\,u(\tau) + g(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau + B\int_0^t 1\,\mathrm{d}W(\tau)\,, \quad t \in [0,T]\,, \qquad u(0) = u_0\,,$$

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \big(A\,u(\tau) + g(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau + B\,W(t)\,, \quad t \in [0,T]\,, \qquad u(0) = u_0\,,$$

$$\underbrace{\big(u(t)\big)(\omega)}_{\in H_2} = \underbrace{u_0}_{\in H_2} + \int_0^t \Big(\underbrace{A\,\underbrace{\big(u(\tau)\big)(\omega)}_{\in D(A)\subset H_2}}_{\in H_2} + \underbrace{\big(g(\tau)\big)(\omega)}_{\in H_2}\Big)\,\mathrm{d}\tau + \underbrace{B\,\underbrace{\big(W(t)\big)(\omega)}_{\in H_1}}_{\in H_2}\,, \qquad t \in [0,T]\,, \quad \omega \in \Omega\,.$$

1.2 Lösungsbegriffe

Abgeschwächte Lösungsbegriffe. In Hinblick auf die Herleitung von Resultaten zur Existenz und Eindeutigkeit ist es wesentlich, den verwendeten Lösungsbegriff zu präzisieren.

Definition (Starke Lösung, Milde Lösung, Schwache Lösung). Es bezeichne $(u(t))_{t\in[0,T]}$ mit $u(t):\Omega\to H_2$ für $t\in[0,T]$ einen vorhersagbaren stochastischen Prozeß.

(i) Für fast alle Elemente $\omega\in\Omega$ und für fast alle Zeitpunkte $t\in[0,T]$ gelte $(u(t))(\omega)\in D(A)$ sowie $A\,u\in L^1((0,T),H_2)$. Eine starke Lösung erfüllt für alle $t\in[0,T]$ die Relation (für fast alle $\omega\in\Omega$)

$$u(t)=u_0+\int_0^t\big(A\,u(\tau)+g(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau+B\,W(t)\,.$$

(ii) Für fast alle $\omega\in\Omega$ gelte $u\in L^1((0,T),H_2)$. Eine milde Lösung erfüllt für alle $t\in[0,T]$ die Relation (für fast alle $\omega\in\Omega$, Variation-der-Konstanten Formel)

$$u(t)=\mathrm{e}^{tA}\,u_0+\int_0^t\mathrm{e}^{(t-\tau)A}\,g(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\int_0^t\mathrm{e}^{(t-\tau)A}\,B\,\mathrm{d}W(\tau)\,.$$

(iii) Für fast alle $\omega\in\Omega$ gelte $u\in L^1((0,T),H_2)$. Eine schwache Lösung erfüllt für alle $d^*\in D(A^*)\subseteq H_2$ sowie $t\in[0,T]$ die Relation (für fast alle $\omega\in\Omega$, Testen der stochastischen Evolutionsgleichung, Umformulierung mittels adjungiertem Operator)

$$\big(u(t)\big|d^*\big)_{H_2}=\big(u_0\big|d^*\big)_{H_2}+\int_0^t\big(u(\tau)\big|A^*\,d^*\big)_{H_2}\,\mathrm{d}\tau+\int_0^t\big(g(\tau)\big|d^*\big)_{H_2}\,\mathrm{d}\tau+\big(BW(t)\big|d^*\big)_{H_2}\,.$$

1.3 Stochastische Faltung

Vorbemerkung. Die milde Lösung der linearen stochastischen Evolutionsgleichung (setze $g = 0$ und $u_0 = 0$)

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t) = A\,u(t)\,\mathrm{d}t + B\,\mathrm{d}W(t)\,, & t \in (0,T)\,, \\ u(0) = 0\,, \end{cases}$$

ist durch die Relation

$$u(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)A}\,B\,\mathrm{d}W(\tau)\,, \qquad t \in [0,T]\,,$$

gegeben; man spricht von einem stochastischen Faltungsintegral. Das folgende Resultat gilt insbesondere für den zeitabhängigen beschränkten Operator

$$S(t) = \mathrm{e}^{tA}B : H_1 \longmapsto H_2\,, \qquad t \in [0,T]\,.$$

Resultat (Stochastische Faltung). Für $S : [0,T] \to L(H_1, H_2)$ gelte $S \in L^2((0,T), \mathscr{S}_2(H_1,H_2))$. Das stochastische Faltungsintegral

$$Z : \Omega \times [0,T] \longrightarrow H_2 : (\omega, t) \longmapsto \int_0^t S(t-\tau)\,\mathrm{d}\big(W(\tau)\big)(\omega)$$

definiert einen Gauß-Prozeß mit der Eigenschaft $Z \in \mathscr{C}([0,T], L^2(\Omega, H_2))$; es existiert eine vorhersagbare Version. Der Kovarianzoperator ist durch

$$\int_0^t S(\tau)\,Q_1\,\big(S(\tau)\big)^*\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad t \in [0,T]\,,$$

gegeben.

Erklärung. Der Nachweis der Stetigkeit und der Relation für den Kovarianzoperator beruht auf zuvor angegebenen Resultaten zum stochastischen Integral. Siehe DENK (2014). ◇

1.4 Resultat zu Existenz und Eindeutigkeit

Vorbemerkung. Im betrachteten Spezialfall (setze $g = 0$ und $u_0 = 0$)

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t) = A\,u(t)\,\mathrm{d}t + B\,\mathrm{d}W(t)\,, & t \in (0,T)\,, \\ u(0) = 0\,, \end{cases}$$

erfüllt eine schwache Lösung für alle $d^* \in D(A^*) \subseteq H_2$ und für fast alle $\omega \in \Omega$

$$\big(u(t)\big|d^*\big)_{H_2} = \int_0^t \big(u(\tau)\big|A^*d^*\big)_{H_2}\,\mathrm{d}\tau + \big(BW(t)\big|d^*\big)_{H_2}\,, \qquad t \in [0,T]\,.$$

Wegen der offensichtlichen Identität

$$W(t) = \int_0^t I\,\mathrm{d}W(\tau)\,, \qquad t \in [0,T]\,,$$

kann man auch eine Darstellung in Integralform verwenden

$$\big(BW(t)\big|d^*\big)_{H_2} = \int_0^t \big(B(\cdot)\big|d^*\big)_{H_2}\,\mathrm{d}W(\tau)\,;$$

dabei definiert der Integrand einen stochastischen Prozeß mit Werten in $L(H_1,\mathbb{R})$. Mittels des Ansatzes

$$\psi(t) = \varphi(t)\,d^*\,, \qquad \varphi(t) \in \mathscr{C}^1\big([0,T],\mathbb{R}\big)\,, \quad d^* \in D\big(A^*\big)\,,$$

und Anwendung der Itô-Formel auf

$$\big(u(t)\big|\psi(t)\big)_{H_2} = \varphi(t)\,\big(u(t)\big|d^*\big)_{H_2}\,,$$
$$\big(u(t)\big|d^*\big)_{H_2} = \int_0^t \big(u(\tau)\big|A^*d^*\big)_{H_2}\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t \big(B(\cdot)\big|d^*\big)_{H_2}\,\mathrm{d}W(\tau)\,,$$

ergibt sich das folgende Hilfsresultat.

Hilfsresultat (Schwache Lösung). Eine schwache Lösung der linearen stochastischen Evolutionsgleichung

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t) = A\,u(t)\,\mathrm{d}t + B\,\mathrm{d}W(t)\,, & t \in (0,T)\,, \\ u(0) = 0\,, \end{cases}$$

erfüllt für jede Funktion $\psi \in \mathscr{C}^1([0,T],D(A^*))$, für alle $t \in [0,T]$ und für fast alle $\omega \in \Omega$ die Relation

$$\big(u(t)\big|\psi(t)\big)_{H_2} = \int_0^t \big(u(\tau)\big|\psi'(\tau) + A^*\psi(\tau)\big)_{H_2}\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t \big(B\,(\cdot)\big|\psi(\tau)\big)_{H_2}\,\mathrm{d}W(\tau)\,.$$

Erklärung. Siehe Denk (2014). ◇

Resultat (Existenz und Eindeutigkeit). In der obigen Situation und unter der zusätzlichen Voraussetzung $\mathrm{e}^{(\cdot)A}B \in L^2((0,T),\mathscr{S}_2(H_1,H_2))$ existiert eine eindeutige Lösung der linearen stochastischen Evolutionsgleichung

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t) = \big(A\,u(t) + g(t)\big)\,\mathrm{d}t + B\,\mathrm{d}W(t)\,, & t \in (0,T)\,, \\ u(0) = u_0\,; \end{cases}$$

diese ist durch die Darstellung (milde Lösung)

$$u(t) = \mathrm{e}^{tA}\,u_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)A}\,g(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)A}\,B\,\mathrm{d}W(\tau)$$

gegeben.
Erklärung. Zum Nachweis des Resultates werden Aussagen zu der vom adjungierten Operator A^* erzeugten Semigruppe benötigt, vgl. DENK (2014) und PAZY (1983). ⋄

Literatur

Monographien.

GUISEPPE DA PRATO, JERZY ZABCZYK
Stochastic Equations in Infinite Dimensions
Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Volume 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1992

THOMAS DECK
Der Itô-Kalkül – Einführung und Anwendungen
Springer, Berlin, 2006

LAWRENCE EVANS
Partial Differential Equations
Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, Second edition, American Mathematical Society, 2010

LAWRENCE EVANS
An Introduction to Stochastic Differential Equations
American Mathematical Society, 2013

ALESSANDRA LUNARDI
Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems
Birkhäuser, Basel, 1995

AMNON PAZY
Semigroups of Linear Operators and Applications
Second printing, Springer, New York, 1983

DIRK WERNER
Funktionalanalysis
7. Auflage, Springer, Berlin, 2011
Dieses Buch ist in der Universitätsbibliothek Innsbruck auch als E-Book verfügbar.

Frei verfügbare Quellen. Die angegebenen Quellen bieten die Vorteile kompakter Darstellungen und freier Verfügbarkeit, sollten jedoch mit einem kritischen Blick auf inhaltliche Richtigkeit und mögliche Druckfehler verwendet werden.

Martin Brokate
Partielle Differentialgleichungen II
Vorlesungsskriptum, Sommersemester 2003
http://www-m6.ma.tum.de/~brokate/pde_ss03.pdf

Martin Brokate
Analysis III
Vorlesungsskriptum, Wintersemester 2004/05
http://www-m6.ma.tum.de/~brokate/an3_ws04.pdf

Robert Denk
Stochastische partielle Differentialgleichungen
Vorlesungsskriptum, Wintersemester 2013/14
http://cms.uni-konstanz.de/math/denk/home/publikationen-und-skripten/skripten/

Karl Grill
Theorie stochastischer Prozesse
Vorlesungsskriptum, 2012
Veröffentlicht unter der Creative Commons Attribution Sharealike License
http://www.ci.tuwien.ac.at/ grill/tsp.pdf

Flavius Guiaş
Funktionalanalysis II
Vorlesungsskriptum, Sommersemester 2010
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsi/fguias/skript2.pdf

Martin Hairer
An introduction to stochastic PDEs
Lecture notes, Spring 2009
http://www.hairer.org/notes/SPDEs.pdf

Ansgar Jüngel
Eine Einführung in die Halbgruppentheorie
Vorlesungsskriptum, Wintersemester 2001/02
http://www.asc.tuwien.ac.at/~juengel/scripts/semigroups.pdf

Christian Kanzow
Kapitel zu *Lebesgue-Maß, Lebesgue-Integral, Hauptsätze zum Lebesgue-Integral*
Vorlesungsunterlagen, Wintersemester 2011/12
http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~kanzow/analysis3/Kapitel19.pdf
http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~kanzow/analysis3/Kapitel20.pdf
http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~kanzow/analysis3/Kapitel21.pdf

HANS RUDOLF LERCHE
Stochastische Prozesse und Finanzmathematik
Vorlesungsskriptum, Sommersemester 2009
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/Vorlesungen/vvSS2009/VorStochProFin/script/Kap02f.pdf

DETLEF MÜLLER
Fourieranalysis und Distributionentheorie
Vorlesungsskriptum, Wintersemester 2011/12
http://www.math.uni-kiel.de/analysis/mueller/inhalte/SS12/Skriptfourier-distWS1112.pdf

JAN VAN NEERVEN
Stochastic Evolution Equations
Internet Seminar Lecture Notes, 2007/08
http://fa.its.tudelft.nl/~neerven/publications/notes/ISEM.pdf

WALTER OEVEL
Kapitel zu *Fourier-Analysis*
Vorlesungsunterlagen, Wintersemester 2002/03
http://math-www.uni-paderborn.de/~walter/teachingWS02_03/Kapitel1.pdf

JOHANNES SCHROPP
Numerik stochastischer Differentialgleichungen
Vorlesungsskriptum, Wintersemester 2013/14
http://www.math.uni-konstanz.de/~schropp/numsto/skript.pdf

BEATA STRYCHARZ–SZEMBERG
Mathematische Grundlagen III. Stochastik
Vorlesungsskriptum, 2008
https://www.uni-due.de/~bm0061/stochastik2008.skript.pdf

NIKOLAI TARKHANOV
Mathematische Vorlesungen – Mathematik für Physiker
Vorlesungsskriptum, 2002
http://www.math.uni-potsdam.de/prof/ab1_Analysis/ax%20tarkhanov/mfph.pdf

Wikipedia
https://www.wikipedia.org, http://de.wikipedia.org

Teil V

Anhang

Anhang A

Grundlagen der Maßtheorie

Maßtheorie. Das Gebiet der Maßtheorie befaßt sich mit der Abstraktion elementargeometrischer Begriffe wie Streckenlänge, Flächeninhalt und Volumen; inbesondere geht es um die Frage, wie Mengen mit komplexen Strukturen ein Maß zugeordnet werden kann. Die Maßtheorie bildet die Grundlage der Integrationstheorie und der Stochastik.

Maße. In der Maßtheorie treten σ-Algebren als Definitionsbereiche von Maßen auf; σ-Algebren sind insbesondere in der Stochastik von Bedeutung, wo zufällige Ereignisse durch die Elemente einer σ-Algebra modelliert werden. Maße spiegeln die Größen von Mengen wieder und bilden damit die Grundlage der Integrationstheorie; so ordnet das Lebesgue–Borel-Maß Teilmengen des euklidischen Raumes ihren Inhalt zu. Maße treten in der Stochastik auf, um zufälligen Ereignissen, gegeben durch die Elemente einer σ-Algebra, Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen.

Überblick. Im Folgenden wird an grundlegende Begriffe der Maßtheorie erinnert.

- σ-Algebra

  Meßbarer Raum bzw. Meßraum

  Erzeugte σ-Algebra

  Meßbare Funktion

- Borel-σ-Algebra

  Borel-Menge

  Borel-σ-Algebra eines separablen metrischen Raumes

  Borel-σ-Algebra des euklidischen Raumes

- Maß

  Maßraum

- Endliches Maß
  Wahrscheinlichkeitsmaß
  Wahrscheinlichkeitsraum
- Nullmenge, Fast überall, Fast sicher
  Vollständiger Maßraum, Vollständiges Maß
  Vervollständigung eines Maßraumes
- Zählmaß
  Dirac-Maß
  Reelles Gauß-Maß
- Lebesgue–Borel-Maß
  Lebesgue-Maß
  Lebesgue-σ-Algebra, Lebesgue-meßbare Mengen

A.1 Meßbarer Raum, Meßbare Funktion

Vorbemerkung. Eine σ-Algebra ist ein System von Teilmengen einer Grundmenge, welches die Grundmenge enthält und bezüglich der Komplementbildung und abzählbaren Vereinigung von Mengen abgeschlossen ist. Das Paar bestehend aus Grundmenge und σ-Algebra bezeichnet man als meßbaren Raum.

Definition (Meßbarer Raum). Eine σ-Algebra über einer nichtleeren Grundmenge $\Omega \neq \emptyset$ ist eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ mit folgenden Eigenschaften.

(i) *Grundmenge.* Es gilt
$$\Omega \in \mathscr{A}\,.$$

(ii) *Komplement.* Aus $A \in \mathscr{A}$ folgt
$$\Omega \setminus A \in \mathscr{A}\,.$$

(iii) *Abzählbare Vereinigung.* Aus $A_k \in \mathscr{A}$ für $k \in \mathbb{N}$ folgt
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}\,.$$

Das Paar $(\Omega, \mathscr{A})$ heißt meßbarer Raum bzw. Meßraum.

Beispiele.

- $\Omega = \mathbb{R}^d$ und $\mathscr{A} = \mathscr{P}\big(\mathbb{R}^d\big)$.
- $\Omega = \mathbb{R}^d$ und $\mathscr{A} = \big\{\emptyset, A, \mathbb{R}^d \setminus A, \mathbb{R}^d\big\}$ für $A \subset \mathbb{R}^d$.

Folgerungen. Direkte Folgerungen aus der Definition einer σ-Algebra $\mathscr{A}$ über einer Menge $\Omega \neq \emptyset$ sind.

(i) *Leere Menge.* Es gilt
$$\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathscr{A}\,.$$

(ii) *Abzählbarer Durchschnitt.* Aus $A_k \in \mathscr{A}$ für $k \in \mathbb{N}$ folgt mittels der Regel von De Morgan[1]
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_k) \right) \in \mathscr{A}\,.$$

[1] *Regeln von De Morgan.* Für zwei Mengen $A_1, A_2 \subset \Omega$ gelten die Relationen
$$\Omega \setminus (A_1 \cup A_2) = (\Omega \setminus A_1) \cap (\Omega \setminus A_1)\,, \qquad \Omega \setminus (A_1 \cap A_2) = (\Omega \setminus A_1) \cup (\Omega \setminus A_1)\,,$$
sowie die entsprechenden Erweiterungen auf abzählbar viele Mengen.

(iii) *Endliche Vereinigung und endlicher Durchschnitt.* Es sei $K \in \mathbb{N}$, und es gelte $A_k \in \mathscr{A}$ für $k \in \{1, \dots, K\}$; durch Hinzunahme der leeren Menge bzw. der Grundmenge und Anwendung der Eigenschaften abzählbare Vereinigung bzw. abzählbarer Durchschnitt folgt

$$\bigcup_{k=1}^{K} A_k \in \mathscr{A}\,, \qquad \bigcap_{k=1}^{K} A_k \in \mathscr{A}\,.$$

(iv) *Mengendifferenz.* Aus $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ folgt

$$A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap (\Omega \setminus A_2) \in \mathscr{A}\,.$$

Definition (Erzeugte σ-Algebra). Es bezeichne $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ eine System von Teilmengen der Grundmenge $\Omega \neq \emptyset$. Das Mengensystem

$$\sigma(\mathscr{M}) = \bigcap \big\{\mathscr{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra über } \Omega \text{ mit } \mathscr{M} \subseteq \mathscr{A}\big\}$$

ist die kleinste σ-Algebra über Ω, welche $\mathscr{M}$ umfaßt, und wird als die von $\mathscr{M}$ erzeugte σ-Algebra bezeichnet.[2]

Vorbemerkung. Eine Funktion zwischen zwei Mengen mit zugehörigen σ-Algebren heißt meßbar, wenn das Urbild eines Elementes der σ-Algebra über der Bildmenge ein Element der σ-Algebra über der Definitionsmenge ist.

Definition (Meßbare Funktion). Es bezeichnen $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ zwei meßbare Räume. Eine Funktion $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ heißt meßbar, wenn das Urbild eines Elementes von $\mathscr{A}_2$ ein Element von $\mathscr{A}_1$ ist

$$\forall A_2 \in \mathscr{A}_2: \qquad f^{-1}(A_2) \in \mathscr{A}_1\,.$$

[2] *Bemerkung.* Zusätzliche Überlegungen, welche insbesondere zeigen, daß $\sigma(\mathscr{M})$ eine σ-Algebra bildet, sind beispielsweise in BROKATE (2005) angegeben.

A.2 Borel-σ-Algebra, Charakterisierung

Definition (Borel-σ-Algebra, Borel-Menge). In Situationen, wo die betrachtete Grundmenge $\Omega \neq \emptyset$ einen topologischen Raum[3] bildet, bezeichnet man die kleinste σ-Algebra, welche alle offenen Mengen der Grundmenge enthält, als Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(\Omega)$ und ihre Elemente als Borel-Mengen.

Charakterisierung der Borel-σ-Algebra. Im Spezialfall eines separablen metrischen Raumes und insbesondere des euklidischen Raumes ist die Borel-σ-Algebra folgendermaßen charakterisiert.

(i) Falls die Grundmenge $\Omega \neq \emptyset$ einen separablen metrischen Raum[4] (Ω, d) bildet, ist die durch die Metrik erzeugte Topologie durch die offenen Kugeln definiert; da jede offene

[3] *Topologie, Offene Mengen, Topologischer Raum.* Eine Topologie über einer Grundmenge $\Omega \neq \emptyset$ ist ein System von Teilmengen $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ mit den folgenden Eigenschaften.

(i) *Grundmenge und leere Menge.* Es gilt

$$\Omega \in \mathscr{T}, \qquad \emptyset \in \mathscr{T}.$$

(ii) *Beliebige Vereinigung.* Es sei $\mathscr{K}$ eine beliebige Indexmenge. Aus $T_k \in \mathscr{T}$ für $k \in \mathscr{K}$ folgt

$$\bigcup_{k \in \mathscr{K}} T_k \in \mathscr{T}.$$

(iii) *Endlicher Durchschnitt.* Aus $T_k \in \mathscr{T}$ für $k \in \{1, \dots, K\}$ mit $K \in \mathbb{N}$ folgt

$$\bigcap_{k=1}^{K} T_k \in \mathscr{T}.$$

Die Elemente von $\mathscr{T}$ werden als offene Mengen bezeichnet, und das Paar $(\Omega, \mathscr{T})$ heißt topologischer Raum.

Alternative Definition mittels abgeschlossenen Mengen. Das Komplement einer offenen Menge $\Omega \setminus T$ mit $T \in \mathscr{T}$ wird als abgeschlossene Menge bezeichnet. Die Grundmenge und die leere Menge sind abgeschlossen; weiters folgt mittels der Regel von De Morgan, daß die endliche Vereinigung und der beliebige Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen eine abgeschlossene Menge ist.

[4] *Abgeschlossene Hülle.* Für eine Teilmenge $M \subseteq \Omega$ eines topologischen Raumes heißt der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, welche M umfassen, die abgeschlossene Hülle von M

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{M \subseteq N \\ N \subseteq \Omega \text{ abgeschlossen}}} N.$$

Die abgeschlossene Hülle einer Menge ist insbesondere abgeschlossen.

Dichtheit, Separabilität. Eine Teilmenge $M \subseteq \Omega$ eines topologischen Raumes heißt dicht, wenn ihre abgeschlossene Hülle mit der Grundmenge übereinstimmt

$$\overline{M} = \Omega.$$

Ein topologischer Raum heißt separabel, wenn eine abzählbare dichte Teilmenge existiert.

Metrik, Metrischer Raum. Eine Metrik auf einer Menge Ω ist eine symmetrische und positiv-definite Funktion $d : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, welche zudem die Dreiecksungleichung erfüllt. Das Paar (Ω, d) heißt metrischer Raum.

Menge als abzählbare Vereinigung von offenen Kugeln darstellbar ist, ist die Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(\Omega)$ durch die von den offenen Kugeln erzeugte σ-Algebra gegeben.

(ii) Für die Menge der reellen Zahlen $\Omega = \mathbb{R}$ wird die zugehörige Topologie durch die offenen Intervalle mit rationalen Endpunkten

$$(a, b) \subset \mathbb{R}, \qquad a, b \in \mathbb{Q},$$

definiert; die zugehörige Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ umfaßt insbesondere alle offenen und abgeschlossenen Intervalle.

(iii) Auf dem euklidischen Raum $\Omega = \mathbb{R}^d$ betrachtet man kartesische Produkte offener Intervalle mit rationalen Endpunkten

$$\prod_{j=1}^{d} (a_j, b_j) \subset \mathbb{R}, \qquad a_j, b_j \in \mathbb{Q}, \quad j \in \{1, \ldots, d\},$$

um die zugehörige Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ zu erzeugen.

A.3 Maßraum, Wahrscheinlichkeitsraum

Vorbemerkung. Ein Maß ist eine Funktion, die den Elementen einer σ-Algebra nichtnegative Zahlen zuordnet und insbesondere die leere Menge auf Null abbildet. Das Tripel bestehend aus Grundmenge, σ-Algebra und Maß bezeichnet man als Maßraum.

Definition (Maßraum). Es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A})$ einen meßbaren Raum, d.h. $\mathscr{A}$ ist eine σ-Algebra über der Grundmenge $\Omega \neq \emptyset$. Ein Maß auf $\mathscr{A}$ ist eine Funktion

$$\mu : \mathscr{A} \longrightarrow [0, \infty] : A \longmapsto \mu(A)$$

mit folgenden Eigenschaften.

(i) *Maß der leeren Menge.* Es gilt
$$\mu(\emptyset) = 0\,.$$

(ii) *σ-Additivität (Abzählbare Vereinigung).* Für eine Folge von paarweise disjunkten Mengen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $A_k \in \mathscr{A}$ für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)\,.$$

Das Tripel $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ bezeichnet man als Maßraum.

Folgerungen. Direkte Folgerungen aus der Definition eines Maßes $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ sind.

(i) *Endliche Additivität (Endliche Vereinigung).* Für endlich viele paarweise disjunkte Mengen $A_k \in \mathscr{A}$ mit $k \in \{1, \dots, K\}$, wobei $K \in \mathbb{N}$, folgt

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{K} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{K} \mu(A_k)\,.$$

(ii) *Subtraktivität (Mengendifferenz).* Für $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ mit $A_2 \subseteq A_1$ und $\mu(A_2) < \infty$ folgt

$$\mu(A_1 \setminus A_2) = \mu(A_1) - \mu(A_2)\,.$$

Erklärung. In der betrachteten Situation bildet

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup A_2$$

eine disjunkte Vereinigung; damit folgt

$$\mu(A_1) = \mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_2)\,,$$

was die angegebene Relation zeigt. $\diamond$

(iii) *Monotonie (Vereinigung).* Für $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ mit $A_2 \subseteq A_1$ folgt die Abschätzung

$$\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$$

aus der obigen Relation und $\mu(A_1 \setminus A_2) \geq 0$.

(iv) *Identität (Vereinigung und Durchschnitt).* Für $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ gilt

$$\mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)\,.$$

Erklärung. Im trivialen Fall $A_2 \subseteq A_1$ folgt die Behauptung sofort aus $A_1 \cup A_2 = A_1$ und $A_1 \cap A_2 = A_2$; analog für $A_1 \subseteq A_2$. Im allgemeinen Fall zeigt eine Veranschaulichung

$$\begin{aligned}\mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) &= \mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1) + 2\,\mu(A_1 \cap A_2)\\ &= \mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \mu(A_1 \cap A_2)\\ &= \mu(A_1) + \mu(A_2)\end{aligned}$$

und damit die angegebene Relation. ◇

(v) *Subadditivität (Abzählbare Vereinigung).* Für eine Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $A_k \in \mathscr{A}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)\,.$$

Erklärung. Wegen $\mu(A_1 \cap A_2) \geq 0$ impliziert die obige Relation

$$\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2)\,;$$

daraus folgt die angegebene Abschätzung durch wiederholte Anwendung. ◇

Definition (Wahrscheinlichkeitsraum). Es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ einen Maßraum. Falls

$$\mu(\Omega) < \infty$$

ist, heißt das Maß endlich. Gilt insbesondere

$$\mu(\Omega) = 1\,,$$

so heißt das Maß ein Wahrscheinlichkeitsmaß und das Tripel $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

A.4 Nullmenge, Vollständiger Maßraum

Definition (Nullmenge). Es sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Falls für ein Element $A_0 \in \mathscr{A}$ das Maß den Wert Null annimmt

$$\mu(A_0) = 0\,,$$

bezeichnet man A_0 als Nullmenge. Man sagt, daß eine Eigenschaft fast überall in Ω gilt, wenn eine Nullmenge $A_0 \in \mathscr{A}$ existiert, sodaß die Eigenschaft für alle Elemente $\omega \in \Omega \setminus A_0$ gültig ist. Im Zusammenhang mit einem Wahrscheinlichkeitsraum spricht man von einer fast sicheren Eigenschaft.

Definition (Vollständiger Maßraum). Ein Maßraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ bzw. das Maß μ heißt vollständig, wenn alle Teilmengen von Nullmengen in der σ-Algebra enthalten sind.

Vervollständigung. Der Übergang von einem Maßraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ auf einen mittels symmetrischer Mengendifferenz mit Nullmengen definierten Maßraum $(\Omega, \mathscr{B}, \nu)$ wird als Vervollständigung bezeichnet

$$\mathscr{B} = \left\{ A \,\Delta\, A_0 = (A \setminus A_0) \cup (A_0 \setminus A) : A \in \mathscr{A} \;\text{ und }\; A_0 \in \mathscr{A} \;\text{ mit }\; \mu(A_0) = 0 \right\},$$
$$\nu : \mathscr{B} \longrightarrow [0, \infty] : A \,\Delta\, A_0 \longmapsto \nu(A \,\Delta\, A_0) = \mu(A)\,;$$

insbesondere gilt $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, $\nu\big|_{\mathscr{A}} = \mu$ und $(\Omega, \mathscr{B}, \nu)$ ist vollständig.

A.5 Zählmaß, Dirac-Maß, Gauß-Maß

Zählmaß. Es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A})$ einen meßbaren Raum. Das Zählmaß ordnet jeder endlichen Menge ihre Mächtigkeit und jeder unendlichen Menge den Wert Unendlich zu

$$\mu : \mathscr{A} \longrightarrow [0,\infty] : A \longmapsto \mu(A) = \begin{cases} |A|, & A \text{ endliche Menge}, \\ \infty, & A \text{ unendliche Menge}. \end{cases}$$

Dirac-Maß. Es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A})$ einen meßbaren Raum. Für ein Element $x \in \Omega$ ist das Dirac-Maß an der Stelle x durch

$$\delta_x : \mathscr{A} \longrightarrow [0,\infty] : A \longmapsto \delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

definiert und bildet ein Wahrscheinlichkeitsmaß; inbesondere gilt $\delta_x(\emptyset) = 0$ sowie $\delta_x(\Omega) = 1$.

Gauß-Maß. Es sei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, und es gelte $\beta \geq 0$. Ein auf der Borel-σ-Algebra der reellen Zahlen definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß der Form

$$\mu = N\big(\alpha, \beta^2\big) : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\beta} \displaystyle\int_A \mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\alpha)^2}{2\beta^2}}\,\mathrm{d}\xi, & \beta > 0, \\ \delta_\alpha(A), & \beta = 0, \end{cases}$$

heißt reelles Gauß-Maß oder eindimensionale Normalverteilung mit Erwartungswert α und Varianz β^2 bzw. Standardabweichung β; wie zuvor ist das Dirac-Maß durch

$$\delta_\alpha(A) = \begin{cases} 1, & \alpha \in A, \\ 0, & \alpha \notin A, \end{cases}$$

gegeben.

A.6 Lebesgue–Borel-Maß, Lebesgue-Maß

Lebesgue–Borel-Maß. Für die Borel-σ-Algebra des euklidischen Raumes $\Omega = \mathbb{R}^d$, welche durch kartesische Produkte von Intervallen mit rationalen Endpunkten gegeben ist, ist das Lebesgue–Borel-Maß durch die Vorgabe der Volumina

$$\lambda\Big(\prod_{j=1}^{d}\,[a_j, b_j]\Big) = \prod_{j=1}^{d}(b_j - a_j)$$

eindeutig bestimmt.

Lebesgue-Maß. Durch Vervollständigung des Lebesgue–Borel-Maßes ergibt sich das Lebesgue-Maß und die σ-Algebra der Lebesgue-meßbaren Mengen.

Anhang B

Grundlagen der Integrationstheorie

Quellen. Für eine ausführliche Darstellung grundlegender Begriffe und Resultate der Integrationstheorie, insbesondere zum Lebesgue-Integral, sei auf KANZOW (2012) verwiesen.

Anhang C

Grundlegende Begriffe und Resultate

Stochastik. Das Gebiet der Stochastik befaßt sich mit der Beschreibung und Untersuchung zufälliger Geschehnisse; dies beinhaltet insbesondere die Angabe von mathematischen Modellen für vom Zufall beeinflusste Vorgänge. Grundlegende Begriffe des Teilgebietes Wahrscheinlichkeitstheorie sind jene des zufälligen Ereignisses, der Zufallsvariable und des stochastischen Prozesses. Das Teilgebiet Statistik untersucht Zusammenhänge mit empirischen Daten; im Speziellen geht es um die Angabe von mathematischen Methoden zur Gewinnung, Darstellung und Analyse von Daten und um die Verwendung der Daten für Schlußfolgerungen, Entscheidungen und Prognosen.

Kombinatorik. Das der Stochastik naheliegende Gebiet der Kombinatorik untersucht die Anzahl an Möglichkeiten, Objekte anzuordnen; dabei ist es zweckmäßig, die betrachteten Objekte durch Zahlen und mögliche Anordnungen der Objekte durch Tupel von Zahlen zu repräsentieren. Resultate der Kombinatorik, deren Herleitungen meist auf dem Induktionsprinzip beruhen, sind bei der Untersuchung von Zufallsexperimenten mit endlich vielen Ausgängen wesentlich;[1] die Wahrscheinlichkeiten, die den möglichen Ausgängen eines Zufallsex-

[1]Zur Illustration eines Zufallsexperimentes mit endlich vielen Ausgängen wird der Wurf eines Würfels betrachtet.

(i) *Einmaliger Wurf.* Bei einem einmaligen Wurf wird den möglichen Ausgängen, d.h. den Zahlen $1,\dots,6$ jeweils dieselbe Wahrscheinlichkeit zugeordnet (Variation ohne Wiederholung mit $n = 6$ und $m = 1$ ergibt $n = 6$ Möglichkeiten)

$$P(1) = \tfrac{1}{6}\,, \quad P(2) = \tfrac{1}{6}\,, \quad P(3) = \tfrac{1}{6}\,, \quad P(4) = \tfrac{1}{6}\,, \quad P(5) = \tfrac{1}{6}\,, \quad P(6) = \tfrac{1}{6}\,.$$

(ii) *Zweifacher Wurf.* Wird ein Würfel zweimal geworfen, ist die naheliegende Zuordnung (Betrachtung von Paaren, Variation mit Wiederholung mit $n = 6$ und $m = 2$ ergibt $n^m = 36$ Möglichkeiten)

$$P\big((j,k)\big) = \tfrac{1}{36}\,, \quad j,k \in \{1,\dots,6\}\,.$$

(iii) *Modifikation.* Identifiziert man die Zahlen $2,\dots,6$, was durch einen Würfel, dessen Seiten genau einmal mit der Farbe Rot und ansonsten mit der Farbe Blau belegt ist, anschaulich gemacht werden kann, ergibt perimentes zugeordnet werden, stimmen üblicherweise mit den relativen Häufigkeiten von den möglichen Anordnungen überein. Ein Überblick über verschiedene gebräuchliche Anordnungen von Tupeln ist in Tabelle C.1 angegeben.

Permutationen ohne Wiederholung Sämtliche Umordnungen des n-Tupels $(1,\dots,n)$ bzw. Angabe aller n-Tupel der Form $(k_1,\dots,k_n)$ mit $k_i \in \{1,\dots,n\}$ und $k_i \neq k_j$ für $i,j \in \{1,\dots,n\}$: $n!$ Möglichkeiten
Permutationen mit Wiederholung Sämtliche Umordnungen des n-Tupels $\big(\underbrace{1,\dots,1}_{m_1 \text{ mal}},\dots,\underbrace{d,\dots,d}_{m_d \text{ mal}},d+1,\dots,n+d-m_1-\dots-m_d\big)$: $\frac{n!}{m_1!\cdots m_d!}$! Möglichkeiten
Variationen ohne Wiederholung Angabe aller m-Tupel der Form $(k_1,\dots,k_m)$ mit $k_i \in \{1,\dots,n\}$ und $k_i \neq k_j$ für $i,j \in \{1,\dots,m\}$: $\frac{n!}{(n-m)!}$ Möglichkeiten
Variationen mit Wiederholung Angabe aller m-Tupel der Form $(k_1,\dots,k_m)$ mit $k_i \in \{1,\dots,n\}$ für $i \in \{1,\dots,m\}$: n^m Möglichkeiten
Kombinationen ohne Wiederholung Angabe aller m-Tupel der Form $(k_1,\dots,k_m)$ mit $k_i \in \{1,\dots,n\}$ und $k_i < k_j$ für $i,j \in \{1,\dots,m\}$: $\binom{n}{m}$ Möglichkeiten
Kombinationen mit Wiederholung Angabe aller m-Tupel der Form $(k_1,\dots,k_m)$ mit $k_i \in \{1,\dots,n\}$ und $k_i \leq k_j$ für $i,j \in \{1,\dots,m\}$: $\binom{n+m-1}{m}$ Möglichkeiten

Tabelle C.1: Mögliche Anordnungen von Tupeln

Überblick. Im Folgenden wird an grundlegende Begriffe wie jener der reellwertigen Zufallsvariable und des reellwertigen stochastischen Prozesses erinnert.

- Zufallsexperiment

  Zufälliges Ereignis, Wahrscheinlichkeit, Realisierung

  Ereignisraum, Ereignis, Elementarereignis

  Laplace-Experiment

---

sich bei Abzählen der möglichen Ausgänge die Zuordnung

$$\text{Rot} \leftrightarrow 1\,, \qquad \text{Blau} \leftrightarrow 2,3,4,5,6\,,$$

$$\text{Einmaliger Wurf:} \qquad P(1) = \tfrac{1}{6}\,, \quad P(2) = \tfrac{5}{6}\,,$$

$$\text{Zweimaliger Wurf:} \qquad P\big((1,1)\big) = \tfrac{1}{36}\,, \quad P\big((j,1)\big) = \tfrac{5}{36} = P\big((1,j)\big)\,, \quad P\big((j,k)\big) = \tfrac{25}{36}\,, \quad j,k \in \{2,\dots,6\}\,.$$

- Zufallsvariable
  Induziertes Maß, Induzierte Verteilung
  Reellwertige Zufallsvariable, Reelle Zufallsvariable
  Mehrdimensionale Zufallsvariable
  Komplexwertige Zufallsvariable, Komplexe Zufallsvariable
  Diskrete Zufallsvariable
  Konstante Zufallsvariable
- Bedingte Wahrscheinlichkeit
  Unabhängigkeit von Ereignissen
  Unabhängigkeit von Zufallsvariablen
  Unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen
- Erwartungswert
  Varianz, Standardabweichung
  Kovarianz, Korrelation
- Wahrscheinlichkeit des komplementären Ereignisses
  Resultat (Erwartungswert)
  Resultat (Varianz, Kovarianz)
- Stochastischer Prozeß, Pfad
  Zeitlich diskreter Prozeß, Zeitlich kontinuierlicher Prozeß
  Filtrierung, Vollständige Filtrierung, Normale Filtrierung
  Adaptierter Prozeß
  Martingal, Submartingal, Supermartingal

C.1 Zufälliges Ereignis, Wahrscheinlichkeit

Zufälliges Ereignis, Wahrscheinlichkeit, Realisierung. Mit dem Begriff des zufälligen Ereignisses beschreibt man Vorgänge, welche mehrere, endlich viele oder auch unendlich viele, Ausgänge zulassen; ob ein möglicher Ausgang tatsächlich eintritt oder nicht, wird als nicht bekannt angenommen.[2] Vorgänge dieser Art werden als Zufallsexperimente bezeichnet; dabei setzt man zusätzlich voraus, daß die betrachteten Vorgänge unter denselben Bedingungen beliebig oft wiederholt werden können. Einem möglichen Ausgang eines Zufallsexperimentes wird eine gewisse Wahrscheinlichkeit, d.h. eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, zugeordet; diese Wahrscheinlichkeit wird meist mit der relativen Häufigkeit bei einer großen Anzahl von Realisierungen, d.h. tatsächlichen Durchführungen des Experimentes, in Zusammenhang gesetzt.[3] Im Rahmen der Stochastik befaßt man sich insbesondere mit der Frage, inwieweit man mit Hilfe von einzelnen Realisierungen (Stichproben) Aussagen über die möglichen Ausgänge eines Zufallsexperimentes treffen kann.

Ereignisraum, Ereignis. Zur mathematischen Beschreibung eines Zufallsexperimentes führt man den Begriff des Ereignisraumes Ω als Menge aller möglichen Ausgänge des betrachteten Experimentes ein. Teilmengen $A \subseteq \Omega$ werden als Ereignisse bezeichnet; eine einelementige Teilmenge bzw. ein Element $\omega \in \Omega$ nennt man ein Elementarereignis.[4] Das sichere Ereignis Ω tritt in jedem Fall ein; das unmögliche Ereignis $\emptyset$ tritt mit Sicherheit nicht ein.

Laplace-Experiment. Den Spezialfall eines Zufallsexperimentes mit endlich vielen Ausgängen, welche alle gleich wahrscheinlich sind, bezeichnet man als Laplace-Experiment

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}, \qquad P(\omega_k) = \tfrac{1}{K}, \quad k \in \{1, \dots, K\};$$

als Wahrscheinlichkeit wird einem Ereignis $A \subseteq \Omega$ dessen Mächtigkeit $|A|$ relativ zur Anzahl der Elemente des Ereignisraumes zugeordnet

$$A \subseteq \Omega: \qquad P(A) = \tfrac{|A|}{K}.$$

Zur Bestimmung der Mächtigkeit eines Ereignisses sind Resultate der Kombinatorik von Nutzen.

[2] *Bemerkung.* Komplexe Vorgänge, welche von verschiedenen, meist nicht oder nur mit großem Aufwand bestimmbaren Einflußgrößen abhängen, werden oft mittels zufälligen Ereignissen modelliert, vgl. Lehrveranstaltung *Mathematische Modellierung mit nichtlinearen partiellen Differentiagleichungen* (Chemische Reaktionen).

[3] *Gesetz der großen Zahlen.* Das Gesetz der großen Zahlen ist eine Aussage über die Konvergenz des arithmetischen Mittels von Zufallsvariablen im Sinne der starke Konvergenz (fast sichere Konvergenz) oder der schwachen Konvergenz (stochastische Konvergenz). Im Wesentlichen besagt es, daß sich die Differenz zwischen Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit stabilisiert (abgesehen von möglichen Ausreißern, d.h. in einem abgeschwächten Sinn, gegen Null konvergiert), wenn das betrachtete Zufallsexperiment unter denselben Voraussetzungen wiederholt wird.

[4] *Bemerkung.* Zur Vereinfachung der Notation wird ein Element $\omega \in \Omega$ mit der einelementigen Menge $\{\omega\} \subset \Omega$ identifiziert.

Illustrationen. Übliche Veranschaulichungen für Zufallsexperimente mit endlich vielen Ausgängen sind der Wurf von Münzen oder Würfeln und das Ziehen von durch verschiedene Farben gekennzeichnete Kugeln. Die Betrachtung eines Laplace-Experimentes wie beispielsweise dem einmaligen Wurf einer Münze oder eines Würfels führt auf $\Omega = \{1, \dots, K\}$; die Elementarereignisse sind durch $1, \dots, K$ gegeben. Für das Zufallsexperiment steht ein Wurf mit unbekanntem Ausgang; dabei wird vorausgesetzt, daß der Wurf unter denselben Bedingungen beliebig oft durchgeführt werden kann und keine Veränderungen, welche das Ergebnis des Wurfes beeinflussen könnten, auftreten. Eine Realisierung (Stichprobe) des Zufallsexperimentes ist ein tatsächlich durchgeführter Wurf mit bekanntem Ausgang.

C.2 Zufallsvariable, Induzierte Verteilung

Vorbemerkung. Eine Zufallsvariable ordnet den Ergebnissen eines Zufallsexperimentes Werte zu; genauer, eine Zufallsvariable ist eine meßbare Funktion von einem Wahrscheinlichkeitsraum in einen meßbaren Raum. Es sei darauf hingewiesen, daß sprachlich meist nicht zwischen einer Zufallsvariable und dem induzierten Maß bzw. der induzierten Verteilung unterschieden wird. Beispielsweise bezeichnet man eine reellwertige Zufallsvariable, deren induziertes Maß normalverteilt ist, als normalverteilte Zufallsvariable; es ist auch zu beachten, daß für ein reelles Gauß-Maß die Bezeichnung Normalverteilung gebräuchlich ist.

Definition (Zufallsvariable, Induziertes Maß). Es sei $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum; insbesondere bezeichne

$$\mu : \mathscr{A}_1 \longrightarrow [0,1] : A_1 \longmapsto \mu(A_1)$$

das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß. Weiters sei $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ ein meßbarer Raum. Eine Zufallsvariable ist eine meßbare Funktion

$$Z : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2 .$$

Das durch Z auf Ω_2 induzierte Maß bzw. die induzierte Verteilung ist durch ($Z^{-1}(A_2)$ bezeichnet Urbildmenge)

$$\mu_Z : \mathscr{A}_2 \longrightarrow [0,1] : A_2 \longmapsto \mu_Z(A_2) = \mu\big(Z^{-1}(A_2)\big)$$

definiert. Beachte, daß dies der Zuordnung $A_2 \in \mathscr{A}_2 \mapsto A_1 = Z^{-1}(A_2) \in \mathscr{A}_1 \mapsto \mu(A_1)$ entspricht; wegen $\mu_Z(\Omega_2) = \mu(\Omega_1) = 1$ ist das induzierte Maß ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Vorbemerkung. Im Spezialfall einer Zufallsvariable, deren Bildbereich die reellen Zahlen versehen mit der Borel-σ-Algebra sind, spricht man von einer reellwertigen Zufallsvariable. Die Bedingungen lassen sich in diesem Fall folgendermaßen vereinfachen.

Definition (Reellwertige Zufallsvariable). Der euklidische Raum $\mathbb{R}^d$ sei mit der Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ versehen.

(i) *Reellwertige Zufallsvariable.* Eine reellwertige bzw. reelle Zufallsvariable ist eine Funktion $Z : \Omega \to \mathbb{R}$, welche jedem Element des Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ eine reelle Zahl zuordnet und der Meßbarkeitsbedingung

$$\forall\, r \in \mathbb{R} : \qquad \big\{\omega \in \Omega : Z(\omega) \leq r\big\} \in \mathscr{A}$$

genügt.

(ii) *Mehrdimensionale Zufallsvariable.* Eine Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}^d$ wird als d-dimensionale Zufallsvariable bezeichnet.

(iii) *Komplexwertige Zufallsvariable.* Für eine komplexwertige bzw. komplexe Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{C}$ sind die Bedingungen, daß Realteil $\Re Z$ und Imaginärteil $\Im Z$ reellwertige Zufallsvariablen bilden, zu erfüllen.

Definition (Diskrete Zufallsvariable).

(i) *Diskrete Zufallsvariable.* Eine Zufallsvariable $Z : \Omega_1 \to \Omega_2$ heißt diskret, wenn sie höchstens abzählbar viele verschiedene Werte annimmt.

(ii) *Konstante Zufallsvariable.* Eine Zufallsvariable $Z : \Omega_1 \to \Omega_2$ heißt konstant, wenn sie einen einzigen Wert annimmt

$$\exists\, \omega_2 \in \Omega_2 \quad \forall \omega_1 \in \Omega_1 : \qquad Z(\omega_1) = \omega_2\,.$$

C.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit

Vorbemerkung. Zwei zufällige Ereignisse heißen stochastisch unabhängig, wenn sich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das eine Ereignis eintritt, nicht dadurch ändert, daß das andere Ereignis eintritt oder nicht eintritt.

Definition (Unabhängigkeit).

(i) *Bedingte Wahrscheinlichkeit.* Es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum. Für zwei Ereignisse $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ definiert die Relation

$$\mu(A_1|A_2)\,\mu(A_2) = \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_2|A_1)\,\mu(A_1)$$

die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mu(A_1|A_2)$ und $\mu(A_2|A_1)$.

(ii) *Stochastische Unabhängigkeit.* Wie zuvor bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum. Zwei Elemente $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ heißen unabhängig, wenn die Identität

$$\mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1)\,\mu(A_2)$$

gilt. Unter der Voraussetzung $\mu(A_2) > 0$ bzw. $0 < \mu(A_2) < 1$ sind dazu die folgenden Bedingungen äquivalent

$$\mu(A_1|A_2) = \mu(A_1)\,, \qquad \mu(A_1|A_2) = \mu(A_1|\Omega \setminus A_2)\,;$$

einerseits gilt nämlich (verwende Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit)

$$\mu(A_1|A_2) = \frac{\mu(A_1 \cap A_2)}{\mu(A_2)} = \frac{\mu(A_1)\,\mu(A_2)}{\mu(A_2)} = \mu(A_1)\,,$$

und andererseits erhält man (ersetze A_2 durch $\Omega \setminus A_2$ und verwende $\mu(\Omega \setminus A_2) = 1 - \mu(A_2)$, siehe unten)

$$\mu(A_1|\Omega \setminus A_2) = \frac{\mu\big(A_1 \cap (\Omega \setminus A_2)\big)}{\mu(\Omega \setminus A_2)} = \frac{\mu(A_1)\,\mu(\Omega \setminus A_2)}{\mu(\Omega \setminus A_2)} = \frac{\mu(A_1)\,\big(1 - \mu(A_2)\big)}{1 - \mu(A_2)} = \mu(A_1)\,.$$

Definition (Unabhängige Zufallsvariablen).

(i) Es seien $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mu_1)$ sowie $(\Omega_2, \mathscr{A}_2, \mu_2)$ Wahrscheinlichkeitsräume und $(\Omega, \mathscr{A})$ ein meßbarer Raum. Zwei Zufallsvariablen $Z_1 : \Omega_1 \to \Omega$ und $Z_2 : \Omega_2 \to \Omega$ heißen identisch verteilt, wenn ihre Verteilungen gleich sind

$$\forall\, A \in \mathscr{A}: \qquad \mu_{Z_1}(A) = \mu_1\big(Z_1^{-1}(A)\big) = \mu_2\big(Z_2^{-1}(A)\big) = \mu_{Z_2}(A)\,.$$

(ii) Es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum. Zwei reellwertige Zufallsvariablen $Z_1, Z_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ heißen unabhängig, wenn die Urbilder von beliebigen Borel-Mengen unabhängig sind

$$\forall A_1, A_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) : \qquad \mu\big(Z_1^{-1}(A_1) \cap Z_2^{-1}(A_1)\big) = \mu\big(Z_1^{-1}(A_1)\big)\,\mu\big(Z_2^{-1}(A_1)\big)\,.$$

(iii) Sind zwei Zufallsvariablen unabhängig und identisch verteilt, verwendet man häufig die Abkürzung i.i.d.[5]

[5]Abkürzung für die englische Bezeichnung *independent and identically distributed random variables.*

C.4 Erwartungswert, Varianz, Kovarianz

Definition (Erwartungswert, Varianz). Es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum und $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Zufallsvariable.

(i) *Erwartungswert.* Für eine diskrete reellwertige Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ ist der Erwartungswert durch (mit Bild $z = Z(\omega) \in \mathbb{R}$ für $\omega \in \Omega$ und zugehöriger Urbildmenge $\omega \in Z^{-1}(z)$, Einschränkung auf höchstens abzählbar viele angenommenen Werte $(z_k)_{k \in \mathscr{K}}$ möglich)

$$E(Z) = \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega)\, \mu(\omega) = \sum_{z \in \mathbb{R}} z\, \mu\big(Z^{-1}(z)\big) = \sum_{k \in \mathscr{K}} z_k\, \mu\big(Z^{-1}(z_k)\big)$$

erklärt, sofern die Reihe konvergiert; beachte, daß $\mu \circ Z^{-1}$ die von μ auf $\mathbb{R}$ induzierte Verteilung ist. Falls die Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ bzw. die zugehörige Verteilung

$$\mu_Z : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,1] : [a,b] \mapsto \mu\big(Z^{-1}([a,b])\big)$$

eine Dichtefunktion $\varrho : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ besitzt

$$\mu\big(\{\omega \in \Omega : Z(\omega) \in [a,b]\}\big) = \mu\big(Z^{-1}([a,b])\big) = \int_a^b \varrho(z)\, \mathrm{d}z\,,$$

ist im Fall von Riemann-Integrierbarkeit im uneigentlichen Sinn der Erwartungswert durch[6]

$$E(Z) = \int_\Omega Z(\omega)\, \mathrm{d}\mu(\omega) = \int_{\mathbb{R}} z\, \mathrm{d}\mu\big(Z^{-1}(z)\big) = \int_{\mathbb{R}} z\, \varrho(z)\, \mathrm{d}z\,,$$

gegeben, sofern das Integral wohldefiniert ist.

(ii) *Varianz, Standardabweichung.* Varianz und Standardabweichung der Zufallsvariablen sind durch

$$V(Z) = E\Big(\big(Z - E(Z)\big)^2\Big)\,, \qquad S(Z) = \sqrt{V(Z)}\,,$$

definiert; beachte, daß die Varianz nichtnegativ ist und folglich die Standardabweichung eine nichtnegative reelle Zahl ist

$$V(Z) \geq 0\,, \qquad S(Z) \in \mathbb{R}\,, \quad S(Z) \geq 0\,.$$

---

[6] *Bemerkung.* Man beachte, daß aus der Existenz des Erwartungswertes $E(Z)$ im Allgemeinen nicht auf die Existenz von $E(|Z|)$ geschlossen werden kann; bei Existenz einer Dichtefunktion gilt

$$E(|Z|) = \int_\Omega \big|Z(\omega)\big|\, \mathrm{d}\mu(\omega) = \int_{\mathbb{R}} |z|\, \mathrm{d}\mu\big(Z^{-1}(z)\big) = \int_{\mathbb{R}} |z|\, \varrho(z)\, \mathrm{d}z\,.$$

Definition (Kovarianz). Es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum, und es seien $Z_1, Z_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ reellwertige Zufallsvariablen.

(i) *Kovarianz.* Die Kovarianz von Z_1 und Z_2 ist durch

$$K(Z_1, Z_2) = E\Big(\big(Z_1 - E(Z_1)\big)\big(Z_2 - E(Z_2)\big)\Big)$$

gegeben, vorausgesetzt die Erwartungswerte $E(Z_1), E(Z_2), E(Z_1 Z_2)$ sind wohldefiniert; offensichtlich gilt $K(Z, Z) = V(Z)$ und $K(Z_1, Z_2) = K(Z_2, Z_1)$.

(ii) *Korrelation.* Die Korrelation von Z_1 und Z_2 ist durch

$$\frac{K(Z_1, Z_2)}{S(Z_1)\, S(Z_2)}$$

definiert.

C.5 Resultate (Erwartungswert, Varianz)

Wahrscheinlichkeit des komplementären Ereignisses. Es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum. Für jedes Element $A \in \mathscr{A}$ ergibt sich aus der disjunkten Vereinigung $\Omega = A \cup (\Omega \setminus A)$ die Identität

$$1 = \mu(\Omega) = \mu(A) + \mu(\Omega \setminus A);$$

für die Wahrscheinlichkeit des komplementären Ereignisses erhält man somit die Relation

$$\mu(\Omega \setminus A) = 1 - \mu(A).$$

Resultat (Erwartungswert). Es seien $Z_1, Z_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei reellwertige Zufallsvariablen.

(i) Als direkte Folgerungen aus der Definition ergibt sich die Linearität des Erwartungswertes (wobei $c \in \mathbb{R}$)

$$E(Z_1 + Z_2) = E(Z_1) + E(Z_2), \qquad E(cZ_1) = cE(Z_1),$$

sowie die Relation (mit konstanter Funktion $1 : \Omega \to \mathbb{R} : \omega \to 1$)

$$E(1) = 1.$$

(ii) Falls die Zufallsvariablen $Z_1, Z_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängig sind, gilt die Identität

$$E(Z_1 Z_2) = E(Z_1)\, E(Z_2);$$

stochastische Unabhängigkeit kann auch durch diese Bedingung an die Erwartungswerte erklärt werden.
Erklärung. Im Fall diskreter Zufallsvariablen folgt die Relation mittels (Bezeichnung $z_k = Z_k(\omega) \in \mathbb{R}$ für $k = 1, 2$, Übergang auf Urbildmengen $\omega \in Z_k^{-1}(z_k)$ und Betrachtung des Durchschnittes $\omega \in Z_1^{-1}(z_1) \wedge \omega \in Z_2^{-1}(z_2)$, Unabhängigkeit impliziert $\mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1)\, \mu(A_2)$ für $A_1 = Z_1^{-1}(z_1)$ und $A_2 = Z_2^{-1}(z_2)$)

$$\begin{aligned} E(Z_1 Z_2) &= \sum_{\omega \in \Omega} Z_1(\omega)\, Z_2(\omega)\, \mu(\omega) \\ &= \sum_{z_1, z_2 \in \mathbb{R}} z_1 z_2\, \mu\big(Z_1^{-1}(z_1) \cap Z_2^{-1}(z_2)\big) \\ &= \sum_{z_1, z_2 \in \mathbb{R}} z_1 z_2\, \mu\big(Z_1^{-1}(z_1)\big)\, \mu\big(Z_2^{-1}(z_2)\big) \\ &= \sum_{z_1 \in \mathbb{R}} z_1\, \mu\big(Z_1^{-1}(z_1)\big) \sum_{z_2 \in \mathbb{R}} z_2\, \mu\big(Z_2^{-1}(z_2)\big) \\ &= E(Z_1)\, E(Z_2); \end{aligned}$$

ähnliche Überlegungen gelten für den kontinuierlichen Fall. ◇

Resultat (Varianz, Kovarianz). Es seien $Z_1, Z_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei reellwertige Zufallsvariablen.

(i) Eine elementare Rechnung zeigt die Relation

$$V(Z) = E\Big(\big(Z - E(Z)\big)^2\Big) = E\Big(Z^2 - 2\,E(Z)\,Z + \big(E(Z)\big)^2\Big) = E\big(Z^2\big) - \big(E(Z)\big)^2 .$$

(ii) Die Kovarianz vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} K(Z_1, Z_2) &= E\Big(\big(Z_1 - E(Z_1)\big)\big(Z_2 - E(Z_2)\big)\Big) = E\big(Z_1 Z_2 - E(Z_1) Z_2 - E(Z_2) Z_1 + E(Z_1) E(Z_2)\big) \\ &= E(Z_1 Z_2) - E(Z_1) E(Z_2) . \end{aligned}$$

Diese Relation zeigt insbesondere, daß die Kovarianz zweier unabhängiger Zufallsvariablen verschwindet

$$Z_1, Z_2 \text{ unabhängig} \quad \Longleftrightarrow \quad E(Z_1 Z_2) = E(Z_1) E(Z_2) \quad \Longrightarrow \quad K(Z_1, Z_2) = 0 ;$$

die Umkehrung ist im Allgemeinen jedoch nicht richtig.

(iii) Die Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen ist durch

$$\begin{aligned} V(Z_1 + Z_2) &= E\Big(\big(Z_1 + Z_2 - E(Z_1 + Z_2)\big)^2\Big) \\ &= E\Big(Z_1^2 + 2\,Z_1 Z_2 + Z_2^2 - 2\,E(Z_1 + Z_2)\,(Z_1 + Z_2) + \big(E(Z_1 + Z_2)\big)^2\Big) \\ &= E\big(Z_1^2\big) + 2\,E(Z_1 Z_2) + E\big(Z_2^2\big) - \big(E(Z_1 + Z_2)\big)^2 \\ &= E\big(Z_1^2\big) + 2\,E(Z_1 Z_2) + E\big(Z_2^2\big) - \big(E(Z_1)\big)^2 - 2\,E(Z_1)\,E(Z_2) - \big(E(Z_2)\big)^2 \\ &= E\big(Z_1^2\big) - \big(E(Z_1)\big)^2 + E\big(Z_2^2\big) - \big(E(Z_2)\big)^2 + 2\,E(Z_1 Z_2) - 2\,E(Z_1)\,E(Z_2) \\ &= V(Z_1) + V(Z_2) - 2\,K(Z_1, Z_2) \end{aligned}$$

gegeben. Im Fall unabhängiger Zufallsvariablen folgt somit

$$Z_1, Z_2 \text{ unabhängig} \quad \Longrightarrow \quad K(Z_1, Z_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad V(Z_1 + Z_2) = V(Z_1) + V(Z_2) .$$

C.6 Stochastischer Prozeß, Filtrierung

Definition (Stochastischer Prozeß). Es bezeichne $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ einen meßbaren Raum und $\mathscr{T}$ eine Indexmenge.

(i) Ein stochastischer Prozeß ist eine Familie $(Z(t))_{t\in\mathscr{T}}$ von Zufallsvariablen

$$Z(t): \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2, \qquad t \in \mathscr{T}.$$

Wird für ein fixiertes Element $\omega_1 \in \Omega_1$ die Funktion

$$\mathscr{T} \longrightarrow \Omega_2 : t \longmapsto \big(Z(t)\big)(\omega_1)$$

betrachtet, so heißt diese ein Pfad des stochastischen Prozesses.

(ii) Falls die Indexmenge durch die natürlichen Zahlen gegeben ist, spricht man von einem zeitlich diskreten stochastischen Prozeß.

(iii) Falls die Indexmenge durch ein reelles Intervall oder die reellen Zahlen gegeben ist, spricht man von einem zeitlich kontinuierlichen stochastischen Prozeß.

Bemerkung. Wie zuvor bezeichne $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum und $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ einen meßbaren Raum. Durch die Pfadabbildung eines stochastischen Prozesses wird eine Zufallsvariable definiert (Menge der Funktionen $\Omega_2^{\mathscr{T}}$ wird mit Produkt-σ-Algebra[7] versehen, Verwendung derselben Bezeichnung für stochastischen Prozeß und Zufallsvariable)

$$\begin{gathered}\big(Z(t)\big)_{t\in\mathscr{T}}, \qquad Z(t): \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2, \quad t \in \mathscr{T}, \\ Z: \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2^{\mathscr{T}} = \{z: \mathscr{T} \to \Omega_2\} : \omega_1 \longmapsto \big[t \longmapsto \big(Z(t)\big)(\omega_1)\big].\end{gathered}$$

Erklärt man für eine Teilmenge $\mathscr{T}_0 \subset \mathscr{T}$ die Projektion einer Funktion als Einschränkung im folgenden Sinn, so gilt andererseits für jedes Element $t \in \mathscr{T}$ die Relation

$$Z(t) = \mathrm{pr}_{\{t\}} \circ Z, \qquad \mathrm{pr}_{\mathscr{T}_0} : \Omega_2^{\mathscr{T}} \longrightarrow \Omega_2^{\mathscr{T}_0} : z \longmapsto z\big|_{\mathscr{T}_0}.$$

Vorbemerkung. Zur Modellierung von Situationen, wo verfügbare Informationen im Lauf der Zeit zunehmen, ist der Begriff der Filtrierung und der adaptierten Zufallsvariable wesentlich.

[7] *Bemerkung.* Da das kartesische Produkt zweier σ-Algebren $\mathscr{A}_1$ und $\mathscr{A}_2$ nicht notwendigerweise auf eine σ-Algebra führt, definiert man die Produkt-σ-Algebra als die von $\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$ erzeugte σ-Algebra

$$\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 = \big\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathscr{A}_1, A_2 \in \mathscr{A}_2\big\}, \qquad \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 = \sigma\big(\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2\big).$$

Definition (Filtrierung). Es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathscr{T}$ eine Indexmenge der Form $\mathscr{T} = [0, \infty)$ oder $\mathscr{T} = [0, T]$ mit $T > 0$.

(i) *Filtrierung.* Eine Filtrierung von $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ist eine Familie $(\mathscr{A}(t))_{t \in \mathscr{T}}$ von Unter-σ-Algebren $\mathscr{A}(t) \subseteq \mathscr{A}$, welche für beliebige Elemente $t_1, t_2 \in \mathscr{T}$ mit $t_1 < t_2$ die Bedingung

$$\mathscr{A}(t_1) \subseteq \mathscr{A}(t_2)$$

erfüllen; man nennt $(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{A}(t))_{t \in \mathscr{T}}, \mu)$ einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum.

(ii) *Vollständige Filtrierung.* Eine Filtrierung heißt vollständig, wenn die σ-Algebra $\mathscr{A}(0)$ alle Nullmengen enthält

$$\big\{A \in \mathscr{A} : \mu(A) = 0\big\} \subseteq \mathscr{A}(0)$$

und folglich auch $\mathscr{A}(0) \subseteq \mathscr{A}(t) \subseteq \mathscr{A}$ für $t \in \mathscr{T}$.

(iii) *Normale Filtrierung.* Eine Filtrierung $(\mathscr{A}(t))_{t \in \mathscr{T}}$ heißt normal, wenn sie vollständig ist und die folgende Relation gilt (rechtsseitige Stetigkeit)

$$\begin{aligned} \mathscr{T} = [0, \infty) : \qquad & \forall\, t_1 \in [0, \infty) : \quad \mathscr{A}(t_1) = \bigcap_{t_2 > t_1} \mathscr{A}(t_2)\,, \\ \mathscr{T} = [0, T] : \qquad & \forall\, t_1 \in [0, T) : \quad \mathscr{A}(t_1) = \bigcap_{t_2 > t_1} \mathscr{A}(t_2)\,. \end{aligned}$$

Definition (Adaptierter Prozeß). Es sei $(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{A}(t))_{t \in \mathscr{T}}, \mu)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Ein stochastischer Prozeß $(Z(t))_{t \in \mathscr{T}}$ heißt adaptiert bezüglich $(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{A}(t))_{t \in \mathscr{T}}, \mu)$, wenn für alle Elemente $t \in \mathscr{T}$ die Zufallsvariable $Z(t)$ bezüglich $\mathscr{A}(t)$ meßbar ist.

Vorbemerkung. Stochastische Prozesse für welche der bedingte Erwartungswert der zugehörigen Zufallsvariable zu einem gewissen Zeitpunkt mit der entsprechenden Zufallsvariable zu einem früheren Zeitpunkt übereinstimmt, bezeichnet man als Martingale.

Definition (Martingal). Es sei $\mathscr{T} = [0, \infty)$ oder $\mathscr{T} = [0, T]$ mit $T > 0$, und es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{A}(t))_{t \in \mathscr{T}}, \mu)$ einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum. Ein reellwertiger adaptierter stochastischer Prozeß $(Z(t))_{t \in \mathscr{T}}$ mit $Z(t) : \Omega \to \mathbb{R}$ für $t \in \mathscr{T}$ heißt ein Martingal, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.[8]

---

[8] *Bemerkung.* Der Lebesgue-Raum $L^1(\Omega)$ ist durch

$$L^1(\Omega) = \left\{ Z : \Omega \to \mathbb{R} \text{ meßbar und } E(|Z|) = \int_\Omega \big|Z(\omega)\big|\,\mathrm{d}\mu(\omega) < \infty \right\}$$

gegeben; insbesondere folgt

$$\forall Z \in L^1(\Omega) : \qquad E(Z) \le E(|Z|) < \infty\,.$$

(i) Für jedes $t \in \mathscr{T}$ gilt $Z(t) \in L^1(\Omega)$ und folglich $E(Z(t)) < \infty$.

(ii) Für alle Zeitpunkte $t_1, t_2 \in \mathscr{T}$ mit $t_1 \leq t_2$ gilt fast sicher

$$E\big(Z(t_2)\big|\mathscr{A}(t_1)\big) = Z(t_1)\,.$$

Gilt statt dieser Gleichheit die Abschätzung

$$Z(t_1) \leq E\big(Z(t_2)\big|\mathscr{A}(t_1)\big) \quad \text{bzw.} \quad Z(t_1) \geq E\big(Z(t_2)\big|\mathscr{A}(t_1)\big)\,,$$

spricht man von einem Submartingal bzw. einem Supermartingal.

Anhang D

Stochastische Differentialgleichungen

Inhalt. Im Folgenden werden grundlegende Begriffe und Resultate, welche zur Einführung des stochastischen Integrales für stochastische Prozesse mit Werten im euklidischen Raum, im Speziellen des Itô-Integrales, und zur Behandlung von stochastischen gewöhnlichen Differentialgleichungen wesentlich sind, erwähnt; die großteils informelle Darstellung orientiert sich an den ersten Kapiteln des Vorlesungsskriptums SCHROPP (2014). Zu Beginn wird an Grundlagen zu mehrdimensionalen normalverteilten Zufallsvariablen und an mehrdimensionale Wiener-Prozesse erinnert; weiters werden Illustrationen für einen eindimensionalen Wiener-Prozeß (mehrfacher Münzwurf) und einen dreidimensionalen Wiener-Prozeß (Brown'sche Molekularbewegung) angegeben. Zusätzliche Informationen sind in den Vorlesungsunterlagen LERCHE (2009) und STRYCHARZ–SZEMBERG (2008) zu finden; für eine detailierte Darstellung des Itô-Kalküles sei auf DECK (2006) verwiesen, siehe auch GRILL (2012).

Überblick. Folgende grundlegende Begriffe und Resultate werden eingeführt und illustriert.

- Mehrdimensionale Zufallsvariable, Induziertes Maß bzw. Induzierte Verteilung

  Resultat zu Komponentenfunktionen

  Verteilungsfunktion bzw. gemeinsame Verteilung, Randverteilung bzw. Marginalverteilung

  Reduktion auf spezielle Borel-Mengen, Zusammenhang zwischen induziertem Maß und Verteilungsfunktion

  Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

  Resultat zu Randverteilungen

  Erwartungswert, Kovarianzmatrix

  Eigenschaften der Kovarianzmatrix

  Stochastische Konvergenz

- Reelles Gauß-Maß, eindimensionale Normalverteilung und Standardnormalverteilung

  Normalverteilte reellwertige Zufallsvariable

  Zusammenhang zwischen Normalverteilung und Standardnormalverteilung

  Mehrdimensionale Normalverteilung

  Mehrdimensionale normalverteilte Zufallsvariable

- Mehrdimensionaler stochastischer Prozeß, Pfad

  Zeitlich diskreter mehrdimensionaler stochastischer Prozeß, zeitlich kontinuierlicher mehrdimensionaler stochastischer Prozeß

  Eindimensionaler Wiener-Prozeß, eindimensionale Brown'sche Bewegung

  Mehrdimensionaler Wiener-Prozeß, mehrdimensionale Brown'sche Bewegung

- Simulation in MATLAB

  Illustration zu Binomialprozeß und eindimensionalem Wiener-Prozeß (Mehrfacher Münzwurf)

  Illustration zur dreidimensionalem Wiener-Prozeß (Brown'sche Molekularbewegung)

- Riemann-Integral, Riemann–Stieltjes-Integral

  Lebesgue-Integral, Lebesgue–Stieltjes-Integral

  Lebesgue-Räume

  Pfadweise L^p-Prozesse

- Konstruktion des Itô-Integrales

  Eigenschaften des Itô-Integrales

  Stratonovich-Integral

- Lemma von Itô (Spezialfall)

  Anwendung auf Identität und quadratische Funktion

  Analogon für reguläre Funktionen

  Zusammenhang zwischen Itô-Integral und Stratonovich-Integral

  Itô-Prozeß

  Spezialfälle, Symbolische Notation

  Lemma von Itô

  Vergleich mit Kettenregel

  Produktregel für Itô-Prozesse

- Stochastische gewöhnliche Differentialgleichungen
  Resultat zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung
  Lineare Differentialgleichung mit additivem Rauschen
- Illustration zum Lemma von Itô

D.1 Mehrdimensionale Zufallsvariable

Vorbemerkung. Der euklidische Raum $\mathbb{R}^d$ wird mit der Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ versehen und bildet somit einen meßbaren Raum.

Definition (Zufallsvariable, Induziertes Maß). Eine meßbare Funktion zwischen einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ und dem d-dimensionalen euklidischen Raum

$$Z = (Z_1, \dots, Z_d)^T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d : \omega \longmapsto Z(\omega) = \big(Z_1(\omega), \dots, Z_d(\omega)\big)^T$$

wird als d-dimensionale Zufallsvariable bezeichnet. Das durch Z auf $\mathbb{R}^d$ induzierte Maß bzw. die induzierte Verteilung ist durch ($Z^{-1}(A)$ bezeichnet Urbildmenge)

$$\mu_Z : \mathscr{B}\big(\mathbb{R}^d\big) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \mu_Z(A) = \mu\big(Z^{-1}(A)\big)$$

definiert; beachte $\mu : \mathscr{A} \to [0,1]$ und folglich $\mu_Z : \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{A} \to [0,1]$.

Resultat (Komponentenfunktionen). Eine Funktion

$$Z = (Z_1, \dots, Z_d)^T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

ist genau dann eine d-dimensionale Zufallsvariable, wenn alle Komponentenfunktionen

$$Z_1, \dots, Z_d : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

reellwertige Zufallsvariablen sind.

Vorbemerkung. Betrachtet man Borel-Mengen der speziellen Form

$$Q(r) = (-\infty, r_1] \times \cdots \times (-\infty, r_d] \in \mathscr{B}\big(\mathbb{R}^d\big), \qquad r = (r_1, \dots, r_d)^T \in \mathbb{R}^d,$$

ergibt sich aus dem induzierten Maß einer d-dimensionalen Zufallsvariable die zugehörige Verteilungsfunktion.

Definition (Verteilungsfunktion, Randverteilung). Es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum, $Z = (Z_1, \dots, Z_d)^T : \Omega \to \mathbb{R}^d$ eine d-dimensionale Zufallsvariable und $\mu_Z : \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,1]$ das induzierte Maß; insbesondere sind $Z_1, \dots, Z_d : \Omega \to \mathbb{R}$ reellwertige Zufallsvariablen. Die Funktion

$$F_Z : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0,1] : r = (r_1, \dots, r_d)^T \longmapsto \mu_Z\big(Q(r)\big) = \mu_Z\big((-\infty, r_1] \times \cdots \times (-\infty, r_d]\big)$$

heißt Verteilungsfunktion von Z bzw. gemeinsame Verteilung von $Z_1, \dots, Z_d$. Die eindimensionalen Randverteilungen bzw. Marginalverteilungen von Z sind durch

$$F_{Z_k} : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] : r_k \longmapsto \mu_Z\big(\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times (-\infty, r_k] \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}\big), \qquad k \in \{1, \dots, d\},$$

gegeben.

Bemerkung. Es sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Da die Vereinigung sämtlicher Borel-Mengen der speziellen Form

$$Q(r) = (-\infty, r_1] \times \cdots \times (-\infty, r_d] \subset \mathbb{R}^d, \qquad r = (r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{R}^d,$$

ein Erzeugendensystem der Borel-σ-Algebra des euklidischen Raumes bildet

$$\mathscr{B}\big(\mathbb{R}^d\big) = \sigma\big(\big\{Q(r) : r \in \mathbb{R}^d\big\}\big),$$

ist eine d-dimensionale Zufallsvariable $Z = (Z_1, \dots, Z_d)^T : \Omega \to \mathbb{R}^d$ durch die Meßbarkeitsbedingung

$$\forall\, r = (r_1, \dots, r_d)^T \in \mathbb{R}^d : \qquad Z^{-1}\big(Q(r)\big) = \big\{\omega \in \Omega : \text{ für jedes } k \in \{1, \dots, d\} \text{ gilt } Z_k(\omega) \leq r_k\big\} \in \mathscr{A}$$

charakterisiert. Die Verteilungsfunktion von Z ist mittels des induzierten Maßes definiert

$$\mu_Z : \mathscr{B}\big(\mathbb{R}^d\big) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \mu_Z(A) = \mu\big(Z^{-1}(A)\big),$$
$$F_Z : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0,1] : r \longmapsto \mu_Z\big(Q(r)\big);$$

die im Folgenden für den ein- und zweidimensionalen Fall angegebenen Überlegungen illustrieren, daß sich Werte des von Z induzierten Maßes auf Werte der zugehörigen Verteilungsfunktion zurückführen lassen.

(i) *Eindimensionaler Fall.* Jedes halboffene Intervall $(a,b] \subset \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ läßt sich als Mengendifferenz von zwei nach unten unbeschränkten Intervallen darstellen

$$(a,b] = Q(b) \setminus Q(a) = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a].$$

Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ folgt damit die Identität[1]

$$\mu\big((a,b]\big) = \mu\big(Q(b)\big) - \mu\big(Q(a)\big);$$

dies zeigt, daß die Werte des Maßes für halboffene Intervalle der Form $(a,b]$ durch die Vorgabe der Werte des Maßes für Intervalle der Form $(-\infty, r]$ mit $r \in \mathbb{R}$ bestimmt sind. Betrachtet man im Speziellen das von einer eindimensionalen Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ induzierte Maß $\mu_Z : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$, so erhält man

$$\mu_Z\big((a,b]\big) = \mu_Z\big(Q(b)\big) - \mu_Z\big(Q(a)\big);$$

mittels Verteilungsfunktion ergibt sich folgende kompakte Formulierung dieser Identität

$$\mu_Z\big((a,b]\big) = F_Z(b) - F_Z(a).$$

[1] *Erinnerung* (Resultat zur Mengendifferenz). Für $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ mit $A_2 \subseteq A_1$ und $\mu(A_2) < \infty$ folgt

$$\mu(A_1 \setminus A_2) = \mu(A_1) - \mu(A_2).$$

(ii) *Zweidimensionaler Fall.* Jedes achsenparallele Rechteck $(a_1,b_1] \times (a_2,b_2] \subset \mathbb{R}^2$ mit $a_1,b_1,a_2,b_2 \in \mathbb{R}$ und $a_1 < b_1$ sowie $a_2 < b_2$ ergibt sich als disjunkte Vereinigung (das kartesische Produkt $Q(r_1,r_2) = (-\infty,r_1] \times (-\infty,r_2]$ entspricht einem *verschobenen* 3. Quadranten mit Eckpunkt $(r_1,r_2) \in \mathbb{R}^2$, Bild zur Veranschaulichung)

$$\begin{gathered}
D_1 = Q(b_1,a_2) \setminus Q(a_1,a_2) = (a_1,b_1] \times (-\infty,a_2]\,, \\
D_2 = Q(a_1,b_2) \setminus Q(a_1,a_2) = (-\infty,a_1] \times (a_2,b_2]\,, \\
Q(a_1,a_2) \cup D_1 \cup D_2 \cup \big((a_1,b_1] \times (a_2,b_2]\big) = Q(b_1,b_2)\,.
\end{gathered}$$

Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}^2) \to [0,1]$ folgen daraus die Relationen

$$\begin{gathered}
\mu(D_1) = \mu\big(Q(b_1,a_2)\big) - \mu\big(Q(a_1,a_2)\big)\,, \qquad \mu(D_2) = \mu\big(Q(a_1,b_2)\big) - \mu\big(Q(a_1,a_2)\big)\,, \\
\mu\big(Q(a_1,a_2)\big) + \mu(D_1) + \mu(D_2) + \mu\big((a_1,b_1] \times (a_2,b_2]\big) = \mu\big(Q(b_1,b_2)\big)\,, \\
\mu\big((a_1,b_1] \times (a_2,b_2]\big) = \mu\big(Q(b_1,b_2)\big) + \mu\big(Q(a_1,a_2)\big) - \mu\big(Q(b_1,a_2)\big) - \mu\big(Q(a_1,b_2)\big)\,.
\end{gathered}$$

Betrachtet man speziell das von einer zweidimensionalen Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}^2$ induzierte Maß $\mu_Z : \mathscr{B}(\mathbb{R}^2) \to [0,1]$, ergibt sich

$$\mu_Z\big((a_1,b_1] \times (a_2,b_2]\big) = \mu_Z\big(Q(b_1,b_2)\big) + \mu_Z\big(Q(a_1,a_2)\big) - \mu_Z\big(Q(b_1,a_2)\big) - \mu_Z\big(Q(a_1,b_2)\big);$$

mit Hilfe der Verteilungsfunktion führt dies auf die Identität

$$\mu_Z\big((a_1,b_1] \times (a_2,b_2]\big) = F_Z(b_1,b_2) + F_Z(a_1,a_2) - F_Z(b_1,a_2) - F_Z(a_1,b_2)\,.$$

(iii) *Allgemeiner Fall.* Analoge Überlegungen gelten für Mengen der Form

$$(a_1,b_1] \times \cdots \times (a_d,b_d] \subset \mathbb{R}^d$$

mit $a_k,b_k \in \mathbb{R}$ und $a_k < b_k$ für $k \in \{1,\dots,d\}$.

Vorbemerkung. Die folgende Definition gibt die offensichtliche Verallgemeinerung des Begriffes der stochastischen Unabhängigkeit von zwei reellwertigen Zufallsvariablen auf mehrere reellwertige Zufallsvariablen an.

Definition (Unabhängige Zufallsvariablen). Es bezeiche $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum. Die reellwertigen Zufallsvariablen $Z_1,\dots,Z_d : \Omega \to \mathbb{R}$ heißen unabhängig, wenn die Urbilder von beliebigen Borel-Mengen unabhängig sind

$$\forall A_1,\dots,A_d \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) : \qquad \mu\Big(\bigcap_{k=1}^{d} Z_k^{-1}(A_k)\Big) = \prod_{k=1}^{d} \mu\big(Z_k^{-1}(A_k)\big)\,.$$

Resultat (Randverteilungen). Die Komponentenfunktionen einer d-dimensionalen Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}^d$ sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn für alle Elemente $r = (r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{R}^d$ die Relation

$$F_Z(r) = \prod_{k=1}^{d} F_{Z_k}(r_k)$$

gültig ist, d.h. die Verteilungsfunktion von Z ist durch die eindimensionalen Randverteilungen bestimmt.

Erinnerung. Für eine diskrete bzw. kontinuierliche reellwertige Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ sind Erwartungswert und Varianz durch (im diskreten Fall Einschränkung auf höchstens abzählbar viele angenommenen Werte $(z_k)_{k \in \mathscr{K}}$ möglich)

$$E(Z) = \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega)\, \mu(\omega) = \sum_{z \in \mathbb{R}} z\, \mu\big(Z^{-1}(z)\big) = \sum_{k \in \mathscr{K}} z_k\, \mu\big(Z^{-1}(z_k)\big),$$

$$E(Z) = \int_\Omega Z(\omega)\, \mathrm{d}\mu(\omega) = \int_{\mathbb{R}} z\, \mathrm{d}\mu\big(Z^{-1}(z)\big),$$

$$V(Z) = E\Big(\big(Z - E(Z)\big)^2\Big) \geq 0,$$

gegeben, sofern die Reihe konvergiert bzw. das Integral wohldefiniert ist. Die Kovarianz zweier reeller Zufallsvariablen $Z_1, Z_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ ist durch

$$K(Z_1, Z_2) = E\Big(\big(Z_1 - E(Z_1)\big)\big(Z_2 - E(Z_2)\big)\Big) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)\, E(Z_2)$$

definiert; offensichtlich gilt

$$V(Z) = K(Z, Z), \qquad K(Z_2, Z_1) = K(Z_1, Z_2).$$

Falls die Zufallsvariablen Z_1, Z_2 unabhängig sind, folgt

$$Z_1, Z_2 \text{ unabhängig} \quad \Longrightarrow \quad K(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)\, E(Z_2) = 0.$$

Definition (Erwartungswert, Kovarianzmatrix). Der Erwartungswert einer d-dimensionalen Zufallsvariable $Z = (Z_1, \dots, Z_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ist durch die Erwartungswerte der Komponentenfunktionen gegeben

$$E(Z) = \big(E(Z_1), \dots, E(Z_d)\big)^T \in \mathbb{R}^d.$$

Die Kovarianzmatrix gibt die Kovarianzen der Komponentenfunktionen an

$$K(Z) = \begin{pmatrix} V(Z_1) & K(Z_1, Z_2) & K(Z_1, Z_3) & \dots & K(Z_1, Z_d) \\ K(Z_2, Z_1) & V(Z_2) & K(Z_2, Z_3) & \dots & K(Z_2, Z_d) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ K(Z_d, Z_1) & \dots & \dots & K(Z_d, Z_{d-1}) & V(Z_d) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d};$$

erklärt man den Erwartungswert einer Matrix komponentenweise, so ergibt sich mittels

$$\begin{aligned}
K(Z_k, Z_\ell) &= E(Z_k\, Z_\ell) - E(Z_k)\, E(Z_\ell) \\
&= E\big(Z_k\, Z_\ell - E(Z_k)\, E(Z_\ell)\big) \\
&= \Big(E\Big(Z Z^T - E(Z)\big(E(Z)\big)^T\Big)\Big)_{k\ell} \\
&= \Big(E\Big(\big(Z - E(Z)\big)\,\big(Z - E(Z)\big)^T\Big)\Big)_{k\ell}, \qquad k, \ell \in \{1, \dots, d\},
\end{aligned}$$

folgende Relation für die Kovarianzmatrix einer mehrdimensionalen Zufallsvariable

$$K(Z) = E\Big(\big(Z - E(Z)\big)\,\big(Z - E(Z)\big)^T\Big).$$

Bemerkung. Wie zuvor bezeichne $Z = (Z_1, \dots, Z_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ eine d-dimensionale Zufallsvariable. Die zugehörige Kovarianzmatrix erfüllt folgende Eigenschaften.

(i) *Symmetrie.* Da $K(Z_k, Z_\ell) = K(Z_\ell, Z_k)$ für $k, \ell \in \{1, \dots, d\}$ gilt, ist die Kovarianzmatrix symmetrisch

$$\big(K(Z)\big)^T = K(Z) = \begin{pmatrix} V(Z_1) & K(Z_1, Z_2) & K(Z_1, Z_3) & \dots & K(Z_1, Z_d) \\ K(Z_1, Z_2) & V(Z_2) & K(Z_2, Z_3) & \dots & K(Z_2, Z_d) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ K(Z_1, Z_d) & \dots & \dots & K(Z_{d-1}, Z_d) & V(Z_d) \end{pmatrix}.$$

(ii) *Positive Semidefinitheit.* Wegen $V(Z_k) \geq 0$ für $k \in \{1, \dots, d\}$ sind alle Diagonalelemente der Kovarianzmatrix nichtnegativ; die folgende Relation zeigt außerdem, daß die Kovarianzmatrix positiv-semidefinit ist (die Vektoren $z = (z_1, \dots, z_d)^T \in \mathbb{R}^d$ bewirken nur eine Skalierung von $Z = (Z_1, \dots, Z_d)^T$, verwende Linearität des Erwartungswertes, für eine beliebige reellwertige Zufallsvariable Z gilt $E(Z^2) \geq 0$, zur Vereinfachung betrachte den Spezialfall $d = 3$)

$$\begin{aligned}
z^T K(Z)\, z &= \sum_{k=1}^{d} V(Z_k) z_k^2 + 2 \sum_{\substack{k,\ell=1 \\ k<\ell}}^{d} K(Z_k, Z_\ell) z_k z_\ell \\
&= \sum_{k=1}^{d} E\Big(\big(z_k Z_k - E(z_k Z_k)\big)^2\Big) + 2 \sum_{\substack{k,\ell=1 \\ k<\ell}}^{d} E\Big(\big(z_k Z_k - E(z_k Z_k)\big)\,\big(z_\ell Z_\ell - E(z_\ell Z_\ell)\big)\Big) \\
&= E\bigg(\sum_{k=1}^{d} \big(z_k Z_k - E(z_k Z_k)\big)^2 + 2 \sum_{\substack{k,\ell=1 \\ k<\ell}}^{d} \big(z_k Z_k - E(z_k Z_k)\big)\,\big(z_\ell Z_\ell - E(z_\ell Z_\ell)\big)\bigg) \\
&= E\bigg(\Big(\sum_{k=1}^{d} \big(z_k Z_k - E(z_k Z_k)\big)\Big)^2\bigg) \geq 0\,.
\end{aligned}$$

(iii) *Unabhängigkeit.* Sind alle Komponentenfunktionen unabhängig, vereinfacht sich die Kovarianzmatrix zu einer Diagonalmatrix

$$Z_1, \dots, Z_d \text{ unabhängig} \quad \Longrightarrow \quad K(Z) = \operatorname{diag}\big(V(Z_1), \dots, V(Z_d)\big) .$$

Stochastische Konvergenz. Es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum. Für eine Folge von d-dimensionalen Zufallsvariablen $(Z^{(\ell)})_{\ell \in \mathbb{N}}$ mit $Z^{(\ell)} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ für $\ell \in \mathbb{N}$ spricht man von stochastischer Konvergenz gegen eine Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}^d$, wenn die Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0 : \qquad \lim_{\ell \to \infty} \mu\Big(\big\{\omega \in \Omega : \big\| Z^{(\ell)}(\omega) - Z(\omega) \big\| > \varepsilon \big\}\Big) = 0$$

erfüllt ist; eine gebräuchliche Schreibweise ist in diesem Fall

$$\mu - \lim_{\ell \to \infty} Z^{(\ell)} = Z .$$

Bezüglich dieses Konvergenzbegriffes ist der Grenzwert einer Folge von Zufallsvariablen fast sicher eindeutig bestimmt.

D.2 Mehrdimensionale Normalverteilung

Vorbemerkung. Im Folgenden wird an den Begriff eines reellen Gauß-Maßes bzw. der eindimensionalen Normalverteilung erinnert und die Erweiterung auf den mehrdimensionalen Fall angegeben. Es sei darauf hingewiesen, daß in einem späteren Abschnitt die Fourier-Transformation bzw. die charakteristische Funktion eines reellen Gauß-Maßes genützt wird, um die Überlegungen zu vereinfachen.

Normalverteilung.

(i) *Normalverteilung.* Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, und es gelte $\beta > 0$. Ein auf der Borel-σ-Algebra der reellen Zahlen definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß der Form

$$N\big(\alpha, \beta^2\big) : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\beta} \int_A \mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\alpha)^2}{2\beta^2}}\, \mathrm{d}\xi\,,$$

heißt reelles Gauß-Maß oder eindimensionale Normalverteilung mit Erwartungswert α und Varianz β^2; der Spezialfall $\beta = 0$, welcher auf das Dirac-Maß δ_α führt, wird an dieser Stelle nicht behandelt.

(ii) *Bemerkung.* Die reellen Zahlen bilden mit der Borel-σ-Algebra und einem reellen Gauß-Maß einen Wahrscheinlichkeitsraum

$$(\Omega, \mathscr{A}, \mu) = \big(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), N\big(\alpha, \beta^2\big)\big)\,.$$

Wählt man speziell die Identität als Zufallsvariable, so stimmen Maß und induziertes Maß überein (wegen $\mu_Z(A) = \mu\big(Z^{-1}(A)\big) = \mu(A)$ für $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$)

$$Z = I : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : r \longmapsto r\,, \qquad \mu_Z = \mu = N\big(\alpha, \beta^2\big) : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]\,.$$

Insbesondere folgen in diesem Fall die Relationen[2]

$$E(I) = \int_{\mathbb{R}} z\, \mathrm{d}\mu(z) = \alpha\,, \qquad V(I) = E\Big(\big(I - E(I)\big)^2\Big) = \int_{\mathbb{R}} (z-\alpha)^2\, \mathrm{d}\mu(z) = \beta^2\,,$$

[2] *Bemerkung.* Mit Hilfe der Relationen (Quadrieren und Verwendung von Polarkoordinaten, Integral über ungerade Funktion verschwindet, Partielle Integration mit $f(\xi) = \xi$, $g'(\xi) = \xi\,\mathrm{e}^{-\xi^2}$ und $f'(\xi) = 1$, $g(\xi) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\xi^2}$)

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\xi^2}\, \mathrm{d}\xi = \sqrt{\pi}\,, \qquad \int_{\mathbb{R}} \xi\,\mathrm{e}^{-\xi^2}\, \mathrm{d}\xi = 0\,, \qquad \int_{\mathbb{R}} \xi^2\,\mathrm{e}^{-\xi^2}\, \mathrm{d}\xi = -\tfrac{1}{2}\,\xi\,\mathrm{e}^{-\xi^2}\Big|_{x=-\infty}^{\infty} + \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\xi^2}\, \mathrm{d}\xi = \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

folgen die angegebenen Identitäten (Substitution $\eta = \frac{\xi-\alpha}{\sqrt{2}\,\beta}$ bzw. $\xi = \alpha + \sqrt{2}\,\beta\,\eta$)

$$E(I) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\beta} \int_{\mathbb{R}} \xi\,\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\alpha)^2}{2\beta^2}}\, \mathrm{d}\xi = \tfrac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\eta^2}\, \mathrm{d}\eta + \tfrac{\sqrt{2}\,\beta}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \eta\,\mathrm{e}^{-\eta^2}\, \mathrm{d}\eta = \alpha\,,$$

$$V(I) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\beta} \int_{\mathbb{R}} (\xi-\alpha)^2\,\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\alpha)^2}{2\beta^2}}\, \mathrm{d}\xi = \tfrac{2\beta^2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \eta^2\,\mathrm{e}^{-\eta^2}\, \mathrm{d}\eta = \beta^2\,.$$

was die Bezeichnung reelles Gauß-Maß bzw. eindimensionale Normalverteilung mit Erwartungswert α und Varianz β^2 erklärt.

(iii) *Standardnormalverteilung.* Für die spezielle Wahl $\alpha = 0$ und $\beta = 1$ ergibt sich die eindimensionale Standardnormalverteilung

$$N(0,1) : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} \,\mathrm{d}\xi \,.$$

Normalverteilte Zufallsvariable.

(i) *Zufallsvariable.* Eine auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ definierte reellwertige Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt normalverteilt, wenn das induzierte Maß

$$\mu_Z : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \mu_Z(A) = \mu\big(Z^{-1}(A)\big)$$

eine eindimensionale Normalverteilung ist, d.h. es existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta > 0$, sodaß

$$\mu_Z = N\big(\alpha, \beta^2\big) : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\beta} \int_A \mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\alpha)^2}{2\beta^2}} \,\mathrm{d}\xi \,.$$

(ii) *Normalverteilung und Standardnormalverteilung.* Ist eine reellwertige Zufallsvariable Z normalverteilt mit Erwartungswert α und Varianz β^2, so ist die Zufallsvariable $\frac{1}{\beta}\,(Z-\alpha)$ standardnormalverteilt

$$Z \sim N\big(\alpha, \beta^2\big) \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{\beta}\,(Z-\alpha) \sim N(0,1)\,;$$

dies folgt direkt aus der Linearität des Erwartungswertes

$$E(Z) = \alpha \quad \Longrightarrow \quad E\big(\tfrac{1}{\beta}\,(Z-\alpha)\big) = \tfrac{1}{\beta}\,\big(E(Z)-\alpha\big) = 0$$

und der Definition der Varianz

$$\begin{aligned} &E\big(Z^2\big) - \alpha^2 = E\big(Z^2\big) - \big(E(Z)\big)^2 = V(Z) = \beta^2 \\ &\quad\Longrightarrow \quad V\big(\tfrac{1}{\beta}\,(Z-\alpha)\big) = E\big(\tfrac{1}{\beta^2}\,(Z-\alpha)^2\big) - \Big(E\big(\tfrac{1}{\beta}\,(Z-\alpha)\big)\Big)^2 = \tfrac{1}{\beta^2}\,\Big(E\big(Z^2\big) - \alpha^2\Big) = 1\,. \end{aligned}$$

Analoge Überlegungen zeigen, daß für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable Z die Zufallsvariable $\alpha + \beta Z$ normalverteilt mit Erwartungswert α und Varianz β^2 ist

$$\begin{aligned} Z \sim N(0,1) \quad &\Longrightarrow \quad \alpha + \beta Z \sim N\big(\alpha, \beta^2\big)\,, \\ E(Z) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad E\big(\alpha + \beta Z\big) = \alpha + \beta E(Z) = \alpha\,, \\ E\big(Z^2\big) = V(Z) = 1 \quad &\Longrightarrow \quad V\big(\alpha + \beta Z\big) = E\Big(\big(\alpha + \beta Z\big)^2 - \alpha^2\Big) = 2\,\alpha\beta\, E(Z) + \beta^2 E\big(Z^2\big) = \beta^2\,. \end{aligned}$$

Erweiterung. Es sei darin erinnert, daß die Borel-σ-Algebra des euklidischen Raumes durch das folgende Mengensystem erzeugt wird

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma\big(\{Q(r) : r \in \mathbb{R}^d\}\big)\,, \qquad Q(r) = (-\infty, r_1] \times \cdots \times (-\infty, r_d] \subset \mathbb{R}^d\,, \quad r = (r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{R}^d\,.$$

Dies rechtfertigt die Betrachtung von Borel-Mengen der speziellen Form

$$A = A_1 \times \cdots \times A_d \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)\,, \qquad A_1, \dots, A_d \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\,,$$

wofür die Erweiterung des eindimensionalen Falles auf den mehrdimensionalen Fall offensichtlich ist; man beachte, daß sich die Berechnung von mehrfachen Integralen über Bereiche, welche als kartesisches Produkt gegeben sind, auf einfache Integrale reduzieren läßt und damit wesentlich vereinfacht.

(i) *Standardnormalverteilung.* Betrachtet man den d-dimensionalen euklidischen Raum versehen mit der Borel-σ-Algebra, ist die folgende Verallgemeinerung der eindimensionalen Standardnormalverteilung naheliegend

$$N(0, I) : \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_A \mathrm{e}^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Ähnlich wie zuvor wird der d-dimensionale euklidische Raum mit der Borel-σ-Algebra sowie der d-dimensionalen Standardnormalverteilung als Wahrscheinlichkeitsraum betrachtet und als Zufallsvariable die Identität gewählt

$$\begin{gathered}(\Omega, \mathscr{A}, \mu) = \big(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), N(0, I)\big)\,,\\ Z = (Z_1, \dots, Z_k)^T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d\,, \qquad Z_k = I : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad k \in \{1, \dots, d\}\,, \qquad \mu_Z = \mu = N(0, I)\,.\end{gathered}$$

In diesem Fall ist die Unabhängigkeit der Komponentenfunktionen offensichtlich; weiters ist der Vektor der Erwartungswerte der Komponentenfunktionen gleich Null, und die Kovarianzmatrix ist durch die Einheitsmatrix gegeben[3]

$$E(I) = 0 \in \mathbb{R}^d\,, \qquad K(I) = I \in \mathbb{R}^{d\times d}\,.$$

[3] *Bemerkung.* Aus den zuvor angegebenen Relationen folgt (Substitution $\xi_k = \sqrt{2}\,\eta_k$)

$$\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi_k^2}\,\mathrm{d}\xi_k = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\eta_k^2}\,\mathrm{d}\eta_k = 1\,, \qquad \int_{\mathbb{R}} \xi_k\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi_k^2}\,\mathrm{d}\xi_k = 0\,, \qquad \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \xi_k^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi_k^2}\,\mathrm{d}\xi_k = \tfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \eta_k^2\,\mathrm{e}^{-\eta_k^2}\,\mathrm{d}\eta_k = 1\,;$$

somit erhält man für die Erwartungswerte und Kovarianzen der Komponentenfunktionen (wobei $k, \ell \in \{1, \dots, d\}$)

$$\begin{gathered}E(Z_k) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \xi_k\,\mathrm{e}^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}}\,\mathrm{d}\xi = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \xi_k\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi_k^2}\,\mathrm{d}\xi_k \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{d} \Big(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \xi_\ell\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\xi_\ell^2}\,\mathrm{d}\xi_\ell\Big) = 0\,,\\ k = \ell: \qquad V(Z_k) = E\big(Z_k^2\big) - \big(E(Z_k)\big)^2 = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \xi_k^2\,\mathrm{e}^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}}\,\mathrm{d}\xi = 1\,,\\ k \neq \ell: \qquad K(Z_k, Z_\ell) = E(Z_k\,Z_\ell) - E(Z_k)\,E(Z_\ell) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \xi_k\,\xi_\ell\,\mathrm{e}^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}}\,\mathrm{d}\xi = 0\,.\end{gathered}$$

(ii) *Normalverteilung.* Ausgehend von der d-dimensionalen Standardnormalverteilung

$$
\begin{gathered}
N(0,I) : \mathscr{B}\big(\mathbb{R}^d\big) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_A \mathrm{e}^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}} \,\mathrm{d}\xi\,, \\
E(I) = 0\,, \qquad K(I) = I\,,
\end{gathered}
$$

führt die lineare Variablentransformation

$$
\xi = Q^{-1}(\eta - q)\,, \quad \eta = q + Q\xi\,, \qquad q \in \mathbb{R}^d\,, \quad Q \in \mathbb{R}^{d\times d}\,, \quad \det Q \neq 0\,,
$$

auf die d-dimensionale Normalverteilung mit Erwartungswert q und Kovarianzmatrix QQ^T (es gilt $\|Q^{-1}(\eta-q)\|^2 = (\eta-q)^T(QQ^T)^{-1}(\eta-q)$, die Bedingung $\xi \in A$ mit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ entspricht $\eta \in \{q + Q\xi : \xi \in A\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ und führt wiederum auf eine Borel-Menge, nach Transformation ersetze $\eta \leftrightarrow \xi$)

$$
\begin{gathered}
N\big(q, QQ^T\big) : \mathscr{B}\big(\mathbb{R}^d\big) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\, |\det Q|^{-1} \int_A \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\xi-q)^T(QQ^T)^{-1}(\xi-q)} \,\mathrm{d}\xi\,, \\
E(I) = q\,, \qquad K(I) = QQ^T\,;
\end{gathered}
$$

eine einfache Rechnung zeigt die angegebenen Relationen für Erwartungswert und Kovarianzmatrix.[4]

[4] *Bemerkung.* Zur Bestimmung der Erwartungswerte und Kovarianzen der Komponentenfunktionen nützt man die Substitution $\eta = Q^{-1}(\xi - q)$ bzw. $\xi = q + Q\eta$ und die zuvor angegebenen Relationen (mit $k, \ell \in \{1,\dots,d\}$)

$$
\begin{aligned}
E(Z_k) &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\, |\det Q|^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \xi_k\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\xi-q)^T(QQ^T)^{-1}(\xi-q)} \,\mathrm{d}\xi \\
&= q_k\, (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\|\eta\|^2} \,\mathrm{d}\eta + (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \big(Q\eta\big)_k\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\|\eta\|^2} \,\mathrm{d}\eta \\
&= q_k\, (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\|\eta\|^2} \,\mathrm{d}\eta + (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \sum_{j=1}^{d} Q_{kj} \int_{\mathbb{R}^d} \eta_j\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\|\eta\|^2} \,\mathrm{d}\eta \\
&= q_k\,, \\
K(Z_k, Z_\ell) &= E(Z_k\, Z_\ell) - E(Z_k)\, E(Z_\ell) \\
&= (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\, |\det Q|^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \xi_k\, \xi_\ell\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\xi-q)^T(QQ^T)^{-1}(\xi-q)} \,\mathrm{d}\xi - q_k\, q_\ell \\
&= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \big(q_k\, q_\ell + (Q\eta)_k\, q_\ell + q_k\, (Q\eta)_\ell + (Q\eta)_k\, (Q\eta)_\ell\big)\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\|\eta\|^2} \,\mathrm{d}\eta - q_k\, q_\ell \\
&= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \sum_{i,j=1}^{d} Q_{ki}\, Q_{\ell j} \int_{\mathbb{R}^d} \eta_i\, \eta_j\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\|\eta\|^2} \,\mathrm{d}\eta \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} Q_{ki}\, Q_{\ell j}\, \delta_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^{d} Q_{kj}\, Q^T_{j\ell} \\
&= \big(QQ^T\big)_{k\ell}\,.
\end{aligned}
$$

(iii) *Zufallsvariable.* Eine auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ definierte d-dimensionale Zufallsvariable

$$Z = (Z_1, \dots, Z_d)^T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

heißt d-dimensional normalverteilt, wenn für jedes Element $z \in \mathbb{R}^d$ die reellwertige Zufallsvariable

$$z^T Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto \big(z^T Z\big)(\omega) = \sum_{k=1}^{d} z_k Z_k(\omega)$$

normalverteilt ist, d.h. es existieren Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta > 0$, sodaß das von $z^T Z$ induzierte Maß durch das reelle Gauß-Maß (eigentlich $\alpha_z, \beta_z \in \mathbb{R}$)

$$\mu_{z^T Z} = N\big(\alpha, \beta^2\big) : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \mu\Big(\big(z^T Z\big)^{-1}(A)\Big) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\beta} \int_A \mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\alpha)^2}{2\beta^2}}\, \mathrm{d}\xi$$

gegeben ist. Wählt man speziell $z = e_k$ mit $k \in \{1, \dots, d\}$, so folgt daraus insbesondere, daß sämtliche Komponentenfunktionen

$$e_k^T Z = Z_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad k \in \{1, \dots, d\},$$

normalverteilt sind, d.h. für jedes $k \in \{1, \dots, d\}$ existieren $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ mit $\beta_k > 0$, sodaß das von Z_k induzierte Maß mit dem zugehörigen reellen Gauß-Maß übereinstimmt

$$\mu_{Z_k} = N\big(\alpha_k, \beta_k^2\big) : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \mu\big(Z_k^{-1}(A)\big) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\beta_k} \int_A \mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\alpha_k)^2}{2\beta_k^2}}\, \mathrm{d}\xi\,.$$

(iv) *Resultat.* Es seien $z_1, \dots, z_d : \Omega \to \mathbb{R}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ definierte unabhängige standardnormalverteilte reellwertige Zufallsvariablen; weiters seien $q \in \mathbb{R}^d$ und $Q \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mit $\det Q \neq 0$. Dann ist die d-dimensionale Zufallsvariable

$$Z = q + Q(z_1, \dots, z_d)^T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d, \qquad E(Z) = q, \quad K(Z) = QQ^T,$$

normalverteilt.

D.3 Mehrdimensionaler Wiener-Prozeß

Vorbemerkung. Im Folgenden wird die Definition eines stochastischen Prozesses mit Werten in einem meßbaren Raum nochmals für den Spezialfall des euklidischen Raumes versehen mit der Borel-σ-Algebra angegeben; man spricht dann von einem mehrdimensionalen stochastischen Prozeß.

Definition (Stochastischer Prozeß). Es sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathscr{T}$ eine Indexmenge.

(i) Als d-dimensionalen stochastischen Prozeß bezeichnet man eine Familie $(Z(t))_{t\in\mathscr{T}}$ von d-dimensionalen Zufallsvariablen

$$Z(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d, \qquad t \in \mathscr{T};$$

wird für ein fixiertes Element $\omega \in \Omega$ die Funktion

$$\mathscr{T} \longrightarrow \mathbb{R}^d : t \longmapsto \big(Z(t)\big)(\omega)$$

betrachtet, so heißt diese ein Pfad des stochastischen Prozesses.

(ii) Falls die Indexmenge durch die natürlichen Zahlen gegeben ist, spricht man von einem zeitlich diskreten d-dimensionalen stochastischen Prozeß; falls die Indexmenge durch die reellen Zahlen oder ein Intervall gegeben ist, spricht man von einem zeitlich kontinuierlichen d-dimensionalen stochastischen Prozeß.

Vorbemerkung. Für die betrachteten stochastischen Differentialgleichungen ist der Begriff des mehrdimensionalen Wiener-Prozesses von großer Bedeutung.

Definition (Wiener-Prozeß, Brown'sche Bewegung). Es sei $\mathscr{T} = [0, \infty)$ oder $\mathscr{T} = [0, T]$ mit $T > 0$; weiters bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum.

(i) Ein reellwertiger stochastischer Prozeß

$$\big(W(t)\big)_{t\in\mathscr{T}}, \qquad W(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \in \mathscr{T},$$

heißt eindimensionaler Wiener-Prozeß bzw. eindimensionale Brown'sche Bewegung, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(a) Es ist $W(0) = 0$ für fast alle $\omega \in \Omega$, d.h. es gilt

$$\mu\Big(\big\{\omega \in \Omega : \big(W(0)\big)(\omega) = 0\big\}\Big) = 1.$$

(b) Für fast alle $\omega \in \Omega$ ist der zugehörige Pfad stetig, d.h. es gilt

$$\mu\Big(\big\{\omega \in \Omega : \text{der zugehörige Pfad } \mathscr{T} \to \mathbb{R} : t \to \big(W(t)\big)(\omega) \text{ ist stetig}\big\}\Big) = 1\,.$$

(c) Für jedes $K \in \mathbb{N}$ und beliebige Zeitpunkte $t_1, \dots, t_K \in \mathscr{T}$ mit $t_1 < \cdots < t_K$ sind die reellwertigen Zufallsvariablen (Zuwächse, beachte $W(0) = 0$ fast sicher)

$$W(t_2) - W(t_1)\,, \dots, W(t_K) - W(t_{K-1})$$

unabhängig.

(d) Für beliebige Zeitpunkte $t_1, t_2 \in \mathscr{T}$ mit $t_1 < t_2$ ist $W(t_2) - W(t_1)$ eine normalverteilte reellwertige Zufallsvariable

$$W(t_2) - W(t_1) \sim N(0, t_2 - t_1)\,,$$

$$\mu \circ \big(W(t_2) - W(t_1)\big)^{-1} = N(0, t_2 - t_1) : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \int_A \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2(t_2 - t_1)}}\, \mathrm{d}\xi\,.$$

(ii) Ein d-dimensionaler stochastischer Prozeß

$$\big(W(t)\big)_{t \in \mathscr{T}}\,, \qquad W(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d : \omega \longmapsto \big(W(t)\big)(\omega) = \Big(\big(W_1(t)\big)(\omega), \dots, \big(W_d(t)\big)(\omega)\Big)^T\,,$$

heißt ein d-dimensionaler Wiener-Prozeß bzw. eine d-dimensionale Brown'sche Bewegung, wenn für alle $k \in \{1, \dots, d\}$ der durch die k-te Komponentenfunktion definierte stochastische Prozeß

$$\big(W_k(t)\big)_{t \in \mathscr{T}}\,, \qquad W_k(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

ein eindimensionaler Wiener-Prozeß ist und sämtliche Komponentenfunktionen unabhängig sind.

D.4 Illustrationen für Wiener-Prozesse

Simulation in MATLAB. Die folgenden Implementierungen illustrieren die Generierung von normalverteilten Zufallsvariablen und die Simulation eines mehrdimensionalen Wiener-Prozesses, vgl. auch SCHROPP (2014).

TEST_RANDOMNUMBERS.M

```
% Generation of normally distributed pseudo-random numbers
clear all
close all
K = 1000;
x = randn(1,K);
figure
plot(x,0,'b.')
figure
hist(x,K/10)
```

TEST_WIENERPROCESSBROWNIANMOTION.M

```
% Simulation of d-dimensional Wiener process (Brownian motion)
clear all
close all
d = 3;
K = 1000;
a = 2;
W = zeros(d,1);
dt = 1/K;
dW = sqrt(dt)*randn(d,K);
for k = 1:K
    W = W + dW(:,k);
    if d == 1
        plot(W(1),0,'b.')
        axis([-a a -a a])
    end
    if d == 2
        plot(W(1),W(2),'b.')
        axis([-a a -a a])
    end
    if d == 3
        plot3(W(1),W(2),W(3),'b.')
        axis([-a a -a a -a a])
    end
    grid on
    drawnow
end
```

Illustration (Binomialprozeß, Wiener-Prozeß). Die folgenden Überlegungen dienen zur Veranschaulichung einer eindimensionalen Brown'schen Bewegung; die Betrachtung eines speziellen Binomialprozesses führt bei Verfeinerung des Zeitinkrementes (heuristisch) auf einen zeitlich kontinuierlichen Prozeß mit den Eigeschaften eines Wiener-Prozesses.

(i) *Zufallsexperiment.* Betrachtet wird ein Zufallsexperiment mit zwei gleichwahrscheinlichen Ausgängen wie beispielsweise ein Münzwurf. Das Experiment wird innerhalb eines Zeitintervalles $[0, T]$ mit $T > 0$ insgesamt K-mal wiederholt, nämlich zu den Zeitpunkten

$$t_k = k\,\tfrac{T}{K}\,, \qquad k \in \{1, \dots, K\}\,.$$

Dem Ergebnis *Kopf* eines einzelnen Münzwurfes wird ein bestimmter Gewinn zugewiesen und entsprechend dem Ergebnis *Zahl* ein bestimmter Verlust

$$\text{Gewinn bei Ergebnis Kopf:} \quad \sqrt{\tfrac{T}{K}}\,, \qquad \text{Verlust bei Ergebnis Zahl:} \quad -\sqrt{\tfrac{T}{K}}\,.$$

Zur besseren Unterscheidung eines einzelnen Wurfes von mehrmaligen Würfen werden im Folgenden die Bezeichnungen Ω_0, μ_0 etc. verwendet.

(ii) *Zufallsvariable.* Die Zufallsvariable

$$Z : \Omega_0 = \big\{\text{Kopf}, \text{Zahl}\big\} \longrightarrow \left\{\sqrt{\tfrac{T}{K}}, -\sqrt{\tfrac{T}{K}}\right\} : \begin{cases} \omega_{01} = \text{Kopf} & \longmapsto \quad z_{01} = \sqrt{\tfrac{T}{K}}\,, \\ \omega_{02} = \text{Zahl} & \longmapsto \quad z_{02} = -\sqrt{\tfrac{T}{K}} = -\,z_{01}\,, \end{cases}$$

gibt den Gewinn bzw. Verlust bei einem einmaligen Münzwurf zum Zeitpunkt t_k mit $k \in \{1, \dots, K\}$ an; beachte, daß Z nicht von k abhängt. Entsprechend den relativen Häufigkeiten werden den Elementarereignissen *Kopf, Zahl* die Wahrscheinlichkeiten

$$\mu_0(\omega_{01}) = p_0 = \tfrac{1}{2}\,, \qquad \mu_0(\omega_{02}) = 1 - p_0 = \tfrac{1}{2}\,,$$

zugewiesen und somit ergeben sich als Erwartungswert und Varianz die Werte

$$E(Z) = \sum_{j=1}^{2} Z(\omega_{0j})\,\mu(\omega_{0j}) = z_{01}\,p_0 + z_{02}\,(1 - p_0) = z_{01}\,(2p_0 - 1) = 0\,,$$

$$E\big(Z^2\big) = \sum_{j=1}^{2} \big(Z(\omega_{0j})\big)^2\,\mu(\omega_{0j}) = z_{01}^2\,p_0 + z_{02}^2\,(1 - p_0) = z_{01}^2 = \tfrac{T}{K}\,,$$

$$V(Z) = E\big(Z^2\big) - \big(E(Z)\big)^2 = \tfrac{T}{K}\,.$$

(iii) *Zeitlich diskreter stochastischer Prozeß.* Es sei $k \in \{1,\dots,K\}$. Bestimmt man das Guthaben zum Zeitpunkt t_k, d.h. summiert man die Gewinne bzw. Verluste zu den Zeitpunkten $t_1,\dots,t_k$, definiert dies einen zeitlich diskreten reellwertigen stochastischen Prozeß[5]

$$\big(W(t_k)\big)_{k=1}^K\,, \qquad W(t_k) : \Omega_k = \Omega_0^k \longrightarrow \mathbb{R} : \omega = (\omega_1,\dots,\omega_k) \longmapsto \big(W(t_k)\big)(\omega) = \sum_{\ell=1}^k Z(\omega_\ell)\,.$$

Alle Elementarereignisse, d.h. sämtliche mögliche Kombinationen von Kopf und Zahl, werden als gleichwahrscheinlich angenommen (wegen $|\Omega_k| = 2\,|\Omega_{k-1}|$ für $k \in \{2,\dots,K\}$)

$$\mu_k(\omega) = \tfrac{1}{|\Omega_k|} = \tfrac{1}{2^k}\,, \qquad \omega \in \Omega_k\,;$$

[5] *Bemerkung.* Beispielsweise für $k = 1,2,3,4$ treten folgende Kombinationen und zugehörige Gesamtguthaben auf (mit Bezeichnungen K, Z für Kopf und Zahl)

$$W(t_1) : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} K & \longmapsto \quad \sqrt{\tfrac{T}{K}}\,, \\ Z & \longmapsto \quad -\sqrt{\tfrac{T}{K}}\,, \end{cases}$$

$$W(t_2) : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} (K,K) & \longmapsto \quad 2\sqrt{\tfrac{T}{K}}\,, \\ (K,Z),(Z,K) & \longmapsto \quad 0\,, \\ (Z,Z) & \longmapsto \quad -2\sqrt{\tfrac{T}{K}}\,, \end{cases}$$

$$W(t_3) : \Omega_3 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} (K,K,K) & \longmapsto \quad 3\sqrt{\tfrac{T}{K}}\,, \\ (K,K,Z),(K,Z,K),(Z,K,K) & \longmapsto \quad \sqrt{\tfrac{T}{K}}\,, \\ (Z,Z,K),(Z,K,Z),(K,Z,Z) & \longmapsto \quad -\sqrt{\tfrac{T}{K}}\,, \\ (Z,Z,Z) & \longmapsto \quad -3\sqrt{\tfrac{T}{K}}\,, \end{cases}$$

$$W(t_4) : \Omega_4 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} (K,K,K,K) & \longmapsto \quad 4\sqrt{\tfrac{T}{K}}\,, \\ (K,K,K,Z),(K,K,Z,K),(K,Z,K,K),(Z,K,K,K) & \longmapsto \quad 2\sqrt{\tfrac{T}{K}}\,, \\ (K,K,Z,Z),(K,Z,K,Z),(Z,K,K,Z),(K,Z,Z,K),(Z,K,Z,K),(Z,Z,K,K) & \longmapsto \quad 0\,, \\ (Z,Z,Z,K),(Z,Z,K,Z),(Z,K,Z,Z),(K,Z,Z,Z) & \longmapsto \quad -2\sqrt{\tfrac{T}{K}}\,, \\ (Z,Z,Z,Z) & \longmapsto \quad -4\sqrt{\tfrac{T}{K}}\,. \end{cases}$$

Direktes Abzählen zeigt somit die Relationen

$$\sum_{\omega\in\Omega_1} \big(W(t_1)\big)(\omega) = 0\,, \qquad \tfrac{1}{|\Omega_1|} \sum_{\omega\in\Omega_1} \Big(\big(W(t_1)\big)(\omega)\Big)^2 = \tfrac{1}{2}\,(1+1)\,\tfrac{T}{K} = \tfrac{T}{K} = t_1\,,$$

$$\sum_{\omega\in\Omega_2} \big(W(t_2)\big)(\omega) = 0\,, \qquad \tfrac{1}{|\Omega_2|} \sum_{\omega\in\Omega_2} \Big(\big(W(t_2)\big)(\omega)\Big)^2 = \tfrac{1}{4}\,(4+0+4)\,\tfrac{T}{K} = 2\,\tfrac{T}{K} = t_2\,,$$

$$\sum_{\omega\in\Omega_3} \big(W(t_3)\big)(\omega) = 0\,, \qquad \tfrac{1}{|\Omega_3|} \sum_{\omega\in\Omega_3} \Big(\big(W(t_3)\big)(\omega)\Big)^2 = \tfrac{1}{8}\,(9+3+3+9)\,\tfrac{T}{K} = t_3\,,$$

$$\sum_{\omega\in\Omega_4} \big(W(t_4)\big)(\omega) = 0\,, \qquad \tfrac{1}{|\Omega_4|} \sum_{\omega\in\Omega_4} \Big(\big(W(t_4)\big)(\omega)\Big)^2 = \tfrac{1}{16}\,(16+16+0+16+16)\,\tfrac{T}{K} = t_4\,.$$

Erwartungswert und Varianz berechnet man mit Hilfe von kombinatorischen Überlegungen basierend auf dem Prinzip der Induktion

$$E\big(W(t_k)\big) = \sum_{\omega\in\Omega_k} \big(W(t_k)\big)(\omega)\,\mu_k(\omega) = \tfrac{1}{|\Omega_k|} \sum_{\omega\in\Omega_k} \big(W(t_k)\big)(\omega) = 0\,,$$
$$E\Big(\big(W(t_k)\big)^2\Big) = \tfrac{1}{|\Omega_k|} \sum_{\omega\in\Omega_k} \Big(\big(W(t_k)\big)(\omega)\Big)^2 = k\,\tfrac{T}{K} = t_k\,, \qquad V\big(W(t_k)\big) = t_k\,,$$

vgl. auch Tabelle C.1.

(iv) *Erweiterung.* Um die Familie $(W(t_k))_{k=1}^K$ von Zufallsvariablen $W(t_k) : \Omega_k \to \mathbb{R}$ in die übliche Form zu bringen, ist die Angleichung der Definitionsbereiche $\Omega_1, \dots, \Omega_K$ notwendig. Etwa für $k = 2$ ist es naheliegend, Paare folgendermaßen auf K-Tupel zu erweitern

$$W(t_2) : \Omega = \Omega_K \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} (K, K, *, \dots, *) & \longmapsto \quad 2\sqrt{\tfrac{T}{K}}\,, \\ (K, Z, *, \dots, *), (Z, K, *, \dots, *) & \longmapsto \quad 0\,, \\ (Z, Z, *, \dots, *) & \longmapsto \quad -2\sqrt{\tfrac{T}{K}}\,, \end{cases}$$

was keine Änderung von Erwartungswert und Varianz bewirkt

$$|\Omega| = 2^K = |\Omega_2|\,|\Omega_{K-2}|\,,$$
$$\sum_{\omega\in\Omega} \big(W(t_2)\big)(\omega) = 0\,, \qquad \tfrac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega\in\Omega} \Big(\big(W(t_2)\big)(\omega)\Big)^2 = \tfrac{1}{2^K}\big(4\cdot 2^{K-2} + 0 + 4\cdot 2^{K-2}\big)\,\tfrac{T}{K} = t_2\,.$$

Analoge Überlegungen gelten für den allgemeinen Fall

$$W(t_k) : \Omega = \Omega_K \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad E\big(W(t_k)\big) = 0\,, \quad V\big(W(t_k)\big) = t_k\,, \qquad k \in \{1, \dots, K\}\,.$$

(v) *Zuwächse.* Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Zufallsvariablen erfüllt (dabei setzt man $W(t_0) = W(0) = 0$, mit $k \in \{1, \dots, K\}$)

$$W(t_k) - W(t_{k-1}) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega = (\omega_1, \dots, \omega_K) \longmapsto Z(\omega_k)\,,$$
$$E\big(W(t_k) - W(t_{k-1})\big) = 0\,, \qquad V\big(W(t_k) - W(t_{k-1})\big) = \tfrac{T}{K} = t_k - t_{k-1}\,;$$

allgemeiner gilt (mit $k \in \{1, \dots, K\}$ und $\ell \in \{1, \dots, k\}$)

$$W(t_k) - W(t_{k-\ell}) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega = (\omega_1, \dots, \omega_K) \longmapsto \sum_{j=k-\ell+1}^{k} Z(\omega_j)\,,$$
$$E\big(W(t_k) - W(t_{k-\ell})\big) = 0\,, \qquad V\big(W(t_k) - W(t_{k-\ell})\big) = \ell\,\tfrac{T}{K} = t_k - t_{k-\ell}\,.$$

(vi) *Simulation in* MATLAB. Die folgende Implementierung illustriert die Simulation eines Binomialprozesses in MATLAB (Variieren von K).

TEST_BINOMIALPROCESS.M

```
% Simulation of binomial process
clear all
close all
T = 1;
K = 1000;
t = T/K*[0:K];
% Generation of K numbers (Coin toss)
omega = randi(2,1,K);
Aux = 0;
for k = 1:K
    % Benefit (Head = 2)
    if omega(k) == 2
        Aux = Aux + sqrt(T/K);
    end
    % Deficit (Number = 1)
    if omega(k) == 1
        Aux = Aux - sqrt(T/K);
    end
    W(k) = Aux;
end
plot(t,[0,W],'b-')
grid on
```

(vii) *Zeitlich kontinuierlicher stochastischer Prozeß.* Für $K \gg 1$ dient der betrachtete zeitlich diskrete stochastische Prozeß zur Veranschaulichung eines eindimensionalen Wiener-Prozesses, d.h. eines zeitlich kontinuierlichen reellwertigen stochastischen Prozesses $(W(t))_{t\in[0,T]}$, dessen Pfade stetig sind und dessen Zuwächse unabhängig sowie normalverteilt sind; insbesondere gilt

$$E\big(W(t_2) - W(t_1)\big) = 0\,, \quad V\big(W(t_2) - W(t_1)\big) = t_2 - t_1\,, \qquad t_1, t_2 \in [0,T]\,, \quad t_1 < t_2\,.$$

Illustration (Brown'sche Bewegung). Die Bewegung von Teilchen wie etwa Pollen in Flüssigkeiten oder Gasen mit einer von der Temperatur abhängigen Intensität wurde vom Botaniker Robert Brown beobachtet; die Brown'sche Molekularbewegung wird häufig zur Veranschaulichung eines dreidimensionalen Wiener-Prozesses betrachtet. Im Zusammenhang mit stochastischen Prozessen wird der Begriff Brown'sche Bewegung üblicherweise als Synonym für Wiener-Prozeß verwendet.

(i) *Newton'sche Bewegungsgleichungen.* Zur Modellierung der Bewegung eines mikroskopischen Teilchens der Masse $m > 0$ in einer ruhenden Flüssigkeit wird angenommen, daß sich die Flüssigkeitsmoleküle ungeordnet bewegen, sehr kurze Krafteinwirkungen in Form von Stößen mit Flüssigkeitsmolekülen zur Bewegung des Teilchens führen und sehr viele Stöße des Teilchens mit Flüssigkeitsmolekülen stattfinden; weiters wird vorausgesetzt, daß Einflüsse wie Schwerkraft, Druck und Auftrieb vernachlässigt werden können. Entsprechend den Newton'schen Bewegungsgleichungen erfüllt die Koordinatenfunktion des Teilchens $q : [0,T] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto q(t)$ eine Differentialgleichung der Form

$$m\,q''(t) = F(t)\,, \qquad t \in (0,T)\,.$$

Dabei gibt die erste Zeitableitung q' die Geschwindigkeit bzw. $m\,q'$ den Impuls und die zweite Zeitableitung q'' die Beschleunigung an; die Funktion $F : [0,T] \to \mathbb{R}^3$ beschreibt die auf das Teilchen durch Stöße mit Flüssigkeitsmolekülen wirkenden Kräfte. Für ein Teilintervall $[t, t+\Delta t] \subset [0,T]$ ist die Zerlegung (mit $K_1 \in \mathbb{N}$ und $c_1 > 0$, bei äquidistanter Unterteilung entspricht $\frac{1}{c_1} = \frac{\Delta t}{K_1}$ dem Zeitinkrement)

$$t = t_0 < t_1 < \cdots < t_{K_1} = t + \Delta t\,, \qquad K_1 = c_1 \Delta t\,,$$

so gewählt, daß sie die Zeitpunkte einzelner Kraftstöße angibt.[6] Aus den Newton'schen Bewegungsgleichungen folgt

$$\begin{aligned} m\,q'(t+\Delta t) &= m\,q'(t) + \int_t^{t+\Delta t} m\,q''(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= m\,q'(t) + \int_t^{t+\Delta t} F(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= m\,q'(t) + \sum_{k=1}^{K_1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= m\,q'(t) + K_1 M + \sum_{k=1}^{K_1} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\tau)\,\mathrm{d}\tau - M \right); \end{aligned}$$

die Größe M bezeichnet den mittleren Impulsbeitrag

$$M = -\,c_2\,q'(t)\,.$$

(ii) *Zufallsvariablen.* Um ein einfaches mathematisches Modell in Form eines stochastischen Prozesses zu erhalten, werden zusätzliche Voraussetzungen an

$$\sum_{k=1}^{K_1} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\tau)\,\mathrm{d}\tau - M \right)$$

getroffen. Die Größen

$$z_k = (z_{k1}, z_{k2}, z_{k3})^T = \int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\tau)\,\mathrm{d}\tau - M : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3\,, \qquad k \in \{1, \dots, K_1\}\,,$$

[6] In Schropp (2014) sind als Beobachtungszeitraum $T = 100$ Sekunden sowie 10^8 Stöße pro Sekunde und somit eine Gesamtanzahl von 10^{10} Stößen angegeben; die Länge eines Teilintervalles ist in etwa $\Delta t = 10^{-2}$, was $K_1 = 10^6$ Stößen und $c_1 = 10^8$ entspricht. Abbildung 1.2 in Schropp (2014) veranschaulicht die auf die erste Komponente wirkende Kraft.

seien identisch verteilte dreidimensionale Zufallsvariablen, und sämtliche Komponentenfunktionen seien unabhängig

$$z_{k\ell} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad k \in \{1, \dots, K_1\}, \quad \ell \in \{1,2,3\}.$$

Für die Erwartungswert und Kovarianzmatrix gelte (wobei $\alpha > 0$)

$$E(z_k) = \big(E(z_{k1}), E(z_{k2}), E(z_{k3})\big)^T = 0 \in \mathbb{R}^3, \qquad k \in \{1, \dots, K_1\},$$

$$K(z_k) = \begin{pmatrix} V(z_{k1}) & K(z_{k1}, z_{k2}) & K(z_{k1}, z_{k3}) \\ K(z_{k1}, z_{k2}) & V(z_{k2}) & K(z_{k2}, z_{k3}) \\ K(z_{k1}, z_{k3}) & K(z_{k2}, z_{k3}) & V(z_{k3}) \end{pmatrix} = \alpha\, I \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad k \in \{1, \dots, K_1\};$$

der mittlere Impulsbeitrag wurde eingeführt, um Erwartungswert Null voraussetzen zu können. Für die dreidimensionale Zufallsvariable

$$Z_{K_1} = (Z_{K_1 1}, Z_{K_1 2}, Z_{K_1 3})^T = \tfrac{1}{\sqrt{\alpha K_1}} \sum_{k=1}^{K_1} z_k = \tfrac{1}{\sqrt{\alpha K_1}} \sum_{k=1}^{K_1} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\tau)\, \mathrm{d}\tau - M \right) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

ergeben sich die Relationen (verwende Linearität des Erwartungswertes sowie Unabhängigkeit der Komponentenfunktionen, mit $k, k_1, k_2 \in \{1, \dots, K_1\}$ und $\ell, \ell_1, \ell_2 \in \{1,2,3\}$)

$$E(z_{k\ell}) = 0, \qquad E(Z_{K_1 \ell}) = \tfrac{1}{\sqrt{\alpha K_1}} \sum_{k=1}^{K_1} E(z_{k\ell}) = 0,$$

$$Z_{K_1\ell_1}\, Z_{K_1\ell_2} = \tfrac{1}{\alpha K_1} \sum_{k_1,k_2=1}^{K_1} z_{k_1\ell_1} z_{k_2\ell_2}, \qquad E(z_{k_1\ell_1} z_{k_2\ell_2}) = V(z_{k_1\ell_1})\, \delta_{k_1k_2} \delta_{\ell_1\ell_2},$$

$$K(Z_{K_1\ell_1}, Z_{K_1\ell_2}) = E(Z_{K_1\ell_1} Z_{K_1\ell_2}) = \tfrac{1}{\alpha K_1} \sum_{k_1,k_2=1}^{K_1} E(z_{k_1\ell_1} z_{k_2\ell_2}) = \tfrac{1}{\alpha K_1} \sum_{k=1}^{K_1} V(z_{k\ell_1})\, \delta_{\ell_1\ell_2} = \delta_{\ell_1\ell_2},$$

und folglich erhält man für Erwartungswert und Kovarianzmatrix die Werte

$$E(Z_{K_1}) = 0 \in \mathbb{R}^3,$$

$$K(Z_{K_1}) = \begin{pmatrix} V(Z_{K_1 1}) & K(Z_{K_1 1}, Z_{K_1 2}) & K(Z_{K_1 1}, Z_{K_1 3}) \\ K(Z_{K_1 1}, Z_{K_1 2}) & V(Z_{K_1 2}) & K(Z_{K_1 2}, Z_{K_1 3}) \\ K(Z_{K_1 1}, Z_{K_1 3}) & K(Z_{K_1 2}, Z_{K_1 3}) & V(Z_{K_1 3}) \end{pmatrix} = I \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(iii) *Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes.* Nach dem zentralen Grenzwertsatz[7] ist die

[7] *Erinnerung.* Es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum. Für eine reellwertige Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ mit induziertem Maß $\mu_Z : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ ist die zugehörige Verteilungsfunktion durch

$$F_Z : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] : r \longmapsto \mu_Z\big((-\infty, r]\big) = \mu\big(\{\omega \in \Omega : Z(\omega) \in (-\infty, r]\}\big)$$

definiert.

Zentraler Grenzwertsatz. Der Grenzwertsatz von Lindeberg und Lévy besagt, daß die Summe von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit endlichem Erwartungswert und endlicher positiver Varianz

Zufallsvariable Z_{K_1} für $K_1 \to \infty$ standardnormalverteilt, und somit gilt (wegen $K_1 = c_1 \Delta t$)

$$Z_{K_1} = \sum_{k=1}^{K_1} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\tau)\, \mathrm{d}\tau - M \right) \overset{K_1 \to \infty}{\longrightarrow} Z \sim N(0, I)\,,$$
$$\sqrt{\alpha\, c_1 \Delta t}\, Z_{K_1} = \sum_{k=1}^{K_1} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\tau)\, \mathrm{d}\tau - M \right) \overset{K_1 \to \infty}{\longrightarrow} \sqrt{\alpha\, c_1 \Delta t}\, Z \sim N(0, \alpha\, c_1 \Delta t\, I)\,;$$

folglich erhält man (verwende $M = -\, c_2\, q'(t)$ sowie $K_1 M = -\, c_1 c_2 \Delta t\, q'(t)$)

$$m\, q'(t + \Delta t) = m\, q'(t) + K_1 M + \sum_{k=1}^{K_1} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\tau)\, \mathrm{d}\tau - M \right),$$
$$m\, q'(t + \Delta t) - m\, q'(t) + c_1 c_2 \Delta t\, q'(t) = \sum_{k=1}^{K_1} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\tau)\, \mathrm{d}\tau - M \right) \overset{K_1 \to \infty}{\longrightarrow} \sqrt{\alpha\, c_1 \Delta t}\, Z\,.$$

(iv) *Stochastischer Prozeß.* Für $K \in \mathbb{N}$ bezeichne

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_K = T$$

eine Zerlegung des gesamten Zeitintervalles $[0, T]$ und $(Z(t_k))_{k=1}^{K}$ eine Familie von unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen; ersetzt man in der zuvor abgeleiteten Relation für den Impuls folgende Größen

$$t \leftrightarrow t_k\,, \qquad \Delta t \leftrightarrow t_{k+1} - t_k\,, \qquad Z \leftrightarrow Z(t_k)\,,$$

---

asymptotisch normalverteilt ist. Genauer, bezeichnet $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten reellwertigen Zufallsvariablen

$$z_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad E(z_k) = E_0 \in \mathbb{R}\,, \quad V(z_k) = V_0 \in \mathbb{R}\,, \quad V_0 > 0\,, \qquad k \in \mathbb{N}\,,$$

so besitzt die K-te Partialsumme der Zufallsvariablen die Eigenschaften (mit $K \in \mathbb{N}$)

$$S_K = \sum_{k=1}^{K} z_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad E(S_K) = K E_0\,, \quad V(S_K) = K V_0^2 > 0\,;$$

bildet man die standardisierte Zufallsvariable

$$Z_K = \tfrac{1}{\sqrt{V(S_K)}} \big(S_K - E(S_K) \big) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

so besagt der zentrale Grenzwertsatz, daß die zugehörige Verteilungsfunktion für $K \to \infty$ punktweise gegen die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung konvergiert (Konvergenz in der Verteilung)

$$\forall\, r \in \mathbb{R}: \qquad \lim_{K \to \infty} \mu\big(\{ \omega \in \Omega : Z_K(\omega) \in (-\infty, r] \} \big) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{r} \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\, \mathrm{d}\xi\,.$$

Erinnerung. Für eine standardnormalverteilte reellwertige Zufallsvariable Z gilt

$$Z \sim N(0,1) \quad \Longrightarrow \quad \alpha + \beta Z \sim N\big(\alpha, \beta^2\big)\,.$$

führt dies auf einen zeitlich diskreten stochastischen Prozeß $(q(t_k))_{k=1}^K$ mit Werten in $\mathbb{R}^3$, welcher durch die Relation

$$m\,q'(t_{k+1}) - m\,q'(t_k) = -\,c_1 c_2\,(t_{k+1}-t_k)\,q'(t_k) + \sqrt{\alpha\,c_1(t_{k+1}-t_k)}\,Z(t_k)\,,$$
$$Z(t_k) \sim N(0,I)\,, \qquad k \in \{0,1,\dots,K-1\}\,,$$

definiert ist.

(v) *Spezialfall (Wiener-Prozeß).* In speziellen Situation, wo die Beiträge auf der linken Seite im Vergleich zu den Beiträgen auf der rechten Seite vernachlässigbar sind

$$c_1 c_2\,(t_{k+1}-t_k)\,q'(t_k) \approx \sqrt{\alpha\,c_1(t_{k+1}-t_k)}\,Z(t_k)\,, \qquad \sqrt{c_1}\,c_2\,\sqrt{t_{k+1}-t_k}\,q'(t_k) \approx \sqrt{\alpha}\,Z(t_k)\,,$$
$$q'(t_k) \approx \frac{\sqrt{\alpha}}{c_2\sqrt{c_1(t_{k+1}-t_k)}}\,Z(t_k)\,,$$

führt eine Quadraturapproximation mittels Linksregel auf die folgende Relation

$$q(t_{k+1}) - q(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} q'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \approx (t_{k+1}-t_k)\,q'(t_k) \approx \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{c_1}\,c_2}\,\sqrt{t_{k+1}-t_k}\,Z(t_k)\,.$$

Fordert man Gleichheit, und gibt man zum Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$ den Ursprung als Anfangsposition vor

$$\begin{cases} q(t_{k+1}) = q(t_k) + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{c_1}\,c_2}\,\sqrt{t_{k+1}-t_k}\,Z(t_k)\,, \qquad k \in \{0,1,\dots,K-1\}\,,\\ q(0) = 0\,, \end{cases}$$

sind die Koordinaten des Teilchens durch folgende Relation gegeben[8]

$$q(t_k) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{c_1}\,c_2}\,W(t_k)\,, \qquad W(t_k) = \sum_{\ell=0}^{k-1} \sqrt{t_{\ell+1}-t_\ell}\,Z(t_\ell)\,,$$
$$W(0) = 0\,, \qquad W(t_k) - W(t_{k-1}) = \sqrt{t_k - t_{k-1}}\,Z(t_{k-1}) \sim N\big(0,(t_k-t_{k-1})I\big)\,, \quad k \in \{1,\dots,K\}\,.$$

Der zeitlich diskrete stochastische Prozeß $(W(t_k))_{k=0}^K$ dient zur Illustration eines dreidimensionalen Wiener-Prozesses bzw. einer dreidimensionalen Brown'schen Bewegung.

---

[8] *Bemerkung.* Auflösen einer Rekursion der Form

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_k + b_k\,, \qquad k \in \{0,1,\dots,K-1\}\,,\\ a_0 = 0\,, \end{cases}$$

führt auf die folgende Darstellung

$$a_k = a_{k-1} + b_{k-1} = a_{k-2} + b_{k-2} + b_{k-1} = \dots = a_0 + b_0 + \dots + b_{k-2} + b_{k-1} = \sum_{\ell=0}^{k-1} b_\ell\,, \qquad k \in \{1,\dots,K\}\,.$$

(vi) *Bemerkung.* Man beachte, daß ein Wiener-Prozeß fast sicher an keiner Stelle differenzierbar ist; dies bestätigt auch die folgende Relation für die Varianz

$$V\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big) = t_{k+1} - t_k\,,$$
$$V\Big(\tfrac{W(t_{k+1})-W(t_k)}{t_{k+1}-t_k}\Big) = \tfrac{1}{(t_{k+1}-t_k)^2}\, V\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big) = \tfrac{1}{t_{k+1}-t_k} \overset{t_{k+1}-t_k\to 0}{\longrightarrow} \infty\,.$$

Der bei der Herleitung eines mathematischen Modelles oft gewählte Zugang, mittels des Grenzwertes $t_{k+1} - t_k \to 0$ von einer Differenzengleichung auf eine Differentialgleichung überzugehen, ist deshalb in der betrachteten Situation im klassischen Sinn *nicht* wohldefiniert (setze $c = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{c_1 c_2}}$ und verwende $W(t_{k+1}) - W(t_k) = \sqrt{t_{k+1} - t_k}\, Z(t_k)$)

$$q(t_{k+1}) = q(t_k) + c\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)\,, \qquad \frac{q(t_{k+1}) - q(t_k)}{t_{k+1} - t_k} = c\,\frac{W(t_{k+1}) - W(t_k)}{t_{k+1} - t_k}\,.$$

(vii) *Stochastisches Integral.* Um die Einführung des stochastischen Integrales zu illustrieren, wird eine Modifikation der zuvor angegebenen Relation betrachtet. Es bezeichne $t_0 \geq 0$ den vorgegebenen Anfangszeitpunkt und $q_0 \in \mathbb{R}^3$ die zugehörige Anfangsposition; für eine Zerlegung $t_0 < t_1 < \cdots < t_K = T$ des Zeitintervalles $\mathscr{T} = [t_0, T]$ gelte (mit $c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} q(t_{k+1}) = q(t_k) + c\big(q(t_k)\big)\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)\,, & k \in \{0, 1, \dots, K-1\}\,, \\ q(t_0) = q_0\,. \end{cases}$$

Durch Auflösen der Rekursion erhält man die folgende Darstellung für den Wert der Koordinatenfunktion zum Endzeitpunkt

$$q(T) = q_0 + \sum_{k=0}^{K-1} c\big(q(t_k)\big)\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)\,.$$

Unter geeigneten Voraussetzungen an die zeitlich diskreten Prozesse $(q(t_k))_{k=0}^K$, $(W(t_k))_{k=0}^K$ und die Koeffizientenfunktion $c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist es sinnvoll, die Grenzwerte für verschwindende Feinheit der Zerlegung zu bestimmen; die Riemann–Stieltjes-Summe führt in diesem Fall auf das stochastische Integral im Sinne von Itô, und es ergibt sich eine Integralgleichung für den zeitlich kontinuierlichen stochastischen Prozeß $(q(t))_{t\in\mathscr{T}}$ (Verwendung derselben Bezeichnungen für Grenzwerte)

$$\begin{aligned} \sup_{k\in\{0,1,\dots,K-1\}} (t_{k+1} - t_k) \to 0: \qquad & q(T) = q_0 + \sum_{k=0}^{K-1} c\big(q(t_k)\big)\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big) \\ \longrightarrow \quad & q(T) = q_0 + \int_{t_0}^{T} c\big(q(t)\big)\,\mathrm{d}W(t)\,; \end{aligned}$$

wie in der Einleitung erwähnt, ist dafür die kompakte symbolische Notation

$$\begin{cases} \mathrm{d}q(t) = c\big(q(t)\big)\,\mathrm{d}W(t)\,, & t \in \mathscr{T}\,, \\ q(t_0) = q_0\,, \end{cases}$$

gebräuchlich.

D.5 Integralbegriffe, Lebesgue-Räume

Integralbegriffe. Für ein besseres Verständnis des stochastischen Integrales ist es hilfreich, sich die wesentlichen Integralbegriffe Riemann-Integral und Lebesgue-Integral sowie die Erweiterungen Riemann–Stieltjes-Integral und Lebesgue–Stieltjes-Integral in Erinnerung zu rufen. Da an dieser Stelle keine präzisen Definitionen und keine näheren Informationen zu Existenzresultaten unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen an den Integranden und die Gewichtsfunktion angegeben werden, sei zusätzlich auf Literatur zur Riemann- und Lebesgue–Stieltjes-Integration verwiesen.

(i) *Situation.* Es seien $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei auf einem beschränkten Intervall definierte hinreichend reguläre reellwertige Funktionen.

(ii) *Riemann-Integral.* Für $K \in \mathbb{N}$ bezeichne

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_K = b$$

eine Zerlegung des Intervalles; die zugehörige Feinheit ist durch

$$\sup_{k \in \{0,1,\dots,K-1\}} (t_{k+1} - t_k)$$

gegeben. Die Approximation des Integranden durch Treppenfunktionen führt auf Riemann-Summen und speziell auf Obersummen und Untersummen

$$\sum_{k=0}^{K-1} f(\tau_{k+1})\,(t_{k+1} - t_k)\,, \qquad \tau_{k+1} \in [t_k, t_{k+1}]\,, \quad k \in \{0, 1, \dots, K-1\}\,,$$

$$\sum_{k=0}^{K-1} \sup\big\{f(t) : t \in [t_k, t_{k+1}]\big\}\,(t_{k+1} - t_k)\,, \qquad \sum_{k=0}^{K-1} \inf\big\{f(t) : t \in [t_k, t_{k+1}]\big\}\,(t_{k+1} - t_k)\,;$$

als Grenzwert bei verschwindender Feinheit ergibt sich das Riemann-Integral

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

(iii) *Riemann–Stieltjes-Integral.* Läßt man bei der Approximation durch Riemann-Summen eine zusätzliche Gewichtung mittels einer Funktion g zu

$$\sum_{k=0}^{K-1} f(\tau_{k+1})\,\big(g(t_{k+1}) - g(t_k)\big)\,, \qquad \tau_{k+1} \in [t_k, t_{k+1}]\,, \quad k \in \{0, 1, \dots, K-1\}\,,$$

$$\sum_{k=0}^{K-1} \sup\big\{f(t) : t \in [t_k, t_{k+1}]\big\}\,\big(g(t_{k+1}) - g(t_k)\big)\,,$$

$$\sum_{k=0}^{K-1} \inf\big\{f(t) : t \in [t_k, t_{k+1}]\big\}\,\big(g(t_{k+1}) - g(t_k)\big)\,,$$

so führt dies auf das Riemann–Stieltjes-Integral

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}g(t)\,;$$

wie üblich betrachtet man speziell Stieltjes-Obersummen und Stieltjes-Untersummen. Offensichtlich ergibt sich im Spezialfall der Identität $g:[a,b]\to\mathbb{R}:t\mapsto t$ das Riemann-Integral.

(iv) *Lebesgue-Integral.* Das Lebesgue-Integral wird zunächst für einfache Funktionen erklärt (mit Bezeichnung χ_A für die charakteristische Funktion einer meßbaren Menge, Eigenschaft der Linearität wird vorausgesetzt)

$$\sum_{k=1}^{K}\alpha_k\,\chi_{A_k}(t)\,,$$

$$\int_a^b \chi_{A_k}(t)\,\mathrm{d}\mu(t)=\mu(A_k)\,,\qquad \int_a^b\sum_{k=1}^{K}\alpha_k\,\chi_{A_k}(t)\,\mathrm{d}\mu(t)=\sum_{k=1}^{K}\alpha_k\,\mu(A_k)\,;$$

bei Approximation des Integranden durch einfache Funktionen ergibt sich das Lebesgue-Integral

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\,.$$

(v) *Lebesgue–Stieltjes-Integral.* Falls das betrachtete Maß durch Funktionswerte der Gewichtsfunktion definiert ist, beispielsweise für ein beschränktes offenes Intervall durch die Relation

$$\mu_g\big((c,d)\big)=\lim_{t\to d_-}g(t)-\lim_{t\to c_+}g(t)\,,$$

erhält man das Lebesgue–Stieltjes-Integral

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\mu_g(t)\,;$$

im Spezialfall der Identität $g:[a,b]\to\mathbb{R}:t\mapsto t$ entspricht μ_g dem Lebesgue-Maß und somit das Lebesgue–Stieltjes-Integral dem Lebesgue-Integral.

Lebesgue-Räume. Im Folgenden wird an die Konstruktion und wesentliche Eigenschaften der Lebesgue-Räume erinnert; detailierte Informationen zum relevanten Spezialfall $L^p(\mathbb{R}^d)$ sind beispielsweise in KANZOW (2012) angegeben.

(i) *Konstruktion.* Für einen Exponenten $p\in[1,\infty)$ bzw. $p=\infty$ und einen Maßraum $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ bezeichnet

$$\mathscr{L}^p(\Omega)=\left\{f:\Omega\to\mathbb{R}\text{ meßbar und }\int_\Omega\big|f(\omega)\big|^p\,\mathrm{d}\mu(\omega)<\infty\right\},\qquad p\in[1,\infty)\,,$$

$$\mathscr{L}^\infty(\Omega)=\left\{f:\Omega\to\mathbb{R}\text{ meßbar und }\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega}\big|f(\omega)\big|=\inf_{\substack{A_0\in\mathscr{A}\\ \mu(A_0)=0}}\ \sup_{\omega\in\Omega\setminus A_0}\big|f(\omega)\big|<\infty\right\},$$

den reellen Vektorraum der auf Ω definierten p-fach integrierbaren bzw. im Wesentlichen beschränkten reellwertigen Funktionen. Die Funktion

$$\begin{aligned} |\cdot|_{\mathscr{L}^p} : \mathscr{L}^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : f \longmapsto \big|f\big|_{\mathscr{L}^p} = \left(\int_\Omega \big|f(\omega)\big|^p \,\mathrm{d}\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad p \in [1,\infty), \\ |\cdot|_{\mathscr{L}^\infty} : \mathscr{L}^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : f \longmapsto \big|f\big|_{\mathscr{L}^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \big|f(\omega)\big|, \end{aligned}$$

erfüllt die Eigenschaften positiv-semidefinit, homogen und subadditiv (Herleitung der Dreiecksungleichung bzw. Minkowski-Ungleichung mittels der Hölder-Ungleichung)

$$\begin{aligned} \forall\, f \in \mathscr{L}^p(\Omega) : \qquad & \big|f\big|_{\mathscr{L}^p} \geq 0\,, \\ \forall\, c \in \mathbb{R} \quad \forall\, f \in \mathscr{L}^p(\Omega) : \qquad & \big|cf\big|_{\mathscr{L}^p} = |c|\,\big|f\big|_{\mathscr{L}^p}\,, \\ \forall\, f_1, f_2 \in \mathscr{L}^p(\Omega) : \qquad & \big|f_1 + f_2\big|_{\mathscr{L}^p} \leq |f_1|_{\mathscr{L}^p} + |f_2|_{\mathscr{L}^p}\,, \end{aligned}$$

und definiert somit eine Halbnorm auf $\mathscr{L}^p(\Omega)$. Um einen normierten Raum zu erhalten, identifiziert man Funktionen, die fast überall übereinstimmen, und geht auf Äquivalenzklassen und den zugehörigen Quotientenraum über

$$\begin{gathered} \big[f_1\big] = \big[f_2\big] \quad \Longleftrightarrow \quad f_1 - f_2 = 0 \ \text{ fast überall bezüglich } \mu\,, \qquad f_1, f_2 \in \mathscr{L}^p(\Omega)\,, \\ L^p(\Omega) = \mathscr{L}^p(\Omega) \big/ \big\{f \in \mathscr{L}^p(\Omega) : \big|f\big|_{\mathscr{L}^p} = 0\big\}\,. \end{gathered}$$

Die Werte der mittels der $\mathscr{L}^p$-Halbnorm definierten Funktion

$$\|\cdot\|_{L^p} : L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : \big[f\big] \longmapsto \big\|\big[f\big]\big\|_{L^p} = \big|f\big|_{\mathscr{L}^p}$$

sind unabhängig von den gewählten Repräsentanten; die Funktion $\|\cdot\|_{L^p}$ erfüllt die Normeigenschaften und ist insbesondere positiv-definit

$$\forall\, f \in L^p(\Omega) : \qquad \|f\|_{L^p} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0\,.$$

Insgesamt folgt daraus, daß die Lebesgue-Räume normierte Räume sind

$$\big(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p}\big), \qquad p \in [1,\infty]\,.$$

(ii) *Eigenschaften.* Für jeden Exponenten $p \in [1,\infty]$ ist der zugehörige Lebesgue-Raum $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ vollständig und daher ein Banach-Raum; im Spezialfall $(L^2(\Omega), (\cdot|\cdot)_{L^2}, \|\cdot\|_{L^2})$ ergibt sich ein Hilbert-Raum

$$f_1, f_2 \in L^2(\Omega) : \qquad \big(f_1\big|f_2\big)_{L^2} = \int_\Omega f_1(\omega)\, f_2(\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega)\,.$$

Falls Ω ein separabler Maßraum[9] ist, führt $L^p(\Omega)$ für Exponenten $p \in [1,\infty)$ auf einen separablen Banach-Raum; der Banach-Raum $L^\infty(\Omega)$ ist im Allgemeinen nicht separabel.

[9] *Bemerkung.* Ein Maßraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ heißt separabel, wenn die zugehörige σ-Algebra $\mathscr{A}$ durch abzählbar viele Mengen erzeugt wird. Der euklidische Raum versehen mit der Borel-σ-Algebra ist separabel, da die Borel-σ-Algebra durch die kartesischen Produkte offener Intervalle mit rationalen Endpunkten erzeugt wird

$$\Omega = \mathbb{R}^d\,, \qquad \mathscr{B}\big(\mathbb{R}^d\big) = \sigma\left(\left\{\prod_{j=1}^d (a_j, b_j) \subset \mathbb{R} : a_j, b_j \in \mathbb{Q}, j \in \{1,\dots,d\}\right\}\right).$$

Für jeden Exponenten $p \in (1,\infty)$ ist der zugehörige Lebesgue-Raum $L^p(\Omega)$ reflexiv; dies folgt aus dem Resultat, daß die Funktion

$$L^{p^*}(\Omega) \longrightarrow \big(L^p(\Omega)\big)^* : f \longmapsto \big(f\big|\cdot\big)_{L^2}, \qquad p, p^* \in (1,\infty), \quad \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{p^*} = 1,$$

ein isometrischer Isomorphismus ist und somit die Identifikation

$$\big(L^p(\Omega)\big)^* \cong L^{p^*}(\Omega), \qquad p, p^* \in (1,\infty), \quad \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{p^*} = 1,$$

gerechtfertigt ist. Im Gegensatz dazu sind die Lebesgue-Räume $L^1(\Omega)$ und $L^\infty(\Omega)$ im Allgemeinen nicht reflexiv.

(iii) *Spezialfälle.* Betrachtet man speziell einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, so ist der Lebesgue-Raum $L^1(\Omega)$ durch

$$L^1(\Omega) = \left\{ Z : \Omega \to \mathbb{R} \text{ meßbar und } E(|Z|) = \int_\Omega \big|Z(\omega)\big| \,\mathrm{d}\mu(\omega) < \infty \right\}$$

gegeben. Der Lebesgue-Raum $L^2(\Omega)$ entspricht dem Hilbert-Raum der auf Ω definierten quadratintegrierbaren reellwertigen Zufallsvariablen (bei zusätzliche Identifikation von fast überall übereinstimmenden Funktionen)

$$L^2(\Omega) = \left\{ Z : \Omega \to \mathbb{R} \text{ meßbar und } \int_\Omega \big(Z(\omega)\big)^2 \,\mathrm{d}\mu(\omega) < \infty \right\};$$

insbesondere sind Erwartungswert und Varianz wohldefiniert, denn es gilt (verwende Hölder-Ungleichung und $\mu(\Omega) = 1$, beachte zudem $Z \in L^1(\Omega)$)

$$\begin{aligned} Z \in L^2(\Omega) \quad &\Longrightarrow \quad E\big(Z^2\big) = \int_\Omega \big(Z(\omega)\big)^2 \,\mathrm{d}\mu(\omega) < \infty \\ &\Longrightarrow \quad E(Z) = \int_\Omega Z(\omega) \,\mathrm{d}\mu(\omega) \leq \sqrt{\mu(\Omega)} \sqrt{\int_\Omega \big(Z(\omega)\big)^2 \,\mathrm{d}\mu(\omega)} < \infty. \end{aligned}$$

Vorbemerkung. Es sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und es gelte $p \in [1,\infty)$. Der Lebesgue-Raum $L^p(\Omega)$ umfaßt alle auf Ω definierten p-fach integrierbaren reellwertigen Zufallsvariablen (zusätzliche Identifikation von fast überall übereinstimmenden Funktionen)

$$L^p(\Omega) = \left\{ Z : \Omega \to \mathbb{R} \text{ meßbar und } \int_\Omega \big|Z(\omega)\big|^p \,\mathrm{d}\mu(\omega) < \infty \right\}.$$

Wählt man speziell ein Intervall $\mathscr{T} = [t_0, T] \subset \mathbb{R}$ mit $T > t_0$, so gilt entsprechend (üblicherweise bezüglich der Borel-σ-Algebra und dem Lebesgue–Borel-Maß bzw. mittels Vervollständigung bezüglich der σ-Algebra der Lebesgue-meßbaren Mengen und dem Lebesgue-Maß)

$$L^p(\mathscr{T}) = \left\{ Z : \mathscr{T} \to \mathbb{R} \text{ meßbar und } \int_{t_0}^T \big|Z(t)\big|^p \,\mathrm{d}t < \infty \right\}.$$

Man beachte, daß durch einen zeitlich kontinuierlichen reellwertigen stochastischen Prozeß

$$\big(Z(t)\big)_{t\in\mathscr{T}}, \qquad Z(t):\Omega\longrightarrow\mathbb{R}:\omega\longmapsto\big(Z(t)\big)(\omega), \quad t\in\mathscr{T},$$

eine reellwertige Zufallsvariable definiert wird (Betrachtung der Produkt-σ-Algebra, zur Vereinfachung der Notation wird dieselbe Bezeichnung verwendet)

$$Z:\Omega\times\mathscr{T}\longrightarrow\mathbb{R}:(\omega,t)\longmapsto\big(Z(t)\big)(\omega).$$

Im Zusammenhang mit der Einführung des stochastischen Integrales ist die Menge der pfadweise p-fach auf $\mathscr{T}$ integrierbaren Prozesse wesentlich

$$\begin{aligned}
L^p_\omega(\Omega) &= \left\{Z:\Omega\times\mathscr{T}\to\mathbb{R}\ \text{meßbar und}\ \mu\left(\left\{\omega\in\Omega:\int_{t_0}^T\big|Z(\omega,t)\big|^p\,\mathrm{d}t<\infty\right\}\right)=1\right\}\\
&= \left\{\big(Z(t)\big)_{t\in\mathscr{T}}\ \text{auf}\ \Omega\ \text{definierter reellwertiger stochastischer Prozeß mit}\right.\\
&\qquad\qquad \left.\mu\left(\left\{\omega\in\Omega:\int_{t_0}^T\big|\big(Z(t)\big)(\omega)\big|^p\,\mathrm{d}t<\infty\right\}\right)=1\right\};
\end{aligned}$$

genauer gilt folgende Definition.

Pfadweise L^p-Prozesse. Es bezeichne $(\Omega,\mathscr{A},(\mathscr{A}(t))_{t\in\mathscr{T}},\mu)$ einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathscr{T}=[t_0,T]\subset\mathbb{R}$ ein Intervall; weiters gelte $p\in[1,\infty)$. Die Menge der pfadweisen L^p-Prozesse ist wie folgt definiert

$$\begin{aligned}
L^p_\omega(\Omega) = \left\{\big(Z(t)\big)_{t\in\mathscr{T}}\right.&\ \text{auf}\ \Omega\ \text{definierter adaptierter reellwertiger stochastischer Prozeß mit}\\
&\left.\mu\left(\left\{\omega\in\Omega:\int_{t_0}^T\big|\big(Z(t)\big)(\omega)\big|^p\,\mathrm{d}t<\infty\right\}\right)=1\right\}.
\end{aligned}$$

D.6 Konstruktion des Itô-Integrales

Situation. Es bezeichne $\mathscr{T} = [t_0, T]$ mit $0 \leq t_0 < T$ das betrachtete Zeitintervall und $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum. Weiters bezeichne $(W(t))_{t\in\mathscr{T}}$ einen auf Ω definierten eindimensionalen Wiener-Prozeß und $(Z(t))_{t\in\mathscr{T}}$ einen auf Ω definierten reellwertigen stochastischen Prozeß.[10]

Ziel. Im Folgenden wird die Konstruktion des stochastischen Integrales

$$\int_{t_0}^{T} Z(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

im Sinne von Itô beschrieben. Die grundlegende Idee ist es, den Integranden durch Funktionen einfacher Struktur zu approximieren und das Integral entsprechend dem Riemann–Stieltjes-Integral zu definieren (wobei $K \in \mathbb{N}$ und $t_0 < t_1 < \cdots < t_K = T$)

$$Z(t) \approx \sum_{k=0}^{K-1} Z(t_k)\,\chi_{[t_k,t_{k+1})}(t) + Z(t_K)\,\chi_{\{t_K\}}(t)\,, \quad t \in \mathscr{T}\,, \qquad \int_{t_k}^{t_{k+1}} 1\,\mathrm{d}W(t) = W(t_{k+1}) - W(t_k)\,;$$

wie zuvor bezeichnet χ_A die charakteristische Funktion einer Menge A.

Konstruktion (Itô-Integral). Die folgenden heuristischen Überlegungen zur Konstruktion des Itô-Integrales werden in einem späteren Abschnitt präzisiert. Für $K \in \mathbb{N}$ wird eine Zerlegung $t_0 < t_1 < \cdots < t_K = T$ des Zeitintervalles betrachtet.

(i) *Vorbemerkung.* Betrachtet man das spezielle Riemann–Stieltjes-Integral

$$f = 1: \qquad \int_{t_0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}g(t) = \int_{t_0}^{T} 1\,\mathrm{d}g(t)\,,$$

so ist offensichtlich, daß sich die Stieltjes-Obersumme und entsprechend die Stieltjes-Untersumme zur Zerlegung $t_0 < t_1 < \cdots < t_K = T$ folgendermaßen vereinfachen (Teleskop-Summe)

$$\sum_{k=0}^{K-1} \sup\big\{f(t) : t \in [t_k, t_{k+1}]\big\}\big(g(t_{k+1}) - g(t_k)\big) = \sum_{k=0}^{K-1} \big(g(t_{k+1}) - g(t_k)\big) = g(T) - g(t_0)\,;$$

somit ist der Wert des Riemann–Stieltjes-Integrales gleich

$$\int_{t_0}^{T} 1\,\mathrm{d}g(t) = g(T) - g(t_0)\,.$$

---

[10] *Voraussetzungen.* In Schropp (2014) wird bei der Einführung des Itô-Integrales vorausgesetzt, daß $(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{A}(t))_{t\in\mathscr{T}}, \mu)$ ein mit einer vollständigen Filtrierung versehener Wahrscheinlichkeitsraum ist. Weiters wird angenommen, daß der eindimensionale Wiener-Prozeß $(W(t))_{t\in\mathscr{T}}$ adaptiert ist und für alle Zeitpunkte $t_1, t_2 \in \mathscr{T}$ mit $t_1 < t_2$ der Zuwachs $W(t_2) - W(t_1)$ unabhängig von $\mathscr{A}(t_1)$ ist. Außerdem sei der auf Ω definierte reellwertige stochastische Prozeß $(Z(t))_{t\in\mathscr{T}}$ adaptiert, und die Funktion $Z : \Omega \times \mathscr{T} \to \mathbb{R} : (\omega, t) \mapsto (Z(t))(\omega)$ erfülle die Bedingung $Z \in L^2(\Omega \times \mathscr{T})$. Vergleiche dazu auch Deck (2006).

(ii) *Konstanter Integrand.* In Übereinstimmung mit diesen Überlegungen wird das stochastische Integral für konstante Integranden durch

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} c\,\mathrm{d}W(t) = c\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)\,, \quad k \in \{1,\dots,K\}\,,$$
$$\int_{t_0}^{T} c\,\mathrm{d}W(t) = c\big(W(T) - W(t_0)\big)\,,$$

definiert.

(iii) *Treppenfunktion.* Für eine fixierte Zerlegung $t_0 < t_1 < \cdots < t_K = T$ sei $(Z(t_k))_{k=0}^{K}$ ein auf Ω definierter zeitlich diskreter reellwertiger stochastischer Prozeß. Betrachtet man als Integrand die zugehörige Treppenfunktion der Form[11]

$$Z(t) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto \big(Z(t)\big)(\omega) = \sum_{k=0}^{K-1} \big(Z(t_k)\big)(\omega)\,\chi_{[t_k,t_{k+1})}(t) + \big(Z(t_K)\big)(\omega)\,\chi_{\{t_K\}}(t)\,, \quad t \in \mathscr{T}\,,$$

so ist es naheliegend, das stochastische Integral durch (Eigenschaft der Linearität wird vorausgesetzt, kein Beitrag des letzten Summanden)

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{T} \big(Z(t)\big)(\omega)\,\mathrm{d}\big(W(t)\big)(\omega) &= \sum_{k=0}^{K-1} \big(Z(t_k)\big)(\omega) \int_{t_0}^{T} \chi_{[t_k,t_{k+1})}(t)\,\mathrm{d}\big(W(t)\big)(\omega)\\
&= \sum_{k=0}^{K-1} \big(Z(t_k)\big)(\omega) \int_{t_k}^{t_{k+1}} 1\,\mathrm{d}\big(W(t)\big)(\omega)\\
&= \sum_{k=0}^{K-1} \big(Z(t_k)\big)(\omega)\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)(\omega)\,, \qquad \omega \in \Omega\,,
\end{aligned}$$

zu definieren; die gebräuchliche Kurzschreibweise ist

$$\int_{t_0}^{T} Z(t)\,\mathrm{d}W(t) = \sum_{k=0}^{K-1} Z(t_k)\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)\,.$$

(iv) *Itô-Integral.* Zur Einführung des Itô-Integrales nützt man die Tatsache, daß für Integranden $Z \in L^2(\Omega \times \mathscr{T})$ eine Folge von approximierenden Treppenfunktionen der zuvor

[11] *Bemerkung.* Fordert man für die betrachteten Treppenfunktion die Form

$$Z(t) = \sum_{k=0}^{K-1} z(t_k)\,\chi_{[t_k,t_{k+1})}(t) + z(t_K)\,\chi_{\{t_K\}}(t)\,, \qquad t \in \mathscr{T}\,,$$

so folgt insbesondere $Z(t_k) = z(t_k)$ für $k \in \{0,1,\dots,K\}$. Eine Alternative wie etwa

$$\widetilde{Z}(t) = Z(t_0)\,\chi_{\{t_0\}}(t) + \sum_{k=0}^{K-1} Z(t_k)\,\chi_{(t_k,t_{k+1}]}(t)\,, \qquad t \in \mathscr{T}\,,$$

würde auf denselben Wert des Integrales führen; in diesem Fall gilt jedoch $\widetilde{Z}(t_{k+1}) = Z(t_k)$ für $k \in \{0,1,\dots,K-1\}$.

angegebenen Struktur existiert (wobei $t \in \mathscr{T}$)

$$Z^{(\ell)} \stackrel{\ell\to\infty}{\longrightarrow} Z \quad \text{in } L^2\big(\Omega\times\mathscr{T}\big)\,, \qquad Z^{(\ell)}(t) = \sum_{k=0}^{K-1} Z^{(\ell)}(t_k)\,\chi_{[t_k,t_{k+1})}(t) + Z^{(\ell)}(t_K)\,\chi_{\{t_K\}}(t)\,,$$

und die zugehörige Folge von stochastischen Integralen

$$\left(\int_{t_0}^T Z^{(\ell)}(t)\,\mathrm{d}W(t)\right)_{\ell\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{K-1} Z^{(\ell)}(t_k)\big(W(t_{k+1})-W(t_k)\big)\right)_{\ell\in\mathbb{N}}$$

eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega)$ bildet; die Vollständigkeit von $L^2(\Omega)$ sichert die Existenz eines Grenzwertes, welcher als Itô-Integral bezeichnet wird

$$\int_{t_0}^T Z^{(\ell)}(t)\,\mathrm{d}W(t) \stackrel{\ell\to\infty}{\longrightarrow} \int_{t_0}^T Z(t)\,\mathrm{d}W(t) \quad \text{in } L^2(\Omega)\,.$$

(v) *Erweiterung des Itô-Integrales.* Es ist wesentlich, die an den Integranden gestellte einschränkende Bedingung $Z \in L^2(\Omega\times\mathscr{T})$ durch die schwächere Voraussetzung $Z \in L^2_\omega(\mathscr{T})$ zu ersetzen. Dazu betrachtet man für $Z \in L^2_\omega(\mathscr{T})$ eine im stochastischen Sinn konvergente Folge von Treppenfunktionen[12]

$$\begin{aligned} &\mu-\lim_{\ell\to\infty}\int_{t_0}^T \big(Z^{(\ell)}(t)-Z(t)\big)^2\,\mathrm{d}t = 0 \\ \iff\quad &\forall\varepsilon>0: \quad \lim_{\ell\to\infty}\mu\left(\left\{\omega\in\Omega: \int_{t_0}^T \Big(\big(Z^{(\ell)}(t)-Z(t)\big)(\omega)\Big)^2\,\mathrm{d}t > \varepsilon\right\}\right) = 0 \end{aligned}$$

und erklärt das Itô-Integral wie folgt

$$\int_{t_0}^T Z(t)\,\mathrm{d}W(t) = \mu-\lim_{\ell\to\infty}\int_{t_0}^T Z^{(\ell)}(t)\,\mathrm{d}W(t)\,.$$

Eigenschaften (Itô-Integral). Das Itô-Integral einer Treppenfunktion definiert eine reellwertige Zufallsvariable

$$\begin{aligned} Z(t) &= \sum_{k=0}^{K-1} Z(t_k)\,\chi_{[t_k,t_{k+1})}(t) + Z(t_K)\,\chi_{\{t_K\}}(t) : \Omega\longrightarrow\mathbb{R}\,, \qquad t\in\mathscr{T}\,, \\ \int_{t_0}^T Z(t)\,\mathrm{d}W(t) &= \sum_{k=0}^{K-1} Z(t_k)\big(W(t_{k+1})-W(t_k)\big) : \Omega\longrightarrow\mathbb{R}; \end{aligned}$$

[12] *Erinnerung.* Es bezeichne $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum. Für eine Folge von Zufallsvariablen $(Z^{(\ell)})_{\ell\in\mathbb{N}}$ mit $Z^{(\ell)}:\Omega\to\mathbb{R}$ spricht man von stochastischer Konvergenz gegen eine Zufallsvariable $Z:\Omega\to\mathbb{R}$, wenn die Bedingung

$$\forall\varepsilon>0: \qquad \lim_{\ell\to\infty}\mu\Big(\big\{\omega\in\Omega: \big|Z^{(\ell)}(\omega)-Z(\omega)\big|>\varepsilon\big\}\Big) = 0$$

erfüllt ist; die übliche Schreibweise ist in diesem Fall die folgende

$$\mu-\lim_{\ell\to\infty} Z^{(\ell)} = Z\,.$$

unter der Annahme, daß die Koeffizienten quadratintegrierbar sind

$$Z(t_k) \in L^2(\Omega)\,, \qquad k \in \{0,1,\dots,K-1\}\,,$$

sind Erwartungswert und Varianz wohldefiniert und durch

$$E\Big(\int_{t_0}^{T} Z(t)\,\mathrm{d}W(t)\Big) = 0\,, \qquad V\Big(\int_{t_0}^{T} Z(t)\,\mathrm{d}W(t)\Big) = \int_{t_0}^{T} E\Big(\big(Z(t)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}t\,,$$

gegeben. Da die Konstruktion des stochastischen Integrales im Sinne von Itô auf der Approximation des Integranden $Z \in L^2_\omega(\mathscr{T})$ durch Treppenfunktionen beruht, übertragen sich die Eigenschaft der Linearität und insbesondere die angegebenen Relationen für Erwartungswert und Varianz auf den allgemeinen Fall.
Erklärung. Zur Herleitung der Resultate für eine Treppenfunktion der Form

$$Z(t) = \sum_{k=0}^{K-1} Z(t_k)\,\chi_{[t_k,t_{k+1})}(t) + Z(t_K)\,\chi_{\{t_K\}}(t)\,, \qquad t \in \mathscr{T}\,,$$

werden die folgenden Überlegungen genützt; wesentlich sind die Eigenschaften eines eindimensionalen Wiener-Prozesses sowie die Unabhängigkeit gewisser Zufallsvariablen.

(i) *Vorüberlegungen.* Laut der Definition eines eindimensionalen Wiener-Prozesses sind alle Zuwächse normalverteilt, und insbesondere erfüllen Erwartungswert und Varianz die Relationen (für $k \in \{0,1,\dots,K-1\}$)

$$E\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big) = 0\,, \qquad E\Big(\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)^2\Big) = V\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big) = t_{k+1} - t_k\,.$$

Wesentlich ist die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $Z(t_k)$ und $W(t_{k+1}) - W(t_k)$ für $k \in \{0,1,\dots,K-1\}$, woraus sich die Identität

$$E\Big(Z(t_k)\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)\Big) = E\big(Z(t_k)\big)\,E\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big) = 0$$

ergibt; man beachte, daß mittels der Hölder-Ungleichung bzw. der Cauchy–Schwarz-Ungleichung die Wohldefiniertheit des Erwartungswertes folgt

$$Z(t_k) \in L^2(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad Z(t_k) \in L^1(\Omega)\,, \quad E\big(Z(t_k)\big) < \infty\,,$$

$$E\big(Z(t_k)\big) = \int_\Omega \big(Z(t_k)\big)(\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega) \le \sqrt{\mu(\Omega)}\,\sqrt{\int_\Omega \Big(\big(Z(t_k)\big)^2\Big)(\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega)} = \sqrt{E\Big(\big(Z(t_k)\big)^2\Big)} < \infty\,.$$

Weiters nützt man die Unabhängigkeit der Quadrate

$$\begin{aligned} E\Big(\big(Z(t_k)\big)^2\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)^2\Big) &= E\Big(\big(Z(t_k)\big)^2\Big)\,E\Big(\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)^2\Big) \\ &= E\Big(\big(Z(t_k)\big)^2\Big)\,(t_{k+1} - t_k) < \infty\,. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Hölder-Ungleichung zeigt man die Wohldefiniertheit von (zur Vereinfachung der Notation werden die Argumente nicht angegeben)

$$
\begin{aligned}
&E\Big(Z(t_k)\,Z(t_\ell)\,\big(W(t_{k+1})-W(t_k)\big)\Big)\\
&\quad= \int_\Omega Z(t_k)\,Z(t_\ell)\,\big(W(t_{k+1})-W(t_k)\big)\,\mathrm{d}\mu\\
&\quad\le \sqrt{\int_\Omega \big(Z(t_\ell)\big)^2\,\mathrm{d}\mu}\,\sqrt{\int_\Omega \big(Z(t_k)\big)^2\,\big(W(t_{k+1})-W(t_k)\big)^2\,\mathrm{d}\mu}\\
&\quad= \sqrt{E\Big(\big(Z(t_\ell)\big)^2\Big)}\,\sqrt{E\Big(\big(Z(t_k)\big)^2\,\big(W(t_{k+1})-W(t_k)\big)^2\Big)} < \infty\,,
\end{aligned}
$$

und aufgrund der Unabhängigkeit erhält man für $k,\ell \in \{0,1,\dots,K-1\}$ mit $k \neq \ell$

$$
\begin{aligned}
&E\Big(Z(t_k)\,Z(t_\ell)\,\big(W(t_{k+1})-W(t_k)\big)\,\big(W(t_{\ell+1})-W(t_\ell)\big)\Big)\\
&\quad= E\Big(Z(t_k)\,Z(t_\ell)\,\big(W(t_{k+1})-W(t_k)\big)\Big)\,E\big(W(t_{\ell+1})-W(t_\ell)\big) = 0\,.
\end{aligned}
$$

(ii) *Erwartungswert.* Zur Bestimmung des Erwartungswertes wird die Definition des Itô-Integrales, die Linearität des Erwartungswertes und die Relation $E(W(t_{k+1})-W(t_k)) = 0$ verwendet

$$
\begin{aligned}
E\bigg(\int_{t_0}^T Z(t)\,\mathrm{d}W(t)\bigg) &= E\bigg(\sum_{k=0}^{K-1} Z(t_k)\,\big(W(t_{k+1})-W(t_k)\big)\bigg)\\
&= \sum_{k=0}^{K-1} E\Big(Z(t_k)\,\big(W(t_{k+1})-W(t_k)\big)\Big)\\
&= \sum_{k=0}^{K-1} E\big(Z(t_k)\big)\,E\big(W(t_{k+1})-W(t_k)\big) = 0\,.
\end{aligned}
$$

(iii) *Varianz.* Aus den obigen Überlegungen folgt für $k,\ell \in \{0,1,\dots,K-1\}$ die Identität

$$
E\Big(Z(t_k)\,Z(t_\ell)\,\big(W(t_{k+1})-W(t_k)\big)\,\big(W(t_{\ell+1})-W(t_\ell)\big)\Big) = E\Big(\big(Z(t_k)\big)^2\Big)\,(t_{k+1}-t_k)\,\delta_{k\ell}\,;
$$

da der Erwartungswert des Itô-Integrales verschwindet, vereinfacht sich die Varianz zu

$$\begin{aligned}
V\Big(\int_{t_0}^{T} Z(t)\,\mathrm{d}W(t)\Big) &= V\Big(\sum_{k=0}^{K-1} Z(t_k)\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)\Big) \\
&= E\Big(\sum_{k,\ell=0}^{K-1} Z(t_k)\,Z(t_\ell)\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)\,\big(W(t_{\ell+1}) - W(t_\ell)\big)\Big) \\
&= \sum_{k,\ell=0}^{K-1} E\Big(Z(t_k)\,Z(t_\ell)\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)\,\big(W(t_{\ell+1}) - W(t_\ell)\big)\Big) \\
&= \sum_{k,\ell=0}^{K-1} E\Big(\big(Z(t_k)\big)^2\Big)\,(t_{k+1} - t_k)\,\delta_{k\ell} \\
&= \sum_{k=0}^{K-1} E\Big(\big(Z(t_k)\big)^2\Big)\,(t_{k+1} - t_k)\,.
\end{aligned}$$

Der Erwartungswert des Quadrates einer Treppenfunktion ist offenbar durch (in Hinblick auf Integration bezüglich t kann der Beitrag $Z(t_K)\,\chi_{\{t_K\}}(t)$ vernachlässigt werden)

$$\begin{aligned}
\big(Z(t)\big)^2 &\approx \sum_{k_1,k_2=0}^{K-1} Z(t_{k_1})\,Z(t_{k_2})\,\chi_{[t_{k_1},t_{k_1+1})}(t)\,\chi_{[t_{k_2},t_{k_2+1})}(t)\,, \\
E\Big(\big(Z(t)\big)^2\Big) &\approx \sum_{k_1,k_2=0}^{K-1} E\big(Z(t_{k_1})\,Z(t_{k_2})\big)\,\chi_{[t_{k_1},t_{k_1+1})}(t)\,\chi_{[t_{k_2},t_{k_2+1})}(t)\,, \\
\int_{t_0}^{T} \chi_{[t_{k_1},t_{k_1+1})}(t)\,&\chi_{[t_{k_2},t_{k_2+1})}(t)\,\mathrm{d}t = \delta_{k_1k_2}\,(t_{k_1+1} - t_{k_1})\,,
\end{aligned}$$

gegeben; Integration bezüglich $t \in \mathscr{T}$ führt somit auf

$$\int_{t_0}^{T} E\Big(\big(Z(t)\big)^2\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{K-1} E\Big(\big(Z(t_k)\big)^2\Big)\,(t_{k+1} - t_k) = V\Big(\int_{t_0}^{T} Z(t)\,\mathrm{d}W(t)\Big),$$

was die Behauptung zeigt. ◇

Stochastische Integralbegriffe.

(i) *Zugang von Itô.* Die Konstruktion des Itô-Integrales beruht auf der Approximation des Integranden durch Treppenfunktionen spezieller Form, wofür sich das Itô-Integral auf natürliche Weise ergibt

$$\int_{t_0}^{T} Z^{(\ell)}(t)\,\mathrm{d}W(t) = \sum_{k=0}^{K-1} Z^{(\ell)}(t_k)\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big) \xrightarrow{\ell\to\infty} \int_{t_0}^{T} Z(t)\,\mathrm{d}W(t)\,;$$

da die linken Grenzen der Teilintervalle als Stützstellen gewählt werden, entspricht das Itô-Integral der Linksregel.

(ii) *Zugang von Stratonovich.* Betrachtet man stattdessen Approximationen entsprechend der Trapezregel, ergibt sich das Stratonovich-Integral

$$\sum_{k=0}^{K-1} \tfrac{1}{2}\big(Z^{(\ell)}(t_k) + Z^{(\ell)}(t_{k+1})\big)\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big) \xrightarrow{\ell\to\infty} \int_{t_0}^{T} Z(t) \circ \mathrm{d}W(t)\,.$$

D.7 Itô-Prozeß, Lemma von Itô

Vorbemerkung. Bevor der Begriff eines Itô-Prozesses eingeführt wird und die wesentlichen Voraussetzungen für die Anwendung des Lemmas von Itô präzisiert werden, sollen heuristische Überlegungen die Aussage des Resultates für den Spezialfall eines Wiener-Prozesses verdeutlichen.

Situation. Wie zuvor bezeichne $\mathscr{T} = [t_0, T]$ mit $0 \leq t_0 < T$ das betrachtete Zeitintervall, $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum, $(W(t))_{t\in\mathscr{T}}$ einen auf Ω definierten eindimensionalen Wiener-Prozeß und $(Z(t))_{t\in\mathscr{T}}$ einen auf Ω definierten reellwertigen stochastischen Prozeß.

Lemma von Itô. Für jede reelle Funktion $F \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ gilt die Identität

$$F\big(W(T)\big) - F\big(W(t_0)\big) = \int_{t_0}^{T} F'\big(W(t)\big)\,\mathrm{d}W(t) + \tfrac{1}{2}\int_{t_0}^{T} F''\big(W(t)\big)\,\mathrm{d}t\,,$$

wobei das stochastische Integral im Sinne von Itô definiert ist.
Erklärung. Die folgende heuristische Herleitung des Lemmas von Itô soll die grundlegenden Ideen deutlich machen.

(i) *Rules of thumb.* Da die Pfade eines Wiener-Prozesses zwar fast sicher stetig jedoch fast sicher an keiner Stelle differenzierbar sind, ist eine Entwicklung der Differenz

$$W(t_{k+1}) - W(t_k)\,, \qquad t_k, t_{k+1} \in \mathscr{T}\,, \quad t_k < t_{k+1}\,,$$

im klassischen Sinn nicht wohldefiniert; stattdessen nützt man aus, daß sämtliche Zuwächse eines Wiener-Prozesses normalverteilt mit Erwartungswert Null und Varianz

$$V\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big) = E\Big(\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)^2\Big) = t_{k+1} - t_k\,, \qquad t_k, t_{k+1} \in \mathscr{T}\,, \quad t_k < t_{k+1}\,,$$

sind. Zur Vereinfachung der Überlegungen wird kurzzeitig angenommen, daß W eine reelle Funktion ist, welche die Eigenschaften eines Wiener-Prozesses wiederspiegelt; insbesondere gelte

$$W : \mathscr{T} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad W(t_{k+1}) - W(t_k) \approx \sqrt{t_{k+1} - t_k}\,, \quad t_k, t_{k+1} \in \mathscr{T}\,, \quad t_k < t_{k+1}\,.$$

In Hinblick auf die Konstruktion des Itô-Integrales wird für spezielle Approximationen zu Zerlegungen $t_0 < t_1 < \cdots < t_K = T$ mit $K \in \mathbb{N}$ die Relation

$$\sum_{k=0}^{K-1} Z(t_k)\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big) \overset{K\to\infty}{\longrightarrow} \int_{t_0}^{T} Z(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

verwendet; in der betrachteten Situation wird $Z(t) = F'(W(t))$ gesetzt.

(ii) *Herleitung.* Mittels partieller Integration folgt die Entwicklung

$$\begin{aligned}
&F\big(W(t_{k+1})\big) - F\big(W(t_k)\big)\\
&\quad = F\Big(W(t_k) + \sigma\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)\Big)\Big|_{\sigma=0}^{1}\\
&\quad = \int_0^1 \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} F\Big(W(t_k) + \sigma\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)\Big)\,\mathrm{d}\sigma\\
&\quad = \int_0^1 F'\Big(W(t_k) + \sigma\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)\Big)\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)\,\mathrm{d}\sigma\\
&\quad = F'\big(W(t_k)\big)\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)\\
&\qquad + \int_0^1 (1-\sigma)\,F''\Big(W(t_k) + \sigma\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)\Big)\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)^2\,\mathrm{d}\sigma\\
&\quad = F'\big(W(t_k)\big)\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)\\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\,F''\big(W(t_k)\big)\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)^2\\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\int_0^1 (1-\sigma)^2\,F'''\Big(W(t_k) + \sigma\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)\Big)\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)^3\,\mathrm{d}\sigma\,,
\end{aligned}$$

vgl. Taylorreihenentwicklung mit Restglied in Integralform. Summieren führt auf

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{K-1}\Big(F\big(W(t_{k+1})\big) - F\big(W(t_k)\big)\Big)\\
&\quad = \sum_{k=0}^{K-1} F'\big(W(t_k)\big)\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)\\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{K-1} F''\big(W(t_k)\big)\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)^2\\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\int_0^1 (1-\sigma)^2 \sum_{k=0}^{K-1} F'''\Big(W(t_k) + \sigma\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)\Big)\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)^3\,\mathrm{d}\sigma\,.
\end{aligned}$$

Die linke Seite hat die Form einer Teleskop-Summe und vereinfacht sich zu

$$\sum_{k=0}^{K-1}\Big(F\big(W(t_{k+1})\big) - F\big(W(t_k)\big)\Big) = F\big(W(T)\big) - F\big(W(t_0)\big)\,.$$

Der erste Beitrag auf der rechten Seite ist eine Approximation an das Itô-Integral

$$\sum_{k=0}^{K-1} F'\big(W(t_k)\big)\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big) \approx \int_{t_0}^{T} F'\big(W(t)\big)\,\mathrm{d}W(t)\,,$$

und der zweite Beitrag stellt eine Näherung an ein bestimmtes Integral dar

$$W(t_{k+1}) - W(t_k) \approx \sqrt{t_{k+1} - t_k}\,,$$

$$\tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{K-1} F''\big(W(t_k)\big)\,\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)^2 \approx \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{K-1} F''\big(W(t_k)\big)\,(t_{k+1} - t_k) \approx \tfrac{1}{2}\int_{t_0}^{T} F''\big(W(t)\big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Ähnliche Überlegungen deuten darauf hin, daß der Restterm gegen Null konvergiert

$$\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)^2 \approx t_{k+1} - t_k\,, \qquad W(t_{k+1}) - W(t_k) \overset{t_{k+1}-t_k \to 0}{\longrightarrow} 0\,,$$

$$\tfrac{1}{2} \int_0^1 (1-\sigma)^2 \sum_{k=0}^{K-1} F'''\Big(W(t_k) + \sigma\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)\Big)\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big)^3 \,\mathrm{d}\sigma \approx 0\,.$$

Insgesamt begründen diese Überlegungen das angegebene Resultat. ◇

Illustrationen. Zur Illustration des Lemmas von Itô

$$F\big(W(T)\big) - F\big(W(t_0)\big) = \int_{t_0}^T F'\big(W(t)\big)\,\mathrm{d}W(t) + \tfrac{1}{2}\int_{t_0}^T F''\big(W(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

wird die Identität und eine quadratische Funktion betrachtet.

(i) *Identische Funktion.* Im einfachsten Fall der Identität $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : w \mapsto w$ ergibt sich wegen $F'(w) = 1$ sowie $F''(w) = 0$ wie erwartet die Relation

$$\int_{t_0}^T 1\,\mathrm{d}W(t) = W(T) - W(t_0)\,.$$

(ii) *Quadratische Funktion.* Speziell für $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : w \mapsto w^2$ und $t_0 = 0$ erhält man (wegen $W(0) = 0$ fast sicher und $F'(w) = 2\,w$ sowie $F''(w) = 2$)

$$\big(W(T)\big)^2 = 2\int_0^T W(t)\,\mathrm{d}W(t) + T\,,$$

was auf die folgende Identität führt

$$\int_0^T W(t)\,\mathrm{d}W(t) = \tfrac{1}{2}\Big(\big(W(T)\big)^2 - T\Big).$$

Analogon. Im Fall regulärer Funktionen $F \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ und $G \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ gilt die bekannte Identität

$$F\big(G(T)\big) - F\big(G(t_0)\big) = \int_{t_0}^T F'\big(G(t)\big)\,\mathrm{d}G(t)\,.$$

Erklärung. Die Herleitung knüpft an die heuristische Erklärung des Lemmas von Itô an; insbesondere bezeichne $t_0 < t_1 < \cdots < t_K = T$ eine Zerlegung des Zeitintervalles. In der betrachteten Situation vereinfacht sich die Entwicklung zu

$$\begin{aligned} F\big(G(t_{k+1})\big) - F\big(G(t_k)\big) &= F'\big(G(t_k)\big)\big(G(t_{k+1}) - G(t_k)\big) \\ &\quad + \int_0^1 (1-\sigma)\,F''\Big(G(t_k) + \sigma\big(G(t_{k+1}) - G(t_k)\big)\Big)\big(G(t_{k+1}) - G(t_k)\big)^2\,\mathrm{d}\sigma\,; \end{aligned}$$

mittels Summation und Anwendung der Teleskop-Summe erhält man

$$
\begin{aligned}
F\big(G(T)\big) - F\big(G(t_0)\big) &= \sum_{k=0}^{K-1} F\big(G(t_{k+1})\big) - F\big(G(t_k)\big) \\
&= \sum_{k=0}^{K-1} F'\big(G(t_k)\big)\big(G(t_{k+1}) - G(t_k)\big) \\
&\quad + \int_0^1 (1-\sigma) \sum_{k=0}^{K-1} F''\Big(G(t_k) + \sigma\big(G(t_{k+1}) - G(t_k)\big)\Big)\big(G(t_{k+1}) - G(t_k)\big)^2 \,\mathrm{d}\sigma\,.
\end{aligned}
$$

Unter der Voraussetzung, daß die Feinheit der Zerlegung für $K \to \infty$ gegen Null geht, konvergiert der erste Beitrag auf der rechten Seite gegen das Riemann–Stieltjes-Integral

$$
\sup_{k\in\{0,1,\dots,K\}} (t_{k+1} - t_k) \overset{K\to\infty}{\longrightarrow} 0: \qquad \sum_{k=0}^{K-1} F'\big(G(t_k)\big)\big(G(t_{k+1}) - G(t_k)\big) \overset{K\to\infty}{\longrightarrow} \int_{t_0}^{T} F'\big(G(t)\big)\,\mathrm{d}G(t)\,.
$$

Um zu zeigen, daß der Restterm gegen Null konvergiert, nützt man die Entwicklung einer regulären Funktion

$$
G(t_{k+1}) - G(t_k) = \int_0^1 G'\big(t_k + \sigma(t_{k+1} - t_k)\big)(t_{k+1} - t_k)\,\mathrm{d}\sigma\,,
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 (1-\sigma) \sum_{k=0}^{K-1} F''\Big(G(t_k) + \sigma\big(G(t_{k+1}) - G(t_k)\big)\Big)\big(G(t_{k+1}) - G(t_k)\big)^2 \,\mathrm{d}\sigma\right| \\
&\quad \leq \sup_{k\in\{0,1,\dots,K-1\}} (t_{k+1} - t_k)\, T \Big(\sup_{t\in\mathscr{T}} \big|G'(t)\big|\Big)^2 \sup_{t\in\mathscr{T}} \big|F''\big(G(t)\big)\big| \overset{K\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.
\end{aligned}
$$

Insgesamt führt dies auf die angegebene Relation. ◇

Zusammenhang zwischen Itô- und Stratonovich-Integral. Es bezeichne $\mathscr{T} = [0,T]$ das betrachtete Zeitintervall, und es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = T$ eine Zerlegung. Wie erwähnt entspricht das stochastische Integral im Sinne von Itô der Linksregel und das Stratonovich-Integral der Trapezregel; betrachtet man speziell einen Wiener-Prozeß als Integranden, ergeben sich die Approximation (bei verschwindender Feinheit der Zerlegung)

$$
\sum_{k=0}^{K-1} W(t_k)\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big) \approx \int_0^T W(t)\,\mathrm{d}W(t)\,,
$$

$$
\sum_{k=0}^{K-1} \tfrac{1}{2}\big(W(t_k) + W(t_{k+1})\big)\big(W(t_{k+1}) - W(t_k)\big) \approx \int_0^T W(t) \circ \mathrm{d}W(t)\,.
$$

Mittels der zuvor angegebenen Relation für das Itô-Integral[13]

$$
\int_0^T W(t)\,\mathrm{d}W(t) = \tfrac{1}{2}\Big(\big(W(T)\big)^2 - T\Big)
$$

[13] *Bemerkung.* Im betrachteten Spezialfall läßt sich mit Hilfe der Identität (wobei $a, b \in \mathbb{R}$)

$$
a(b-a) = ab - a^2 = \tfrac{1}{2}\big(b^2 - a^2\big) - \big(\tfrac{1}{2}a^2 - ab + \tfrac{1}{2}b^2\big) = \tfrac{1}{2}\big(b^2 - a^2\big) - \tfrac{1}{2}(b-a)^2
$$

und der heuristischen Überlegung

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{K-1} \tfrac{1}{2}\big(W(t_k)+W(t_{k+1})\big)\big(W(t_{k+1})-W(t_k)\big)\\
&\quad = \sum_{k=0}^{K-1} W(t_k)\big(W(t_{k+1})-W(t_k)\big) + \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{K-1}\big(W(t_{k+1})-W(t_k)\big)^2\\
&\quad \approx \sum_{k=0}^{K-1} W(t_k)\big(W(t_{k+1})-W(t_k)\big) + \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{K-1}(t_{k+1}-t_k)\\
&\quad = \sum_{k=0}^{K-1} W(t_k)\big(W(t_{k+1})-W(t_k)\big) + \tfrac{1}{2}T
\end{aligned}
$$

läßt sich der folgende Zusammenhang zwischen Itô- und Stratonovich-Integral begründen

$$
\int_0^T W(t)\circ \mathrm{d}W(t) = \int_0^T W(t)\,\mathrm{d}W(t) + \tfrac{1}{2}T = \tfrac{1}{2}\big(W(T)\big)^2;
$$

man beachte, daß dies der bekannten Identität (wobei $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$)

$$
\int_{t_0}^T f(t)\,f'(t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\Big(\big(f(T)\big)^2 - \big(f(t_0)\big)^2\Big)
$$

entspricht.

Itô-Prozeß. Es sei $\mathscr{T} = [t_0, T]$ mit $0 \leq t_0 < T$, und es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{A}(t))_{t\in\mathscr{T}}, \mu)$ einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum. Für die auf Ω definierten reellwertigen stochastischen Prozesse $(F(t))_{t\in\mathscr{T}}$ und $(G(t))_{t\in\mathscr{T}}$ gelte $F \in L^1_\omega(\mathscr{T})$ und $G \in L^2_\omega(\mathscr{T})$. Als Itô-Prozeß bezeichnet man einen auf Ω definierten adaptierten Prozeß $(Z(t))_{t\in\mathscr{T}}$, dessen Pfade stetig sind und welcher für jeden Zeitpunkt $t \in \mathscr{T}$ fast sicher durch die Darstellung

$$
\big(Z(t)\big)(\omega) = \big(Z(t_0)\big)(\omega) + \int_{t_0}^t \big(F(\tau)\big)(\omega)\,\mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^t \big(G(\tau)\big)(\omega)\,\mathrm{d}\big(W(\tau)\big)(\omega)
$$

gegeben ist; in üblicher Kurzschreibweise

$$
Z(t) = Z(t_0) + \int_{t_0}^t F(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^t G(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau).
$$

---

und der Anwendung der Teleskop-Reihe leicht begründen, daß die beim Itô-Integral auftretende Riemann–Stieltjes-Summe bei verschwindender Feinheit der Zerlegung den angegebenen Wert annimmt

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{K-1} W(t_k)\big(W(t_{k+1})-W(t_k)\big) &= \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{K-1}\Big(\big(W(t_{k+1})\big)^2 - \big(W(t_k)\big)^2\Big) - \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{K-1}\big(W(t_{k+1})-W(t_k)\big)^2\\
&\approx \tfrac{1}{2}\Big(\big(W(T)\big)^2 - \big(W(0)\big)^2\Big) - \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{K-1}(t_{k+1}-t_k)\\
&\approx \tfrac{1}{2}\big(W(T)\big)^2 - \tfrac{1}{2}T.
\end{aligned}
$$

Gebräuchlich ist auch die kompakte symbolische Notation

$$\mathrm{d}Z(t) = F(t)\,\mathrm{d}t + G(t)\,\mathrm{d}W(t)\,.$$

Spezialfälle.

(i) Jeder Wiener-Prozeß ist insbesondere ein Itô-Prozeß (setze $F = 0$ und $G = 1$)

$$W(t) = W(t_0) + \int_{t_0}^{t} 1\,\mathrm{d}W(\tau)\,.$$

(ii) Die folgende Relation zeigt, daß sämtliche Zuwächse eines Itô-Prozesses auf einen Itô-Prozeß führen (mit $t \in \mathscr{T}$ und $t_1 \in (t_0, t)$, Zerlegung des Integrationsintervalles)

$$\begin{aligned}
Z(t) &= Z(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^{t} G(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau)\\
&= Z(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} F(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{t_1}^{t} F(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^{t_1} G(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau) + \int_{t_1}^{t} G(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau)\\
&= Z(t_1) + \int_{t_1}^{t} F(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{t_1}^{t} G(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad Z(t) - Z(t_1) = \int_{t_1}^{t} F(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{t_1}^{t} G(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau)\,;$$

ähnlich wie zuvor sind die Formulierungen (Integralgleichung, symbolische Notation)

$$\begin{gathered}
\int_{t_1}^{t} 1\,\mathrm{d}Z(\tau) = \int_{t_1}^{t} F(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{t_1}^{t} G(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau)\,,\\
\mathrm{d}Z(t) = F(t)\,\mathrm{d}t + G(t)\,\mathrm{d}W(t)\,,
\end{gathered}$$

üblich.

Lemma von Itô.

(i) Es sei $\mathscr{T} = [t_0, T]$ mit $0 \le t_0 < T$, und es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{A}(t))_{t\in\mathscr{T}}, \mu)$ einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum. Für die auf Ω definierten reellwertigen stochastischen Prozesse $(F(t))_{t\in\mathscr{T}}$ und $(G(t))_{t\in\mathscr{T}}$ gelte $F \in L^1_\omega(\mathscr{T})$ und $G \in L^2_\omega(\mathscr{T})$; weiters sei die reellwertige Funktion $H : \mathscr{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (t, z) \mapsto H(t, z)$ bezüglich des ersten Argumentes stetig differenzierbar und bezüglich des zweiten Argumentes zweimal stetig differenzierbar, d.h. es gelte $H \in \mathscr{C}^{1,2}(\mathscr{T} \times \mathbb{R})$. Ist $(Z(t))_{t\in\mathscr{T}}$ ein Itô-Prozeß mit Darstellung (für $t \in \mathscr{T}$)

$$\begin{gathered}
\int_{t_0}^{t} 1\,\mathrm{d}Z(\tau) = \int_{t_0}^{t} F(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^{t} G(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau)\,,\\
\mathrm{d}Z(t) = F(t)\,\mathrm{d}t + G(t)\,\mathrm{d}W(t)\,,
\end{gathered}$$

so erfüllt der durch $(H(t,Z(t)))_{t\in\mathscr{T}}$ definierte stochastische Prozeß die Itô-Formel (für $t \in \mathscr{T}$, mit Bezeichnungen $\partial_t H = \partial_1 H$ und $\partial_z H = \partial_2 H$)

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t 1 \,\mathrm{d}H\big(\tau, Z(\tau)\big) &= \int_{t_0}^t \partial_t H\big(\tau, Z(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^t \partial_z H\big(\tau, Z(\tau)\big)\,\mathrm{d}Z(\tau) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\int_{t_0}^t \partial_{zz} H\big(\tau, Z(\tau)\big)\big(G(\tau)\big)^2\,\mathrm{d}\tau\,, \\ \mathrm{d}H\big(t, Z(t)\big) &= \partial_t H\big(t, Z(t)\big)\,\mathrm{d}t + \partial_z H\big(t, Z(t)\big)\,\mathrm{d}Z(t) + \tfrac{1}{2}\partial_{zz} H\big(t, Z(t)\big)\big(G(t)\big)^2\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Erklärung. Für eine Herleitung des Lemmas von Itô sei auf die angegebenen Quellen verwiesen. ◇

(ii) Wählt man $F = 0$ sowie $G = 1$, was auf einen Wiener-Prozeß führt, und betrachtet man eine nicht explizit von der Zeitvariable $t \in \mathscr{T}$ abhängende Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : z \mapsto H(z)$, so ergibt sich der zu Beginn behandelte Spezialfall

$$Z = W: \qquad \begin{aligned}\int_{t_0}^t 1\,\mathrm{d}H\big(W(\tau)\big) &= \int_{t_0}^t H'\big(W(\tau)\big)\,\mathrm{d}W(\tau) + \tfrac{1}{2}\int_{t_0}^t H''\big(W(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau\,, \\ \mathrm{d}H\big(W(t)\big) &= H'\big(W(t)\big)\,\mathrm{d}W(t) + \tfrac{1}{2} H''\big(W(t)\big)\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Bemerkung. Für reguläre Funktionen $f, g, w : \mathscr{T} \to \mathbb{R}$ entspricht die Itô-Formel der Kettenregel (Differentiation nach der oberen Grenze)

$$\begin{gathered} z(t) - z(t_1) = \int_{t_0}^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^t g(\tau)\,\mathrm{d}w(\tau) = \int_{t_0}^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^t g(\tau)\,w'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \\ z'(t) = f(t) + g(t)\,w'(t)\,, \\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h\big(t, z(t)\big) = \partial_t h\big(t, z(t)\big) + \partial_z h\big(t, z(t)\big)\,z'(t)\,; \end{gathered}$$

aufgrund der grundlgenden Eigenschaft eines Wiener-Prozesses

$$V\big(W(t_2) - W(t_1)\big) = t_2 - t_1\,, \qquad t_1, t_2 \in \mathscr{T}\,, \quad t_1 < t_2\,,$$

tritt im stochastischen Fall ein zusätzlicher Term auf.

Produktregel für Itô-Prozesse. Es gelten die zuvor angegebenen Bezeichnungen und Voraussetzungen. Betrachtet man zwei Itô-Prozesse mit Darstellungen (für $t \in \mathscr{T}$)

$$\mathrm{d}Z_1(t) = F_1(t)\,\mathrm{d}t + G_1(t)\,\mathrm{d}W(t)\,, \qquad \mathrm{d}Z_2(t) = F_2(t)\,\mathrm{d}t + G_2(t)\,\mathrm{d}W(t)\,,$$

so erfüllt der durch das Produkt definierte stochastische Prozeß die Relation (für $t \in \mathscr{T}$)

$$\mathrm{d}\big(Z_1(t) Z_2(t)\big) = Z_1(t)\,\mathrm{d}Z_2(t) + Z_2(t)\,\mathrm{d}Z_1(t) + G_1(t)\,G_2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Erklärung. Die Herleitung der angegebenen Identität beruht auf der Umformulierung

$$Z_1(t)\,Z_2(t) = \tfrac{1}{4}\Big(\big(Z_1(t) + Z_2(t)\big)^2 - \big(Z_1(t) - Z_2(t)\big)^2\Big)$$

und der Anwendung der Itô-Formel für die quadratische Funktion $H : \mathscr{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (t,z) \mapsto z^2$ (verwende $\partial_t H(t,z) = 0$ und $\partial_z H(t,z) = 2z$ sowie $\partial_{zz} H(t,z) = 2$)

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Z(t) &= F(t)\,\mathrm{d}t + G(t)\,\mathrm{d}W(t)\,,\\
\mathrm{d}H\big(t,Z(t)\big) &= \partial_t H\big(t,Z(t)\big)\,\mathrm{d}t + \partial_z H\big(t,Z(t)\big)\,\mathrm{d}Z(t) + \tfrac{1}{2}\,\partial_{zz} H\big(t,Z(t)\big)\,\big(G(t)\big)^2\,\mathrm{d}t\,,\\
\mathrm{d}\big(Z(t)\big)^2 &= 2\,Z(t)\,\mathrm{d}Z(t) + \big(G(t)\big)^2\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Setzt man einerseits $Z = Z_1 + Z_2$ und andererseits $Z = Z_1 - Z_2$ folgt mittels Subtraktion

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\big(Z_1(t) + Z_2(t)\big)^2 &= 2\big(Z_1(t) + Z_2(t)\big)\,\mathrm{d}\big(Z_1(t) + Z_2(t)\big) + \big(G_1(t) + G_2(t)\big)^2\,\mathrm{d}t\,,\\
\mathrm{d}\big(Z_1(t) - Z_2(t)\big)^2 &= 2\big(Z_1(t) - Z_2(t)\big)\,\mathrm{d}\big(Z_1(t) - Z_2(t)\big) + \big(G_1(t) - G_2(t)\big)^2\,\mathrm{d}t\,,\\
\mathrm{d}\big(Z_1(t)\,Z_2(t)\big) &= \tfrac{1}{4}\Big(\mathrm{d}\big(Z_1(t) + Z_2(t)\big)^2 - \mathrm{d}\big(Z_1(t) - Z_2(t)\big)^2\Big)\\
&= Z_1(t)\,\mathrm{d}Z_2(t) + Z_2(t)\,\mathrm{d}Z_1(t) + G_1(t)\,G_2(t)\,\mathrm{d}t\,,
\end{aligned}$$

und somit das angegebene Resultat. ◇

D.8 Stochastische Differentialgleichungen

Stochastische Differentialgleichung.

(i) *Voraussetzungen.* Wie zuvor sei $\mathscr{T} = [t_0, T]$ mit $0 \leq t_0 < T$, und es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{A}(t))_{t\in\mathscr{T}}, \mu)$ einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum.

(ii) *Itô-Prozeß.* Ein Itô-Prozeß ist ein auf Ω definierter stetiger adaptierter stochastischer Prozeß $(Z(t))_{t\in\mathscr{T}}$ mit der Darstellung (Integralgleichung, symbolische Notation)

$$Z(t) = Z(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^{t} G(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau)\,, \qquad t \in \mathscr{T}\,,$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}Z(t) = F(\tau)\,\mathrm{d}\tau + G(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau)\,, \qquad t \in \mathscr{T}\,, \\ Z(t_0) \text{ gegeben}\,, \end{cases}$$

wobei für die auf Ω definierten reellwertigen stochastischen Prozesse $(F(t))_{t\in\mathscr{T}}$ und $(G(t))_{t\in\mathscr{T}}$ die Eigenschaften $F \in L^1_\omega(\mathscr{T})$ und $G \in L^2_\omega(\mathscr{T})$ vorausgesetzt werden.

(iii) *Stochastische Differentialgleichung.* Läßt man zu, daß die stochastischen Prozesse F und G zusätzlich von Z abhängen, ergibt sich eine Integralgleichung bzw. bei Formulierung mittels symbolischer Notation eine stochastische gewöhnliche Differentialgleichung[14]

$$Z(t) = Z(t_0) + \int_{t_0}^{t} F\big(\tau, Z(\tau)\big)\,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t} G\big(\tau, Z(\tau)\big)\,\mathrm{d}W(\tau)\,,$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}Z(t) = F\big(t, Z(t)\big)\,\mathrm{d}t + G\big(t, Z(t)\big)\,\mathrm{d}W(t)\,, \qquad t \in \mathscr{T}\,, \\ Z(t_0) = Z_0 \text{ gegeben}\,. \end{cases}$$

Einen stetigen adaptierten stochastischen Prozeß $(Z(t))_{t\in\mathscr{T}}$, welcher für jeden Zeitpunkt $t \in \mathscr{T}$ fast sicher die Integralgleichung erfüllt, bezeichnet man als Lösung der stochastischen Differentialgleichung. Man beachte, daß unter den Regularitätseigenschaften $F, G \in \mathscr{C}(\mathscr{T} \times \mathbb{R})$ die Bedingungen $F(\cdot, Z(\cdot)) \in L^1_\omega(\mathscr{T})$ sowie $G(\cdot, Z(\cdot)) \in L^2_\omega(\mathscr{T})$ erfüllt sind; die zusätzlichen Annahmen (lineares Wachstum, Lipschitz-Stetigkeit, Anfangswert quadratintegrierbar)

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\, t \in \mathscr{T} \quad \forall\, z \in \mathbb{R}: \quad \big|F(t,z)\big| + \big|G(t,z)\big| \leq C\,\big(1 + |z|\big)\,,$$

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\, t \in \mathscr{T} \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{R}: \quad \big|F(t,z_1) - F(t,z_2)\big| + \big|G(t,z_1) - G(t,z_2)\big| \leq C\,|z_1 - z_2|\,,$$

$$E\big(Z_0^2\big) < \infty\,,$$

sichern die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangwertproblemes.

---

[14] *Bemerkung.* Im Zusammenhang mit stochastischen gewöhnlichen Differentialgleichungen werden die Bezeichnungen

$$\text{Drift } F\big(t, Z(t)\big)\,\mathrm{d}t\,, \qquad \text{Diffusion } G\big(t, Z(t)\big)\,\mathrm{d}W(t)\,,$$

verwendet; bei stochastischen partiellen Differentialgleichungen, insbesondere bei stochastischen Diffusions-Advektions-Reaktions-Gleichungen, sind diese Bezeichnungen jedoch mehrdeutig und deswegen besser zu vermeiden.

Illustration (Lineare Differentialgleichung mit additivem Rauschen). Es sei $\mathscr{T} = [0,T]$ mit $T > 0$, und es bezeichne $(\Omega, \mathscr{A}, (\mathscr{A}(t))_{t\in\mathscr{A}}, \mu)$ einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum; weiters gelte $a \in \mathbb{R}$ sowie $b \in \mathscr{C}(\mathscr{T})$. Das zuvor angegebene Resultat sichert die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$Z(t) = Z(0) + \int_0^t a\,Z(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t b(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau)\,, \qquad t \in \mathscr{T}\,,$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}Z(t) = a\,Z(t)\,\mathrm{d}t + b(t)\,\mathrm{d}W(t)\,, \qquad t \in \mathscr{T}\,, \\ Z(0) \text{ gegeben}; \end{cases}$$

da die beim stochastischen Integral auftretende Funktion b nicht von der Lösung abhängt, spricht man von einer linearen Differentialgleichung mit additivem Rauschen. In Analogie zur linearen Variation-der-Konstanten-Formel ist die Lösung durch die Integraldarstellung

$$Z(t) = \mathrm{e}^{at} Z(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{a(t-\tau)} b(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau)\,, \qquad t \in \mathscr{T}\,,$$

gegeben.[15]

Erklärung. Definiert man die Itô-Prozesse $(Z_1(t))_{t\in\mathscr{T}}$ und $(Z_2(t))_{t\in\mathscr{T}}$ wie folgt

$$Z_1(t) = \mathrm{e}^{at} = 1 + \int_0^t a\,\mathrm{e}^{a\tau}\,\mathrm{d}t\,, \qquad F_1(t) = a\,\mathrm{e}^{at}\,, \quad G_1(t) = 0\,, \qquad t \in \mathscr{T}\,,$$

$$Z_2(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-a\tau}\,b(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau)\,, \qquad F_2(t) = 0\,, \quad G_2(t) = \mathrm{e}^{-at}\,b(t)\,, \qquad t \in \mathscr{T}\,,$$

so entspricht die angegebene Lösungsdarstellung der Relation

$$Z(t) = \mathrm{e}^{at} Z(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{a(t-\tau)} b(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau) = Z_1(t)\,Z(0) + Z_1(t)\,Z_2(t)\,, \qquad t \in \mathscr{T}\,;$$

offensichtlich gilt $Z_1(0) = 1$ sowie $Z_2(0) = 0$ und deshalb wird der vorgegebene Anfangswert angenommen. Um die Gültigkeit dieser Lösungsdarstellung nachzuweisen, bestimmt man

[15] *Bemerkung.* Im deterministischen Fall (mit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathscr{C}(\mathscr{T})$ und $w \in \mathscr{C}^1(\mathscr{T})$)

$$\begin{cases} z'(t) = a\,z(t) + b(t)\,w'(t)\,, \qquad t \in \mathscr{T}\,, \\ z(0) \text{ gegeben}, \end{cases}$$

entspricht die angegebene Relation der Lösungsdarstellung mittels linearer Variation-der-Konstanten-Formel

$$z(t) = \mathrm{e}^{at} z(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{a(t-\tau)} b(\tau)\,w'(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad t \in \mathscr{T}\,.$$

$\mathrm{d}Z(t)$ mit Hilfe der Produktregel für Itô-Prozesse

$$\begin{aligned}
Z_1(t) &= \mathrm{e}^{at}\,, \quad F_1(t) = a\,\mathrm{e}^{at}\,, \quad G_1(t) = 0\,,\\
\mathrm{d}Z_1(t) &= F_1(t)\,\mathrm{d}t + G_1(t)\,\mathrm{d}W(t) = a\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t\,,\\
Z_2(t) &= \int_0^t \mathrm{e}^{-a\tau}\,b(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau)\,, \quad F_2(t) = 0\,, \quad G_2(t) = \mathrm{e}^{-at}\,b(t)\,,\\
\mathrm{d}Z_2(t) &= F_2(t)\,\mathrm{d}t + G_2(t)\,\mathrm{d}W(t) = \mathrm{e}^{-at}\,b(t)\,\mathrm{d}W(t)\,,\\
\mathrm{d}\big(Z_1(t)\,Z_2(t)\big) &= Z_1(t)\,\mathrm{d}Z_2(t) + Z_2(t)\,\mathrm{d}Z_1(t) + G_1(t)\,G_2(t)\,\mathrm{d}t\\
&= b(t)\,\mathrm{d}W(t) + a\int_0^t \mathrm{e}^{a(t-\tau)}\,b(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau)\,\mathrm{d}t\,;
\end{aligned}$$

insgesamt führt dies auf

$$\begin{aligned}
Z(t) &= Z_1(t)\,Z(0) + Z_1(t)\,Z_2(t) = \mathrm{e}^{at}\,Z(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{a(t-\tau)}\,b(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau)\,,\\
\mathrm{d}Z(t) &= \mathrm{d}Z_1(t)\,Z(0) + \mathrm{d}\big(Z_1(t)\,Z_2(t)\big) = a\,\mathrm{e}^{at}\,Z(0)\,\mathrm{d}t + b(t)\,\mathrm{d}W(t) + a\int_0^t \mathrm{e}^{a(t-\tau)}\,b(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau)\,\mathrm{d}t\\
&= a\,Z(t)\,\mathrm{d}t + b(t)\,\mathrm{d}W(t)\,,
\end{aligned}$$

was die erwünschte Relation ist. $\diamond$

D.9 Illustration zum Lemma von Itô

Um die Relevanz des Lemmas von Itô zu illustrieren, wird eine Anwendung im Zusammenhang mit stochastischen Schrödinger-Gleichungen angedeutet.

Nichtlineare Schrödinger-Gleichung. Die (deterministische) zeitabhängige kubische Schrödinger-Gleichung ist durch (kompakte Formulierung als Evolutionsgleichung, homogene Dirichlet-Randbedingungen auf Raumbereich $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^d$, $\vartheta \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} \mathrm{i}\, u'(t) = -\Delta u(t) + \vartheta \big|u(t)\big|^2 u(t) \quad \text{auf } \mathscr{O} \times (0,T)\,, \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\mathscr{O} \times (0,T)\,, \qquad u(0) = u_0 \quad \text{auf } \mathscr{O}\,, \end{cases}$$

gegeben. In diesem Zusammenhang ist es naheliegend, den Lebesgue-Raum $L^2(\mathscr{O},\mathbb{C})$ als zugrundeliegenden komplexen Hilbert-Raum zu betrachten.

Erhaltung der L^2-Norm. Eine grundlegende Eigenschaft ist die Erhaltung der L^2-Norm

$$\forall\, t \in [0,T]: \qquad \big\|u(t)\big\|_{L^2} = \big\|u_0\big\|_{L^2}\,.$$

Erklärung. Vgl. Lehrveranstaltung *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Darstellung mittels Spektral-Maß, geringere Regularitätsvoraussetzungen). Offensichtlich gilt die Relation

$$\begin{aligned} \big\|u(t)\big\|_{L^2}^2 - \big\|u_0\big\|_{L^2}^2 &= \big(u(\tau)\big|u(\tau)\big)_{L^2}\Big|_{\tau=0}^{t} \\ &= \int_0^t \Big(\big(u'(\tau)\big|u(\tau)\big)_{L^2} + \big(u(\tau)\big|u'(\tau)\big)_{L^2}\Big)\,\mathrm{d}\tau \\ &= 2\int_0^t \Re\big(u'(\tau)\big|u(\tau)\big)_{L^2}\,\mathrm{d}\tau\,. \end{aligned}$$

Das Testen der Schrödinger-Gleichung with $u(t)$ und partielle Integration bzw. Anwendung des Satzes von Gauß führt auf (aufgrund der Voraussetzung $u(t)|_{\partial\mathscr{O}} = 0$ verschwinden die Randterme)

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{i}\, u'(t)\big|u(t)\big)_{L^2} &= -\big(\Delta u(t)\big|u(t)\big)_{L^2} + \vartheta\big(|u(t)|^2 u(t)\big|u(t)\big)_{L^2} \\ &= \big\|\nabla u(t)\big\|_{L^2}^2 + \vartheta\,\big\||u(t)|^2\big\|_{L^2}^2\,, \\ \big(u'(t)\big|u(t)\big)_{L^2} &= -\mathrm{i}\,\big\|\nabla u(t)\big\|_{L^2}^2 - \mathrm{i}\,\vartheta\,\big\||u(t)|^2\big\|_{L^2}^2\,. \end{aligned}$$

Daraus folgert man, daß der Integrand verschwindet (für $z = \Re z + \mathrm{i}\,\Im z \in \mathbb{C}$ verwende elementare Relation $\Re(\mathrm{i}\,z) = -\Im z$)

$$\begin{aligned} \Re\big(u'(t)\big|u(t)\big)_{L^2} &= \Re\Big(-\mathrm{i}\,\big\|\nabla u(t)\big\|_{L^2}^2 - \mathrm{i}\,\vartheta\,\big\||u(t)|^2\big\|_{L^2}^2\Big) \\ &= \Im\Big(\big\|\nabla u(t)\big\|_{L^2}^2 + \vartheta\,\big\||u(t)|^2\big\|_{L^2}^2\Big) = 0\,, \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. ◇

Stochastische nichtlineare Schrödinger-Gleichung. Die Betrachtung einer stochastischen Erweiterung ist beispielsweise dadurch motiviert, daß damit im fokusierenden Fall ($\vartheta < 0$) die Bildung von Singularitäten (*collapse*) verhindert werden kann. Im Folgenden wird die stochastische kubische Schrödinger-Gleichung mit multiplikativem Rauschen in Stratonovich-Form betrachtet (Q-Wiener Prozeß mit Werten in $L^2(\mathscr{O},\mathbb{R})$

$$\begin{cases} \mathrm{i}\,\mathrm{d}u(t) = \Big(-\Delta u(t) + \vartheta\,\big|u(t)\big|^2 u(t)\Big)\,\mathrm{d}t + \sigma\,u(t)\circ\mathrm{d}W(t) \quad \text{auf } \mathscr{O}\times(0,T)\,, \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\mathscr{O}\times(0,T)\,, \qquad u(0) = u_0 \quad \text{auf } \mathscr{O}\,. \end{cases}$$

Die entsprechende Formulierung der Evolutionsgleichung in Itô-Form lautet (ohne Erklärung, mit Spurklasse-Operator und zugehörigem vollständigem Orthonormalsystem aus Eigenfunktionen)

$$\mathrm{i}\,\mathrm{d}u(t) = \Big(-\Delta u(t) + \vartheta\,\big|u(t)\big|^2 u(t) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\,\sigma^2 F_Q\,u(t)\Big)\,\mathrm{d}t + \sigma\,u(t)\,\mathrm{d}W(t)\,,$$

$$F_Q(x) = \sum_{\ell\in\mathbb{N}} \big(Q^{\frac{1}{2}}\,e_\ell(x)\big)^2\,, \quad x\in\mathscr{O}\,.$$

Erhaltung der L^2-Norm Aufgrung der speziellen Form des Rauschens gilt auch für die stochastische Schrödinger-Gleichung die Erhaltung der L^2-Norm

$$\forall\, t\in[0,T]: \qquad \big\|u(t)\big\|_{L^2} = \big\|u_0\big\|_{L^2} \quad P-\text{a.s.}$$

Erklärung. Zur Vereinfachung der Überlegungen wird der Spezialfall

$$W(t) = \beta_1(t)\,e_1$$

mit reellem Wiener-Prozeß angenommen. Das Lemma von Itô besagt, daß für einen Itô-Prozeß die folgende Darstellung gilt

$$\begin{gathered} \mathrm{d}u(t) = f(t)\,\mathrm{d}t + g(t)\,\mathrm{d}W(t)\,, \\ u(t) = u_0 + \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t g(\tau)\,\mathrm{d}W(\tau)\,, \\ G\big(u(t)\big) = G(u_0) + \int_0^t G'\big(u(\tau)\big)\,\mathrm{d}u(\tau) + \frac{1}{2}\int_0^t G''\big(u(\tau)\big)\,\big(g(\tau)\big)^2\,\mathrm{d}\tau\,, \\ \mathrm{d}G\big(u(t)\big) = G'\big(u(t)\big)\,\mathrm{d}u(t) + \tfrac{1}{2}\,G''\big(u(t)\big)\,\big(g(t)\big)^2\,\mathrm{d}t\,. \end{gathered}$$

In der betrachteten Situation wählt man speziell (Fréchet-Ableitung von G bezüglich v)

$$\begin{gathered} \mathrm{i}\,\mathrm{d}u(t) = \Big(-\Delta u(t) + \vartheta\,\big|u(t)\big|^2 u(t) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\sigma^2 u(t)\,e_1^2\Big)\,\mathrm{d}t + \sigma\,u(t)\,e_1\,\mathrm{d}\beta_1(t)\,, \\ \mathrm{i}\,f(t) = \Big(-\Delta u(t) + \vartheta\,\big|u(t)\big|^2 u(t) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\sigma^2 u(t)\,e_1^2\Big)\,, \qquad \mathrm{i}\,g(t) = \sigma\,u(t)\,e_1\,, \\ G(v) = \|v\|_{L^2}^2 = \big(v\big|v\big)_{L^2}\,, \qquad \big(G'(v)\big)(w) = \big(v\big|w\big)_{L^2} + \big(w\big|v\big)_{L^2} = 2\,\Re\big(v\big|w\big)_{L^2}\,, \\ \big(G''(v)\big)(w_1,w_2) = 2\,\Re\big(w_1\big|w_2\big)_{L^2}\,, \qquad \big(G''(v)\big)(w,w) = 2\,\|w\|_{L^2}^2\,, \\ \mathrm{d}\big\|u(t)\big\|_{L^2}^2 = 2\,\Re\big(u(t)\big|\mathrm{d}u(t)\big)_{L^2} + \Re\big(g(t)\big|g(t)\big)_{L^2}\,\mathrm{d}t\,. \end{gathered}$$

Einsetzen der stochastischen Evolutionsgleichung ergibt (ähnlich wie zuvor Anwendung von partieller Integration, beachte $e_1(x) \in \mathbb{R}$ sowie $\beta_1(t)$ reellwertiger Wiener-Prozeß)

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\big\| u(t) \big\|_{L^2}^2 &= -2\,\Re\big(\mathrm{i}\,u(t)\big|\Delta u(t)\big)_{L^2}\,\mathrm{d}t + 2\,\vartheta\,\Re\big(\mathrm{i}\,u(t)\big||u(t)|^2 u(t)\big)_{L^2}\,\mathrm{d}t \\
&\quad - \sigma^2 \Re\big(u(t)\big|u(t)\,e_1^2\big)_{L^2}\,\mathrm{d}t + 2\,\sigma\,\mathrm{d}\beta_1(t)\,\Re\big(\mathrm{i}\,u(t)\big|u(t)\,e_1\big)_{L^2} \\
&\quad + \sigma^2\,\big\|u(t)\,e_1\big\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t \\
&= -2\,\Im\big\|\nabla u(t)\big\|_{L^2}\,\mathrm{d}t - 2\,\vartheta\,\Im\big\||u(t)|^2\big\|_{L^2}\,\mathrm{d}t - 2\,\sigma\,\mathrm{d}\beta_1(t)\,\Im\big(|u(t)|^2\big|e_1\big)_{L^2} \\
&\quad - \sigma^2\,\big\|u(t) e_1\big\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t + \sigma^2\,\big\|u(t) e_1\big\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Erhaltung der L^2-Norm. $\diamond$