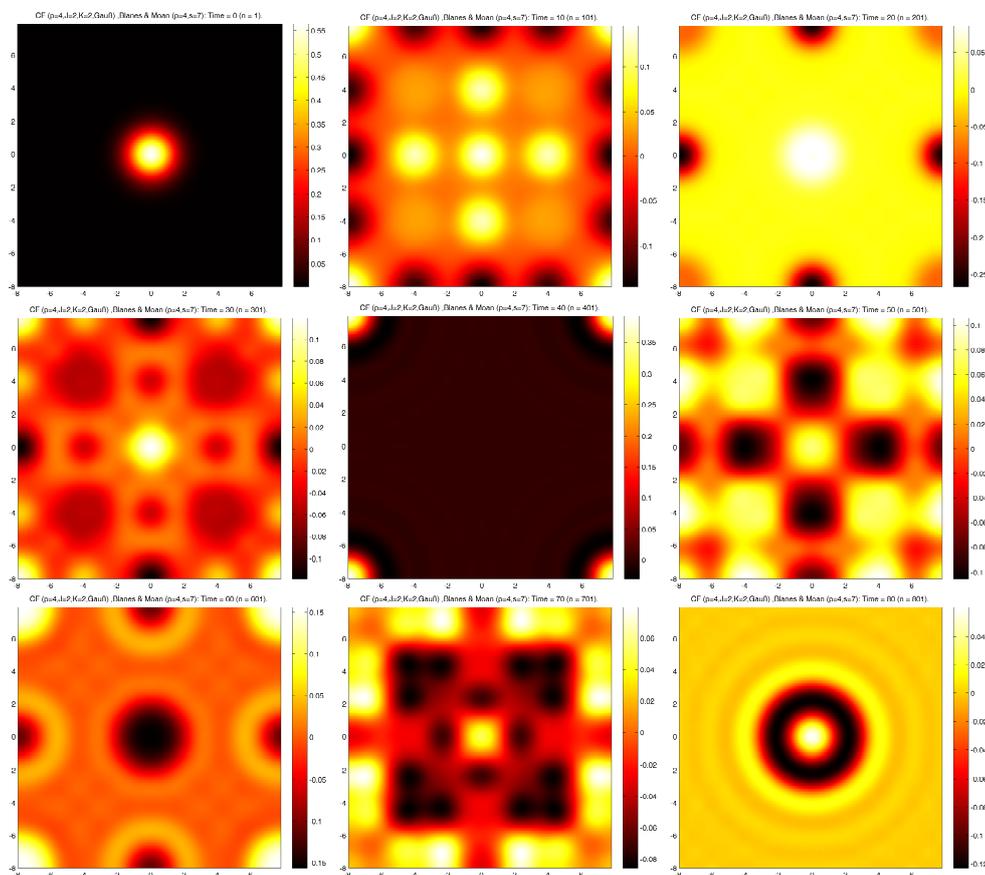


# Kompendium zur Lehrveranstaltung

## Partielle Differentialgleichungen

### Mechthild Thalhammer



Leopold–Franzens Universität Innsbruck

Wintersemester 2018/19

Das vorliegende Kompendium faßt die im Rahmen der Lehrveranstaltung **Partielle Differentialgleichungen** (VO 3 & PS 2) im Wintersemester 2018/19 an der Universität Innsbruck behandelten Themen zusammen.

Ohne Anspruch auf Allgemeinheit und Vollständigkeit werden theoretische Grundlagen zur Analyse verschiedener Klassen von partiellen Differentialgleichungen angegeben; als Illustrationen werden einfache Modellprobleme betrachtet und deren charakteristisches Lösungsverhalten untersucht. Das Kompendium beruht vorwiegend auf den von Ansgar Jünger und Christian Schmeiser verfaßten Vorlesungsskripten, welche unter

ANSGAR JÜNGEL

*Partielle Differentialgleichungen* (2017)

<http://www.asc.tuwien.ac.at/~juengel/scripts/PDE.pdf>

CHRISTIAN SCHMEISER

*Partielle Differentialgleichungen*

<https://homepage.univie.ac.at/christian.schmeiser/allpdg.pdf>

frei verfügbar sind; zusätzlich werden in

DIRK WERNER

*Funktionalanalysis*

7. Auflage, Springer, Berlin, 2011

Dieses Buch ist in der Universitätsbibliothek Innsbruck auch als E-Book verfügbar.

angegebene Grundlagen der Funktionalanalysis insbesondere zu den Themen Fourier-Transformation, Sobolev-Räume, Spektralsatz und Distributionen besprochen. Als ergänzende und weiterführende Literatur wird das Standardwerk

LAWRENCE EVANS

*Partial Differential Equations*

Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, Second edition

American Mathematical Society, 2010

sowie das Vorlesungsskriptum

ROBERT DENK

*Partielle Differentialgleichungen I* (WS 2006/07)

<https://www.mathematik.uni-konstanz.de/denk/forschung/publikationen/skripten/>

empfohlen.

Die erwähnten Vorlesungsskripten bieten die Vorteile kompakter Darstellungen und freier Verfügbarkeit, sollten jedoch mit einem kritischen Blick auf inhaltliche Richtigkeit und mögliche Druckfehler verwendet werden.

Auf der Titelseite ist die numerisch berechnete Lösung einer zeitabhängigen linearen Schrödinger-Gleichung illustriert.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einführung</b>	<b>3</b>
1.1 Notationen . . . . .	4
1.2 Erste Bemerkungen . . . . .	7
1.3 Erste Illustrationen . . . . .	20
1.4 Klassifizierungen . . . . .	32
<b>2 Erhaltungsgleichungen</b>	<b>43</b>



# Kapitel 1

## Einführung

**Inhalt.** In diesem Kapitel werden verschiedene partielle Differentialgleichungen, welche insbesondere für im Bereich der Physik auftretende Fragestellungen relevant sind, sowie analytische Lösungsmethoden vorgestellt. Aufgrund der Komplexität der betrachteten linearen und nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen ist es nur in einzelnen Spezialfällen möglich, explizite Lösungen anzugeben; analytische Methoden dienen deshalb in erster Linie dazu, Lösungsbegriffe zu präzisieren und Resultate zur Existenz sowie Eindeutigkeit von Lösungen abzuleiten. Abschließend wird die Sinnhaftigkeit von Klassifizierungen diskutiert.

## 1.1 Notationen

**Euklidische Räume.** Im Folgenden bezeichne  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ; weiters sei  $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Elemente des euklidischen Raumes  $\mathbb{K}^d$  sind als Spalten aufzufassen

$$x = (x_1, \dots, x_d)^T \in \mathbb{K}^d.$$

Für das euklidische Skalarprodukt und die davon induzierte Norm werden die Notationen (komplexe Konjugation im zweiten Argument)

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^d x_j \overline{y_j}, \quad \|x\|_{\mathbb{R}^d} = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{j=1}^d |x_j|^2},$$
$$x = (x_1, \dots, x_d)^T \in \mathbb{K}^d, \quad y = (y_1, \dots, y_d)^T \in \mathbb{K}^d,$$

verwendet.

**Räumliche und zeitliche Bereiche.** Die betrachteten räumlichen Bereiche sind entweder durch reelle euklidische Räume oder beschränkte Gebiete<sup>1</sup>

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d, \quad d \in \{1, 2, 3\},$$

gegeben. In Hinblick auf physikalische Anwendungen ist im Allgemeinen der dreidimensionale Fall  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  relevant; häufig beginnt man jedoch mit der Untersuchung der einfacheren Fälle  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  oder  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ . Da im Zusammenhang mit nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen meist nur die lokale Existenz von Lösungen gesichert ist, werden als zeitliche Bereiche beschränkte Intervalle der Form

$$(t_0, T), \quad t_0, T \in \mathbb{R}, \quad t_0 < T,$$

gewählt.

**Partielle Ableitungen.** Für partielle Ableitungen hinreichend regulärer skalarwertiger und vektorwertiger Funktionen wie etwa

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} : x = (x_1, \dots, x_d)^T \longmapsto f(x),$$
$$F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d : x = (x_1, \dots, x_d)^T \longmapsto F(x) = (F_1(x), \dots, F_d(x))^T,$$

---

<sup>1</sup>Bemerkungen.

- (i) Ein *Gebiet* ist eine nichtleere, offene und zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes.
- (ii) Im Rahmen der Theorie partieller Differentialgleichungen wird üblicherweise angenommen, daß der Rand  $\partial\Omega$  des betrachteten beschränkten Gebietes lokal durch eine differenzierbare oder zumindest Lipschitz-stetige Funktion dargestellt werden kann; etwas allgemeiner werden auch disjunkte Vereinigungen von endlich vielen regulären Randstücken betrachtet, vgl. SCHMEISER (Divergenzsatz, Seite 19).

werden die Bezeichnungen (wobei  $j, k \in \{1, \dots, d\}$  und  $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ )

$$\partial_{x_j}^\ell f, \quad \partial_{x_j}^\ell F_k,$$

verwendet. Gradient, Laplace-Operator und Divergenz-Operator sind durch

$$\nabla f = (\partial_{x_1} f, \dots, \partial_{x_d} f)^T, \quad \Delta f = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2 f, \quad \nabla \cdot F = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} F_j,$$

definiert; gemischte Ableitungen höherer Ordnung werden meist mittels kompakter Notation

$$\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^d, \quad |\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j,$$

angegeben.<sup>2</sup>

**Funktionsräume.** Wie üblich bezeichnet  $\mathcal{C}^m(\Omega, \mathbb{K})$  den Vektorraum aller auf einem Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  definierten reell- oder komplex-wertigen stetigen Funktionen, deren partielle Ableitungen bis zur Ordnung  $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$  stetig sind. Versehen mit

$$\|f\|_{\mathcal{C}^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |\partial_x^\alpha f(x)|, \quad f \in \mathcal{C}^m(\Omega, \mathbb{K}),$$

bildet  $\mathcal{C}^m(\Omega, \mathbb{K})$  einen normierten Raum. Falls der Definitionsbereich kompakt ist, ergibt sich ein Banach-Raum; insbesondere trifft dies bei einem beschränkten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  auf  $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega}, \mathbb{K})$  zu. Weiters setzt man

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{K}) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \mathcal{C}^m(\Omega, \mathbb{K}).$$

---

<sup>2</sup>Bemerkungen.

- (i) Man beachte, daß für hinreichend oft stetig partiell differenzierbare Funktionen die Reihenfolge der Differentiation keine Rolle spielt; beispielsweise setzt man

$$\begin{aligned} \partial_{x_j x_k} f &= \partial_{x_j} \partial_{x_k} f = \partial_{x_k} \partial_{x_j} f, \quad j, k \in \{1, \dots, d\}, \\ \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_{\geq 0}^d \\ |\alpha|=2}} \partial_x^\alpha f &= \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2 f + \sum_{j=1}^d \sum_{k=j+1}^d \partial_{x_j x_k} f. \end{aligned}$$

- (ii) In den Spezialfällen  $d \in \{2, 3\}$  werden fallweise auch die Bezeichnungen

$$(x, y)^T \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3,$$

und entsprechende Notationen für partielle Ableitungen wie etwa

$$\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$$

verwendet.

Für eine kompakte Einführung und Darstellung wesentlicher Eigenschaften der Lebesgue-Räume  $L^p(\Omega, \mathbb{K})$  mit Exponent  $p \in [1, \infty) \cup \{\infty\}$  sei beispielsweise auf WERNER (2011) verwiesen. Der Spezialfall  $p = 2$  führt auf einen Hilbert-Raum, wobei das zugehörige Skalarprodukt und die davon induzierte Norm durch (komplexe Konjugation im zweiten Argument)

$$(f|g)_{L^2} = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} \, dx, \quad \|f\|_{L^2} = \sqrt{(f|f)_{L^2}} = \sqrt{\int_{\Omega} |f(x)|^2 \, dx}, \quad f, g \in L^2(\Omega, \mathbb{K}),$$

definiert sind.

## 1.2 Erste Bemerkungen

**Partielle Differentialgleichungen.** Unter einer partiellen Differentialgleichung versteht man eine Gleichung oder allgemeiner ein System von Gleichungen für eine unbekannte Funktion in zumindest zwei Variablen und gewisse partielle Ableitungen; falls mehrere Gleichungen auftreten, spricht man auch präziser von einem System partieller Differentialgleichungen. Um zu betonen, daß eine der Variablen den zeitlichen Verlauf wiedergibt, sind die Bezeichnungen zeitabhängige partielle Differentialgleichung oder Evolutionsgleichung gebräuchlich.

**Lösungen.** Funktionen, die hinreichend regulär sind und eine gegebene partielle Differentialgleichung in allen Punkten des vorgegebenen Raumbereiches und des betrachteten Zeitintervalles erfüllen, werden als klassische Lösungen bezeichnet; da die an klassische Lösungen gestellten Bedingungen häufig einschränkend und unhandlich sind, geht man meist auf verallgemeinerte Lösungsbegriffe über.<sup>3</sup>

**Gewöhnliche Differentialgleichungen.** Partielle Differentialgleichungen stellen Erweiterungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen dar, wo Funktionen in einer einzigen Variablen gesucht sind.

**Anwendungsbereiche.** Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen sind wesentliche Mittel zur Beschreibung physikalischer Phänomene, beispielsweise in den Gebieten der Klassischen Mechanik, der Kontinuumsmechanik und der Quantenmechanik. Zu weiteren Anwendungsbereichen zählen die Naturwissenschaften, insbesondere der Physik verwandte Gebiete wie die Atmosphärenwissenschaften, die Biologie und die Chemie, sowie die Ingenieurwissenschaften und die Finanzwissenschaften.

**Mathematische Fragestellungen.** Das Gebiet der Angewandten Mathematik und im Speziellen das Gebiet der Mathematischen Modellierung befaßt sich mit der Herleitung von Differentialgleichungen aus physikalischen Grundprinzipien. Eine grundlegende Aufgabe des Gebietes der Analysis ist die Einführung geeigneter Lösungsbegriffe sowie die Angabe von Existenz- und Eindeigkeitsresultaten; Methoden der Funktionalanalysis bilden dabei wesentliche Hilfsmittel. Ein weiterer Aspekt ist die Auffassung einer Differentialgleichung als dynamisches System; Fragestellungen, die das qualitative Verhalten von Lösungen über lange Zeiträume oder die Kontrollierbarkeit des Systemes betreffen, sind insbesondere dem Gebiet der Mathematischen Systemtheorie zuzuordnen. Das Gebiet der Numerischen Mathematik beschäftigt sich mit der Konstruktion und Analyse effizienter Approximationsverfahren für Differentialgleichungen.

---

<sup>3</sup>Vgl. Übergang von Riemann-Integral auf Lebesgue-Integral.

## Von gewöhnlichen zu partiellen Differentialgleichungen.

- *Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung.* Im Rahmen der Klassischen Mechanik stützt man sich bei der mathematischen Modellierung physikalischer Vorgänge auf das Newton'sche Axiom, welches besagt, daß die Bahn eines Körpers entsprechend dem Prinzip

$$\text{Masse} \times \text{Beschleunigung} = \text{Summe der einwirkenden Kräfte}$$

verläuft. In einfachen Fällen führt dies auf eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung bezüglich der Zeit

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), \quad t \in (t_0, T);$$

zu bekannten Beispielen zählen der Ballwurf oder Schwingungsvorgänge. Für Mehrkörperprobleme wie das Planetensystem ergibt sich ein System von gekoppelten nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen.

- *Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung.* Betrachtet man die durch die Lösung und ihre Ableitung definierte Funktion

$$Y(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (t_0, T),$$

so läßt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} Y_1'(t) \\ Y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_2(t) \\ f(t, Y(t)) \end{pmatrix} = F(t, Y(t)), \quad t \in (t_0, T),$$

zurückführen; für theoretische Untersuchungen und auch für die Einführung von numerischen Methoden wird üblicherweise diese äquivalente Formulierung genützt. Im zuvor angegebenen Zusammenhang kann man die Untersuchung von gewöhnlichen Differentialgleichungen der Form

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in (t_0, T),$$

auch mit stark gedämpften Schwingungsvorgängen, wo keine Oszillationen sondern exponentielles Abfallen beobachtet wird, begründen.<sup>4</sup>

- *Resultate zur Existenz und Eindeutigkeit.* Unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen an die definierende Funktion

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^K \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

ist die Existenz einer Lösung

$$y: [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^K$$

---

<sup>4</sup>Vgl. *Stochastische partielle Differentialgleichungen* (einfaches Modell für Monomere).

der zugehörigen gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung sichergestellt; um auch die Eindeutigkeit der Lösung zu erreichen, werden häufig zusätzliche Anfangswerte vorgegeben.<sup>5</sup> Insgesamt erhält man damit ein Anfangswertproblem der Form

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in (t_0, T), \\ y(t_0) \text{ gegeben.} \end{cases}$$

- *Partielle Differentialgleichungen.* Bei der mathematischen Modellierung von Vielteilchen-Systemen, beispielsweise im Bereich der Molekulardynamik, treten Systeme gekoppelter nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen hoher Dimension  $M \gg 1$  auf. Ein möglicher Zugang ist es, anstelle eines solchen hochdimensionalen Systemes eine nichtlineare partielle Differentialgleichung, welche man unter geeigneten Skalierungsannahmen und mittels Grenzprozessen erhält, zu untersuchen; um die Eindeutigkeit von Lösungen erreichen zu können, sind neben Anfangsbedingungen auch geeignete Randbedingungen vorzugeben. Dieser Übergang auf ein reduziertes Modell entspricht im Allgemeinen der Vernachlässigung individueller Eigenschaften der einzelnen Teilchen.
- *Resultate zur Existenz und Eindeutigkeit.* Im Gegensatz zum Gebiet gewöhnlicher Differentialgleichungen gibt es bei partiellen Differentialgleichungen keine ähnlich allgemeingültigen Resultate zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Vielmehr ist es notwendig, für verschiedene Problemklassen unterschiedliche mathematische Theorien zu verwenden; gegebenenfalls ist es sogar erforderlich, für eine vorliegende partielle Differentialgleichung spezielle Methoden weiter zu entwickeln.

**Lösungsbegriff von Hadamard.** Bei der Untersuchung der Lösbarkeit von Anfangsrandwertproblemen für partielle Differentialgleichungen orientiert man sich im Allgemeinen am Lösungsbegriff von Hadamard.<sup>6</sup> Neben der Herleitung von Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit befaßt man sich mit der Frage der Stabilität. In diesem Zusammenhang versteht man darunter die stetige Abhängigkeit von Problemdaten; insbesondere analysiert man die Auswirkungen kleiner Änderungen von Anfangswerten, Randwerten oder Parameterwerten auf Lösungen. Falls alle Forderungen erfüllt sind, spricht man von einem korrekt gestellten Problem.

**Klassische und abgeschwächte Lösungsbegriffe.** Bei einer partiellen Differentialgleichung lassen zusätzlich vorgeschriebene Randbedingungen häufig keine Lösung im klassischen Sinn zu, d.h. es existiert keine stetig partiell differenzierbare Funktion, welche sowohl die Differentialgleichung als auch die Randbedingungen in allen Punkten erfüllt. Aus diesem Grund ist es notwendig, den Begriff einer Lösung abzuschwächen und geringere Regularitäts- und

<sup>5</sup>Vgl. Fixpunktsatz von Brouwer (Aussage zur Existenz) oder Fixpunktsatz von Banach (Aussage zur Existenz und Eindeutigkeit) und darauf basierende Resultate wie der Satz von Peano oder der Satz von Picard–Lindelöf.

<sup>6</sup>Jacques Hadamard (1865 – 1963).

Kompatibilitätseigenschaften zu fordern; gebräuchliche Mittel sind in diesem Zusammenhang distributionelle partielle Ableitungen oder verallgemeinerte partielle Ableitungen. Im Prinzip entspricht der Übergang von klassischen auf schwache Lösungen der Betrachtung von zugehörigen Integralgleichungen; man nützt jedoch weiterhin kompakte Formulierungen als Differentialgleichungen. Aufgrund der zusätzlichen Integration haben die Werte von Funktionen auf Nullmengen keinen Einfluß auf das Resultat.

- (i) *Laplace-Gleichungen.* Die folgenden Überlegungen zeigen, daß selbst für stationäre lineare Gleichungen wie Laplace-Gleichungen unter inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen auf beschränkten Gebieten

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\ u(x) = r(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

im Allgemeinen keine klassischen Lösungen  $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$  existieren.<sup>7</sup>

- (ii) *Poisson-Gleichungen.* Man beachte, daß man Laplace-Gleichungen unter inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen mittels linearer Transformationen auf Poisson-Gleichungen unter homogenen Dirichlet-Randbedingungen überführen kann. In der obigen Situation setzt man

$$\begin{aligned} v: \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}: x \longmapsto v(x) = u(x) - r(x), \\ \Delta v(x) &= \Delta u(x) - \Delta r(x) = -\Delta r(x), & x \in \Omega, \\ v(x) &= u(x) - r(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

und erhält somit eine Poisson-Gleichung unter homogenen Dirichlet-Randbedingungen (wobei  $f = -\Delta r$ )

$$\begin{cases} \Delta v(x) = f(x), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\ v(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

- (iii) *Gegenbeispiel.* Auf einen Widerspruch zur Annahme der Existenz einer klassischen Lösung kommt man beispielsweise in zwei Dimensionen, wenn man als Raumbereich das Einheitsquadrat

$$\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$$

und zur Vorgabe der Randwerte die quadratische Funktion

$$r: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}: (x, y) \longmapsto x^2$$

---

<sup>7</sup>*Bemerkung.* Der Begriff der klassischen Lösung ist in der Literatur nicht einheitlich definiert und sollte daher in der jeweiligen Situation präzisiert werden; hier wird eine vergleichsweise einschränkende Regularitätsbedingung, nämlich zweimalige stetige partielle Differenzierbarkeit auf dem Abschluß des räumlichen Gebietes, gefordert.

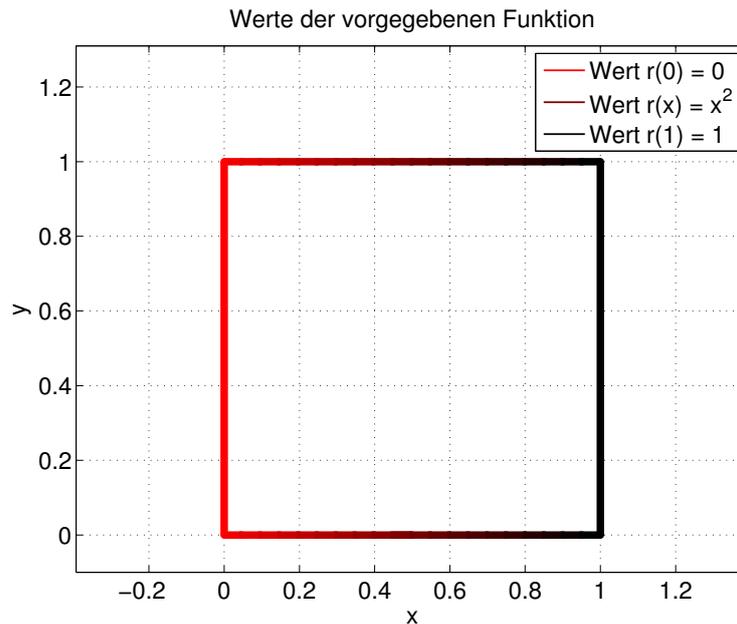


Abbildung 1.1: Laplace-Gleichung in zwei Raumdimensionen. Vorgegebene Lösungswerte am Rand des Einheitsquadrates.

betrachtet; die resultierende Laplace-Gleichung lautet somit

$$\begin{cases} \partial_{xx}u(x, y) + \partial_{yy}u(x, y) = 0, & (x, y) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \\ u(x, y) = x^2, & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Der Rand des Einheitsquadrates ist durch die Menge (Ecken plus Kanten)

$$\begin{aligned} \partial\Omega = & \{(0, 0)\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1)\} \cup \{(1, 0)\} \cup \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in (0, 1)\} \\ & \cup \{(1, 1)\} \cup \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1)\} \cup \{(0, 1)\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in (0, 1)\} \end{aligned}$$

gegeben; die Randbedingungen entsprechen also den Relationen

$$\begin{cases} u(0, 0) = 0, & u(x, 0) = x^2, & x \in (0, 1), & u(1, 0) = 1, & u(1, y) = 1, & y \in (0, 1), \\ u(1, 1) = 1, & u(x, 1) = x^2, & x \in (0, 1), & u(0, 1) = 0, & u(0, y) = 0, & y \in (0, 1), \end{cases}$$

vgl. Abbildung 1.1. Für eine klassische Lösung, d.h. für eine bis zum Rand hin zweimal stetig differenzierbare Funktion (einseitige Grenzwerte)

$$u \in \mathcal{C}^2([0, 1] \times [0, 1], \mathbb{R}),$$

würde zweimaliges Differenzieren und Auswerten am unteren oder oberen Rand auf

$$\begin{aligned} u(x, 0) = x^2, & \quad \partial_{xx}u(x, 0) = 2, & \quad \partial_{yy}u(x, 0) = 0, & \quad x \in (0, 1), \\ u(x, 1) = x^2, & \quad \partial_{xx}u(x, 1) = 2, & \quad \partial_{yy}u(x, 1) = 0, & \quad x \in (0, 1), \end{aligned}$$

führen, woraus sich ein Widerspruch zur Laplace-Gleichung

$$0 = \partial_{xx}u(x,0) + \partial_{yy}u(x,0) = 2, \quad 0 = \partial_{xx}u(x,1) + \partial_{yy}u(x,1) = 2, \quad x \in (0,1), \quad \zeta$$

ergibt.

- (iv) *Kompatibilitätsbedingungen.* Beim zuvor betrachteten Gegenbeispiel liegt folgende Situation für die Laplace-Gleichung bzw. für die äquivalente Formulierung als Poisson-Gleichung vor

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = r(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta(u-r)(x) = -\Delta r(x), & x \in \Omega, \\ (u-r)(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Da die geforderten Randbedingungen nicht konsistent mit der partiellen Differentialgleichung sind, d.h. die vorgegebene Funktion erfüllt die Laplace-Gleichung nicht in allen Randpunkten

$$\exists x_0 \in \partial\Omega: \quad \Delta r(x_0) \neq 0,$$

führt die Annahme, daß die zweiten partiellen Ableitungen der Lösung auf  $\bar{\Omega}$  stetig sind, auf einen Widerspruch (verwende  $\Delta u(x) = 0$  für  $x \in \Omega$ )

$$\forall x_0 \in \partial\Omega: \quad 0 = \lim_{\substack{x \in \Omega \\ x \rightarrow x_0}} \Delta u(x) \stackrel{!}{=} \Delta u(x_0) = \Delta r(x_0). \quad \zeta$$

Aufgrund von relevanten Anwendungen ist man dennoch an der Lösung solcher Randwertprobleme interessiert und geht von strikten Formulierungen auf abgeschwächte Formulierungen, wo Funktionswerte auf Nullmengen keine Rolle spielen, über. Lösungsdarstellungen, die mittels Distributionen-Theorie bzw. der Theorie von Fourier-Reihen hergeleitet werden, sind im Folgenden angegeben; detaillierte Erklärungen folgen an späterer Stelle.

- (v) *Lösungsdarstellungen mittels Green'schen Funktionen.* Bei Kenntnis zugehöriger Green'scher Funktionen (mit Dirac'scher Delta-Distribution, Green'sche Funktionen hängen vom Raumgebiet ab)

$$\Delta G(x, \cdot) = \delta_x, \quad x \in \Omega,$$

erhält man für Poisson-Gleichungen und entsprechend für Laplace-Gleichungen Lösungsdarstellungen in Integralform

$$v(x) = \int_{\Omega} G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

welche im Rahmen der Distributionen-Theorie gerechtfertigt werden; eine formale Rechnung suggeriert, daß die gewünschte Identität gilt

$$\Delta v(x) = \int_{\Omega} \Delta G(x, \xi) f(\xi) d\xi = \int_{\Omega} \delta_x(\xi) f(\xi) d\xi = f(x), \quad x \in \Omega.$$

(vi) *Lösungsdarstellungen mittels Fourier-Reihen.* Im zuvor betrachteten Gegenbeispiel ergibt sich eine konstante Funktion

$$f(x, y) = -(\partial_{xx} r(x, y) + \partial_{yy} r(x, y)) = -2, \quad (x, y) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1);$$

offensichtlich folgt mit Hilfe der Relationen

$$u = v + r, \quad v = -2w,$$

aus einer Lösungsdarstellung für die Poisson-Gleichung mit normierter rechter Seite

$$\begin{cases} \Delta w(x, y) = 1, & x \in \Omega, \\ w(x, y) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

auch eine Lösungsdarstellung der ursprünglichen Laplace-Gleichung. Aufgrund der speziellen Struktur des Einheitsquadrates, gegeben als kartesisches Produkt von Intervallen, vereinfacht sich die zuvor angegebene Integraldarstellung wesentlich. Genauer, hier ist ein Zugang basierend auf ungerader Fortsetzung und Fourier-Reihenansatz zielführend; wie unten ausgeführt, erhält man folgende Lösungsdarstellung mittels Sinus-Funktionen

$$w(x, y) = -\frac{16}{\pi^4} \sum_{\substack{m=(m_1, m_2) \in \mathbb{N}_{\geq 1}^2 \\ m_1, m_2 \text{ ungerade}}} \frac{1}{m_1 m_2 (m_1^2 + m_2^2)} \sin(m_1 \pi x) \sin(m_2 \pi y),$$

$$u(x, y) = -2w(x, y) + x^2, \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

Approximationen, welche aus einer Einschränkung der Indexmenge  $\mathbb{N}_{\geq 1}^2$  auf

$$\mathcal{M} = \{m = (m_1, m_2) \in \mathbb{N}_{\geq 1}^2 : m_1, m_2 \leq M\}, \quad M \in \mathbb{N}_{\geq 1},$$

resultieren, sind in Abbildung 1.2 illustriert. Abbildung 1.3 veranschaulicht die Unstetigkeit der zweiten Ableitungen am Rand des Einheitsquadrates; im Inneren beobachtet man Konvergenz der Reihe

$$\Delta w(x, y) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{\substack{m=(m_1, m_2) \in \mathbb{N}_{\geq 1}^2 \\ m_1, m_2 \text{ ungerade}}} \frac{1}{m_1 m_2} \sin(m_1 \pi x) \sin(m_2 \pi y), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1],$$

gegen die konstante Einsfunktion, während die Funktionswerte am Rand aufgrund der auftretenden Sinus-Funktionen gleich Null sind. Man beachte, daß die Relation  $\Delta w = 1$  nur auf einer Nullmenge nicht erfüllt ist; bei zusätzlicher Integration würde dies also keine Rolle spielen.

*Erklärung.* <sup>8</sup> Man verwendet, daß die durch

$$S_m : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto S_m(x) = \sqrt{2} \sin(m \pi x), \quad m \in \mathbb{N}_{\geq 1},$$

<sup>8</sup> *Bemerkung.* Zusätzliche Erklärungen in einem allgemeineren Zusammenhang finden sich in JÜNGEL (2017), siehe insbesondere Satz 6.12 und Satz 6.13.

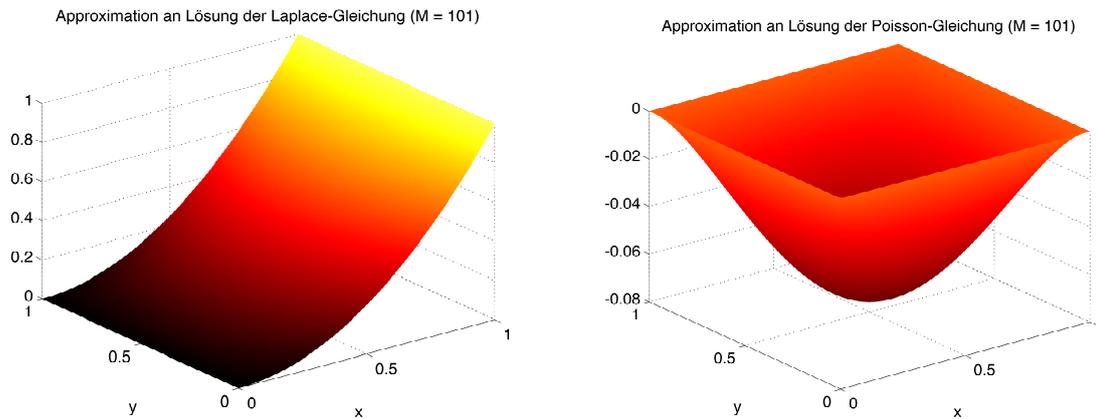


Abbildung 1.2: Zweidimensionale Laplace-Gleichung unter inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen und entsprechende Poisson-Gleichung unter homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Approximationen an Lösungswerte basierend auf Sinus-Reihenansatz.

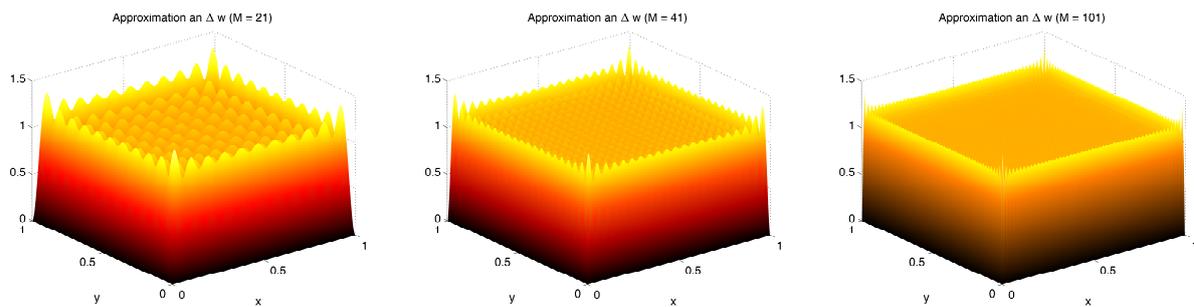


Abbildung 1.3: Zweidimensionale Poisson-Gleichung mit normierter rechter Seite unter homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Approximationen an Funktionswerte von  $\Delta w$  basierend auf Sinus-Reihenansatz für Lösung  $w$ ; im Inneren des Einheitsquadrates ist Funktion näherungsweise Eins, am Rand gleich Null.

definierte Familie von Sinus-Funktionen ein Orthonormalsystem bezüglich der  $L^2$ -Norm bildet (mit Kronecker-Delta)

$$(S_m | S_{\tilde{m}})_{L^2} = \delta_{m\tilde{m}} = \begin{cases} 1, & m = \tilde{m}, \\ 0, & m \neq \tilde{m}, \end{cases} \quad m, \tilde{m} \in \mathbb{N}_{\geq 1},$$

und Eigenfunktionen der zweiten Ableitung umfaßt

$$\partial_{xx} S_m = \lambda_m S_m, \quad \lambda_m = -m^2 \pi^2, \quad m \in \mathbb{N}_{\geq 1};$$

die Orthogonalitätsrelation folgt mit Hilfe der Euler'schen Formel

$$\begin{aligned}
(S_m | S_{\tilde{m}})_{L^2} &= \int_{[0,1]} S_m(x) S_{\tilde{m}}(x) dx \\
&= 2 \int_{[0,1]} \sin(m\pi x) \sin(\tilde{m}\pi x) dx \\
&= 2 \int_{[0,1]} \frac{1}{2i} (e^{im\pi x} - e^{-im\pi x}) \frac{1}{2i} (e^{i\tilde{m}\pi x} - e^{-i\tilde{m}\pi x}) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{[0,1]} (e^{i(m-\tilde{m})\pi x} + e^{-i(m-\tilde{m})\pi x} - e^{i(m+\tilde{m})\pi x} - e^{-i(m+\tilde{m})\pi x}) dx \\
&= \int_{[0,1]} (\cos((m-\tilde{m})\pi x) - \cos((m+\tilde{m})\pi x)) dx, \quad m, \tilde{m} \in \mathbb{N}_{\geq 1},
\end{aligned}$$

durch Betrachtung des Funktionsgraphen der Cosinus-Funktion

$$\int_{[0,1]} \cos(\ell\pi x) dx = 0, \quad \ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

und Unterscheidung der beiden Fälle

$$\begin{aligned}
(S_m | S_m)_{L^2} &= \int_{[0,1]} (1 - \cos(2m\pi x)) dx = 1, \quad m \in \mathbb{N}_{\geq 1}, \\
(S_m | S_{\tilde{m}})_{L^2} &= 0, \quad m, \tilde{m} \in \mathbb{N}_{\geq 1}, \quad m \neq \tilde{m}.
\end{aligned}$$

Weiters zeigt eine elementare Rechnung die Identität

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} S_m(x) dx &= \sqrt{2} \int_{[0,1]} \sin(m\pi x) dx = -\frac{\sqrt{2}}{m\pi} \cos(m\pi x) \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{m\pi} (1 - (-1)^m) \\
&= \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{m\pi}, & m \text{ ungerade,} \\ 0, & m \text{ gerade,} \end{cases} \quad m \in \mathbb{N}_{\geq 1}.
\end{aligned}$$

Die Erweiterung auf zwei Raumdimensionen erfolgt durch Bildung des Tensorproduktes

$$\begin{aligned}
S_m &= S_{m_1} \otimes S_{m_2} : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x = (x_1, x_2) \longmapsto S_{m_1}(x_1) S_{m_2}(x_2), \\
m &= (m_1, m_2) \in \mathbb{N}_{\geq 1}^2;
\end{aligned}$$

einstweilen ist anstelle von  $(x, y)$  die Bezeichnung  $x = (x_1, x_2)$  zweckmäßiger. Offensichtlich gelten die Relationen

$$\begin{aligned}
(S_m | S_{\tilde{m}})_{L^2} &= \int_{[0,1] \times [0,1]} S_m(x) S_{\tilde{m}}(x) dx = \delta_{m\tilde{m}}, \\
\Delta S_m &= \lambda_m S_m, \quad \lambda_m = -(m_1^2 + m_2^2) \pi^2, \\
\chi : [0,1] \times [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 1, \quad (\chi | S_m)_{L^2} = \begin{cases} \frac{8}{m_1 m_2 \pi^2}, & m_1, m_2 \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{ansonsten,} \end{cases} \\
m &= (m_1, m_2) \in \mathbb{N}_{\geq 1}^2, \quad \tilde{m} = (\tilde{m}_1, \tilde{m}_2) \in \mathbb{N}_{\geq 1}^2.
\end{aligned}$$

Ausgangspunkt zur Herleitung einer Lösungsdarstellung ist folgender Reihenansatz mit reellen Koeffizienten

$$w = \sum_{m \in \mathbb{N}_{\geq 1}^2} c_m S_m, \quad c_m \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}_{\geq 1}^2;$$

Einsetzen in die Poisson-Gleichung

$$\Delta w = \chi, \quad \sum_{m \in \mathbb{N}_{\geq 1}^2} c_m \Delta S_m = \chi,$$

und Anwendung der zuvor hergeleiteten Relationen führt auf

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{N}_{\geq 1}^2} \lambda_m c_m S_m &= \chi, \\ \sum_{m \in \mathbb{N}_{\geq 1}^2} \lambda_m c_m (S_m | S_{\tilde{m}})_{L^2} &= (\chi | S_{\tilde{m}})_{L^2}, \quad \tilde{m} \in \mathbb{N}_{\geq 1}^2, \\ c_m = \frac{1}{\lambda_m} (\chi | S_m)_{L^2} &= \begin{cases} -\frac{8}{m_1 m_2 (m_1^2 + m_2^2) \pi^4}, & m_1, m_2 \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{ansonsten,} \end{cases} \quad m = (m_1, m_2) \in \mathbb{N}_{\geq 1}^2, \\ w &= -\frac{8}{\pi^4} \sum_{\substack{m=(m_1, m_2) \in \mathbb{N}_{\geq 1}^2 \\ m_1, m_2 \text{ ungerade}}} \frac{1}{m_1 m_2 (m_1^2 + m_2^2)} S_{m_1} \otimes S_{m_2}; \end{aligned}$$

dies impliziert das angegebene Resultat. Detaillierte Erklärungen zur Rechtfertigung des Sinus-Reihenansatzes werden an späterer Stelle im Zusammenhang mit Diffusionsgleichungen ergänzt.  $\diamond$

- (vii) *Bemerkung.* Man beachte, daß in den zuvor betrachteten Beispielen die partiellen Differentialgleichungen und die Randbedingungen durch reguläre Funktionen definiert sind und aufgrund von Inkompatibilitäten keine klassischen Lösungen existieren. Ergänzend sei noch bemerkt, daß in Hinsicht auf Anwendungen auch die Betrachtung von nicht-glaten Daten von Interesse ist; in solchen Situationen ist die Einführung von verallgemeinerten Lösungsbegriffen unvermeidlich. Ein einfaches Gegenbeispiel ist die Differentialgleichung

$$\partial_x u(x) = f(x), \quad x \in (0, 1),$$

mit unstetiger definierender Funktion (wobei  $c_1 \in \mathbb{R}$ )

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}), \\ c_1, & x = \frac{1}{2}, \\ -1, & x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Offensichtlich existiert keine stetig differenzierbare Lösung; es ist jedoch naheliegend, sämtliche Funktionen der Form (wobei  $c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ )

$$u(x) = \begin{cases} x + c_2, & x \in (0, \frac{1}{2}), \\ c_3, & x = \frac{1}{2}, \\ -x + c_4, & x \in (\frac{1}{2}, 1), \end{cases}$$

als verallgemeinerte Lösungen aufzufassen.

**Kompakte Formulierungen als Evolutionsgleichungen.** Für theoretische Untersuchungen und auch für die Angabe und Analyse von numerischen Verfahren ist es oft hilfreich, zeitabhängige partielle Differentialgleichungen in Anlehnung an gewöhnliche Differentialgleichungen zu formulieren; um zu betonen, daß die gesuchten Lösungen Werte in Funktionenräumen, meist mit der Struktur von Banach-Räumen, annehmen, spricht man von abstrakten Differentialgleichungen oder von abstrakten Evolutionsgleichungen. Dieser Zugang wird beispielsweise im Rahmen der Semigruppen-Theorie und der Theorie monotoner Operatoren genützt.

- (i) *Partielle Differentialgleichungen.* Als einfache Beispiele parabolischer Anfangsrandwertprobleme werden eindimensionale inhomogene lineare Diffusionsgleichungen betrachtet; zusätzlich werden homogene Dirichlet-Randbedingungen auf Intervallen der Form  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  und Anfangsbedingungen  $U_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vorgegeben

$$\begin{cases} \partial_t U(x, t) = \partial_{xx} U(x, t) + B(x, t), & (x, t) \in (a, b) \times (t_0, T), \\ U(a, t) = 0 = U(b, t), & t \in [t_0, T], \\ U(x, t_0) = U_0(x), & x \in [a, b]. \end{cases}$$

- (ii) *Evolutionsgleichungen.* Bei kompakten Formulierungen der Anfangsrandwertprobleme als abstrakte Cauchy-Probleme

$$\begin{cases} u'(t) = A u(t) + b(t), & t \in (t_0, T), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

entspricht der Differentialoperator  $\partial_{xx}$  unstetigen linearen Operatoren

$$A : D(A) \subset X \longrightarrow X;$$

die gegebenen Inhomogenitäten führen auf Funktionen der Form  $b : [t_0, T] \rightarrow X$ .

- (iii) *Lösungsbegriffe.* Wesentlich für die theoretische Analyse, etwa für die Herleitung von Resultaten zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen, ist die Wahl der zugrundeliegenden Funktionenräume  $X$  und insbesondere die Definition der Teilräume  $D(A) \subset X$ , welche die geforderten Regularitätseigenschaften sowie die vorgegebenen Randbedingungen widerspiegeln. Betrachtet man beispielsweise den Raum stetiger Funktionen versehen mit der Maximumsnorm als zugrundeliegenden Banach-Raum, führt dies auf

$$X = \left( \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathcal{C}} \right), \\ A : D(A) = \left\{ v \in \mathcal{C}^2((a, b), \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) : v(a) = 0 = v(b) \right\} \longrightarrow X : v \longmapsto \partial_{xx} v,$$

was dem Begriff von klassischen Lösungen entspricht.<sup>9</sup> Wählt man stattdessen den Hilbert-Raum der quadratintegralen Funktionen als zugrundeliegenden Raum

$$X = \left( L^2([a, b], \mathbb{R}), (\cdot | \cdot)_{L^2}, \|\cdot\|_{L^2} \right),$$

$$A : D(A) = H^2([a, b], \mathbb{R}) \cap H_0^1([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow X : v \longmapsto \partial_{xx} v,$$

entspricht dies dem Übergang auf Lösungen in einem abgeschwächten Sinn; die dabei auftretenden Sobolev-Räume werden an späterer Stelle eingeführt. Im ersten Fall ist die zweite Ableitung  $\partial_{xx}$  wie bekannt definiert; im zweiten Fall bezeichnet  $\partial_{xx} v$  eine Verallgemeinerung davon.

**Autonome Evolutionsgleichungen.** Bei autonomen Evolutionsgleichungen wird als Anfangszeitpunkt üblicherweise  $t_0 = 0$  angenommen; betrachtet man nämlich ein Anfangswertproblem der Form (wobei  $u : [t_0, T] \rightarrow X$ )

$$\begin{cases} u'(t) = F(u(t)), & t \in (t_0, T), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

so führt die Substitution  $v : [0, T - t_0] \rightarrow X : s \mapsto v(s) = u(s + t_0)$  wegen

$$\begin{cases} v'(s) = u'(s + t_0) = F(u(s + t_0)) = F(v(s)), & s \in (0, T - t_0), \\ v(0) = u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

auf ein Anfangswertproblem der Form (wobei  $\tilde{T} = T - t_0$ )

$$\begin{cases} u'(t) = F(u(t)), & t \in (0, \tilde{T}), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

**Notwendigkeit verschiedener Theorien.** Die im nächsten Abschnitt angeführten Illustrationen deuten darauf hin, daß es aufgrund der unterschiedlichen charakteristischen Eigenschaften von Lösungen keine universelle Theorie zur Behandlung von partiellen Differentialgleichungen und insbesondere keine universelle Lösungsmethode gibt; selbst bei linearen partiellen Differentialgleichungen steht keine allgemein anwendbare direkte Lösungsmethode zur Verfügung. Dies steht im Gegensatz zu linearen Gleichungssystemen, wo Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen sowie die Berechnung von Lösungen mittels Gauß'schem Eliminationsverfahren möglich sind. Ein ähnlich elementarer Zugang ist bei gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten anwendbar. Wesentlich komplexer ist die Situation bereits bei linearen Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten, wo nach dem SATZ VON MALGRANGE–EHRENPREIS die Existenz einer Fundamentallösung sichergestellt ist; dessen Beweis basiert nämlich auf dem ZORN'SCHEN LEMMA und dem SATZ VON HAHN–BANACH.<sup>10</sup>

<sup>9</sup>Vgl. Illustration zu Laplace- und Poisson-Gleichungen. Hier wurde die Bedingung  $v \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$  bereits etwas abgeschwächt und nur mehr zweimalige Differenzierbarkeit im Inneren gefordert.

<sup>10</sup>Bemerkungen.

**Ausblick.** Da das Thema *Partielle Differentialgleichungen* sehr komplex und umfangreich ist, können im Rahmen einer einführenden Lehrveranstaltung nur einzelne Aspekte besprochen werden; der Fokus liegt naturgemäß auf zeitabhängigen linearen partiellen Differentialgleichungen und Grundlagen der linearen Funktionalanalysis. Der detaillierten Behandlung wesentlicher Theorien sind weitere Lehrveranstaltungen gewidmet; im Rahmen der *Spektraltheorie* werden Grundlagen der Theorie selbstadjungierter Operatoren auf Hilbert-Räumen mit Anwendungen auf lineare Schrödinger-Gleichungen behandelt, im Rahmen der *Operatorthorie* Fixpunktsätze und Grundlagen der Theorie monotoner Operatoren mit Anwendungen auf nichtlineare parabolische Gleichungen, im Rahmen der *Stochastischen partiellen Differentialgleichungen* Grundlagen der Theorie von Semigruppen und Anwendungen auf parabolische und hyperbolische Gleichungen.

- 
- (i) *Erinnerung.* Eine Teilordnung auf einer Menge  $M$  ist eine Relation  $\leq$ , welche die Eigenschaften transitiv, reflexiv und antisymmetrisch erfüllt. Falls für je zwei Elemente  $m_1, m_2 \in M$  die Relation  $m_1 \leq m_2$  oder  $m_2 \leq m_1$  gültig ist, liegt eine totale Ordnung vor.
- (ii) *Lemma von Zorn.* Es bezeichne  $M \neq \emptyset$  eine mit einer Teilordnung  $\leq$  versehene Menge; jede total geordnete Teilmenge  $K \subseteq M$  besitze eine obere Schranke  $m_K \in M$

$$\forall k \in K \quad \exists m_K \in M: \quad k \leq m_K.$$

Dann existiert ein maximales Element  $m^* \in M$ , das heißt, es gilt

$$\exists m^* \in M \quad \forall m \in M: \quad (m^* \leq m \implies m^* = m);$$

dieses maximale Element ist nicht notwendigerweise eindeutig bestimmt.

- (iii) *Satz von Hahn–Banach.* Es bezeichne  $X$  einen normierten Raum und

$$X^* = \{F: X \rightarrow \mathbb{K} \text{ linear und stetig}\}$$

den zugehörigen Dualraum. Jedes auf einem Unterraum  $U \subseteq X$  definierte stetige lineare Funktional kann normerhaltend auf  $X$  fortgesetzt werden

$$\forall f \in U^* \quad \exists F \in X^* \text{ mit den Eigenschaften } F|_U = f \text{ und } \|F\|_{\mathbb{K} \leftarrow X} = \|f\|_{\mathbb{K} \leftarrow U}.$$

### 1.3 Erste Illustrationen

**Illustrationen.** Die im Folgenden erwähnten und in Hinblick auf Anwendungen relevanten zeitabhängigen partiellen Differentialgleichungen illustrieren die Vielfältigkeit und Komplexität des Gebietes. Die vorgenommene Klassifizierung in

- Erhaltungsgleichungen,
- parabolische Gleichungen,
- Schrödinger-Gleichungen und
- Wellengleichungen

bietet eine grobe Richtlinie; begonnen wird jeweils mit der Angabe von elementaren linearen Gleichungen, welche eine für die gesamte Klasse charakteristische Form verdeutlichen sollen. Zur Vereinfachung der Darstellungen werden spezielle Normierungen der partiellen Differentialgleichungen angenommen. Um Abhängigkeiten von Raum und Zeit offensichtlich zu machen, wird die dem klassischen Lösungsbegriff entsprechende Schreibweise mit punktweiser Auswertung verwendet; zum besseren Verständnis sind teilweise jene Formulierungen, welche dem Spezialfall von zwei Raumdimensionen entsprechen, ergänzt. Für erste theoretische Untersuchungen wird als Raumbereich meist der reelle euklidische Raum betrachtet, da man dann zusätzliche Kompatibilitätsbedingungen aufgrund von Randbedingungen außer Acht lassen kann.

#### Erhaltungsgleichungen.

- (i) *Elementare lineare Gleichungen.* Homogene lineare Advektionsgleichungen haben die Form (wobei  $0 \neq c \in \mathbb{R}^d$ )

$$\begin{aligned}\partial_t u(x, t) &= \nabla \cdot (c u(x, t)), \\ d = 2: \quad \partial_t u(x, y, t) &= c_1 \partial_x u(x, y, t) + c_2 \partial_y u(x, y, t).\end{aligned}$$

- (ii) *Verallgemeinerungen.* Verallgemeinerungen von Advektionsgleichungen führen auf lineare Erhaltungsgleichungen (wobei  $c: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ )

$$\begin{aligned}\partial_t u(x, t) &= \nabla \cdot (c(x) u(x, t)), \\ d = 2: \quad \partial_t u(x, y, t) &= \partial_x (c_1(x, y) u(x, y, t)) + \partial_y (c_2(x, y) u(x, y, t)),\end{aligned}$$

sowie auf nichtlineare Erhaltungsgleichungen (wobei  $f: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ )

$$\begin{aligned}\partial_t u(x, t) &= \nabla \cdot f(x, u(x, t)), \\ d = 2: \quad \partial_t u(x, y, t) &= \partial_x (f_1(x, y, u(x, y, t))) + \partial_y (f_2(x, y, u(x, y, t))).\end{aligned}$$

Die Namensgebung erklärt sich dadurch, daß das Integral über den gesamten Raumreich eine Erhaltungsgröße<sup>11</sup> ist (Erhaltung der Gesamtmasse bzw. Teilchenzahl)

$$M(t) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x, t) \, dx, \quad t \in [t_0, T].$$

- (iii) *Spezielle nichtlineare Erhaltungsgleichungen und Modifikationen.* Bekannte nichtlineare Erhaltungsgleichungen sind Burgers-Gleichungen, etwa<sup>12</sup>

$$d = 1: \quad \partial_t u(x, t) = -u(x, t) \partial_x u(x, t);$$

die Erweiterung auf mehrere Raumdimensionen lautet (wobei  $u : \mathbb{R}^d \times (t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ , vgl. Navier–Stokes-Gleichungen)

$$\partial_t u(x, t) = -(u(x, t) \cdot \nabla) u(x, t).$$

Viskose Burgers-Gleichungen ergeben sich bei der Hinzunahme von regularisierenden Termen und sind der Klasse der parabolischen Gleichungen zuzuordnen; in einer Raumdimension betrachtet man beispielsweise (wobei  $0 < \varepsilon \ll 1$ )

$$d = 1: \quad \partial_t u(x, t) = \varepsilon \partial_{xx} u(x, t) - u(x, t) \partial_x u(x, t).$$

### Parabolische Gleichungen.

- (i) *Elementare lineare Gleichungen.* Homogene lineare Diffusionsgleichungen haben die Form (wobei  $\alpha > 0$ )

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) &= \alpha \Delta u(x, t), \\ d = 2: \quad \partial_t u(x, y, t) &= \alpha \partial_{xx} u(x, y, t) + \alpha \partial_{yy} u(x, y, t). \end{aligned}$$

---

<sup>11</sup>Bemerkungen.

- (i) Für eine integrierbare reguläre Lösung folgt die Erhaltungseigenschaft im Fall einer Raumdimension aus der Relation (Bedingung für Integrierbarkeit von  $u$  auf  $\mathbb{R}$ , Bedingung an  $f$ , Differentiation bezüglich der Zeit und Einsetzen der Differentialgleichung)

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) &= 0, & \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, 0) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 0), \\ M'(t) = \int_{\mathbb{R}} \partial_t u(x, t) \, dx &= \int_{\mathbb{R}} \partial_x f(x, u(x, t)) \, dx = f(x, u(x, t)) \Big|_{x=-\infty}^{\infty} = 0, & t \in (t_0, T). \end{aligned}$$

- (ii) Nichtlineare Erhaltungsgleichungen haben häufig die speziellere Form

$$\partial_t u(x, t) = \nabla \cdot f(u(x, t)),$$

d.h. die definierende Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  hängt nicht explizit von den räumlichen Variablen ab; in diesem Fall wird die zuvor geforderte Bedingung an  $f$  nicht benötigt.

<sup>12</sup>Bemerkung. Die angegebene Burgers-Gleichung ist durch eine quadratische Funktion definiert

$$d = 1: \quad \partial_t u(x, t) = \partial_x f(u(x, t)), \quad f(v) = -\frac{1}{2} v^2, \quad f'(v) = -v.$$

- (ii) *Stationäre Gleichungen.* Bei linearen Diffusionsgleichungen treten als zugehörige stationäre Gleichungen Laplace-Gleichungen und Poisson-Gleichungen auf<sup>13</sup>

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= 0, \\ \Delta u(x) &= f(x).\end{aligned}$$

- (iii) *Verallgemeinerungen.* Allgemeiner betrachtet man durch elliptische Differentialoperatoren definierte partielle Differentialgleichungen wie etwa (Komponentenfunktionen von  $\alpha : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  seien positiv und symmetrisch)

$$\begin{aligned}\partial_t u(x, t) &= \nabla \cdot (\alpha(x) \nabla u(x, t)), \\ d = 2: \quad \partial_t u(x, y, t) &= \nabla \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11}(x, y) & \alpha_{12}(x, y) \\ \alpha_{12}(x, y) & \alpha_{22}(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x u(x, y, t) \\ \partial_y u(x, y, t) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Semi-lineare parabolische Gleichungen haben beispielsweise die Form (linearer Differentialoperator zweiter Ordnung bezüglich der räumlichen Variablen, Auswertung der Nichtlinearität  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  erfordert geringere Regularitätseigenschaften der Lösung)

$$\partial_t u(x, t) = \nabla \cdot (\alpha(x) \nabla u(x, t)) + f(x, u(x, t), \nabla u(x, t));$$

entsprechend der betrachteten Anwendungen spricht man gegebenenfalls von Diffusions-Advektions-Reaktions-Gleichungen. Falls die Koeffizienten des definierenden elliptischen Differentialoperators zusätzlich von Werten der Lösung oder ersten räumlichen Ableitungen abhängen, liegt eine quasi-lineare parabolische Gleichung vor

$$\partial_t u(x, t) = \nabla \cdot (\alpha(x, u(x, t), \nabla u(x, t)) \nabla u(x, t)) + f(x, u(x, t), \nabla u(x, t));$$

bei voll nichtlinearen parabolischen Gleichungen ist im Gegensatz dazu auch die Abhängigkeit von der höchsten räumlichen Ableitung nichtlinear. Auf die Klassifizierung in lineare, semi-lineare, quasi-lineare und voll nichtlineare Gleichungen wird an späterer Stelle nochmals eingegangen.

---

<sup>13</sup> *Bemerkungen.*

- (i) Klassische Lösungen von Laplace-Gleichungen werden als harmonische Funktionen bezeichnet.
- (ii) Da der negative Laplace-Operator positiv semi-definit ist, wird für die Laplace-Gleichung häufig folgende äquivalente Formulierung betrachtet
- $$-\Delta u(x) = 0.$$
- (iii) Wie zuvor illustriert, kann man Laplace-Gleichungen unter inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen mittels linearer Transformationen auf Poisson-Gleichungen unter homogenen Dirichlet-Randbedingungen überführen.
- (iv) Laplace-Gleichungen und Poisson-Gleichungen ergeben sich auch als stationäre Gleichungen für Schrödinger-Gleichungen oder Wellengleichungen.

- (iv) *Spezielle Diffusions-Reaktions-Gleichungen.* Bekannte Beispiele von Diffusions-Reaktions-Gleichungen sind die Fisher–KPP-Gleichung<sup>14</sup> (mit quadratischer Nichtlinearität  $f(v) = v(1 - v)$ )

$$\partial_t u(x, t) = \Delta u(x, t) + u(x, t) (1 - u(x, t))$$

und die Allen–Cahn-Gleichung<sup>15</sup> (mit kubischer Nichtlinearität  $f(v) = v(1 - v)(1 + v)$ )

$$\partial_t u(x, t) = \Delta u(x, t) + u(x, t) (1 - u(x, t)) (1 + u(x, t)).$$

Die Wahl  $f(v) = v^p$  oder  $f(v) = e^v$  führt auf Gleichungen, welche Singularitäten entwickeln; man spricht von Blow-up-Gleichungen.

- (v) *Equilibria.* Zeitlich unabhängige und zusätzlich räumlich unabhängige Lösungen von Diffusions-Reaktions-Gleichungen sind durch Nullstellen der definierenden nichtlinearen Funktionen gegeben; durch Bestimmung der ersten Ableitungen kann man Aussagen über die Stabilitätseigenschaften dieser Equilibria treffen. Bei der Fisher–KPP-Gleichung erhält man

$$f(v) = v(1 - v) = v - v^2 \stackrel{!}{=} 0, \quad f'(v) = 1 - 2v, \\ v_1^* = 0, \quad f'(v_1^*) = 1 > 0, \quad v_2^* = 1, \quad f'(v_2^*) = -2 < 0;$$

negative Werte der Ableitung implizieren asymptotische Stabilität, positive hingegen asymptotische Instabilität. Entsprechend ergeben sich für die Allen–Cahn-Gleichung die Relationen

$$f(v) = v(1 - v)(1 + v) = v - v^3 \stackrel{!}{=} 0, \quad f'(v) = 1 - 3v^2, \\ v_1^* = 0, \quad f'(v_1^*) = 1 > 0, \quad v_2^* = 1, \quad v_3^* = -1, \quad f'(v_2^*) = f'(v_3^*) = -2 < 0.$$

- (vi) *Spezielle nichtlineare Diffusionsgleichungen.* Bekannte Beispiele von nichtlinearen Diffusionsgleichungen sind durch sogenannte nichtlineare Laplace-Operatoren definiert (mit euklidischer Norm und Exponent  $p \in (1, 2) \cup (2, \infty)$ )

$$\partial_t u(x, t) = \nabla \cdot \left( \|\nabla u(x, t)\|_{\mathbb{R}^d}^{p-2} \nabla u(x, t) \right);$$

in zwei Raumdimensionen ergibt sich speziell

$$d = 2: \quad \|\nabla u(x, y, t)\|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{(\partial_x u(x, y, t))^2 + (\partial_y u(x, y, t))^2}, \\ \partial_t u(x, y, t) = \partial_x \left( \|\nabla u(x, y, t)\|_{\mathbb{R}^2}^{p-2} \partial_x u(x, y, t) \right) + \partial_y \left( \|\nabla u(x, y, t)\|_{\mathbb{R}^2}^{p-2} \partial_y u(x, y, t) \right).$$

<sup>14</sup>Die Fisher–KPP-Gleichung ist nach Fisher, Kolmogorov, Petrovsky und Piscounov benannt.

<sup>15</sup>Die Allen–Cahn-Gleichung ist auch als Chafee–Infante-Gleichung oder als bistabile Gleichung bekannt.

Nichtlineare Diffusionsgleichungen treten außerdem bei der Modellierung von Diffusionsprozessen in porösen Medien auf (mit Exponent  $p \in (1, \infty)$ )

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) &= \Delta(u(x, t))^p, \\ d = 2: \quad \partial_t u(x, y, t) &= \partial_{xx}(u(x, y, t))^p + \partial_{yy}(u(x, y, t))^p. \end{aligned}$$

Man beachte, daß es sich in beiden Fällen um quasi-lineare parabolische Gleichungen

$$\begin{aligned} d = 2: \quad \partial_t u(x, y, t) &= \partial_x \left( \alpha(u(x, y, t), \nabla u(x, y, t)) \partial_x u(x, y, t) \right) \\ &\quad + \partial_y \left( \alpha(u(x, y, t), \nabla u(x, y, t)) \partial_y u(x, y, t) \right) \end{aligned}$$

handelt; die Koeffizienten sind wie folgt gegeben

$$\begin{aligned} \alpha(u(x, y, t), \nabla u(x, y, t)) &= \|\nabla u(x, y, t)\|_{\mathbb{R}^2}^{p-2}, \\ \alpha(u(x, y, t), \nabla u(x, y, t)) &= p(u(x, y, t))^{p-1}. \end{aligned}$$

(vii) *Illustration.* Bei der Modellierung von auto-katalytischen Diffusions-Reaktions-Prozessen zwischen zwei chemischen Substanzen mit Konzentrationen

$$u: \bar{\Omega} \times [t_0, T] \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v: \bar{\Omega} \times [t_0, T] \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

treten die Gray-Scott-Gleichungen

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = (D_u \Delta - \alpha) u(x, t) - u(x, t) (v(x, t))^2 + \alpha, \\ \partial_t v(x, t) = (D_v \Delta - \beta) v(x, t) + u(x, t) (v(x, t))^2, \end{cases}$$

auf. Wählt man periodische Randbedingungen oder homogene Neumann-Randbedingungen, bilden sich über lange Zeiten Muster aus, vgl. Abbildungen 1.4 und 1.5.<sup>16</sup>

### Schrödinger-Gleichungen.

(i) *Elementare lineare Gleichungen.* Zeitabhängige freie Schrödinger-Gleichungen haben die Form (wobei  $0 \neq c \in \mathbb{R}$ )

$$i \partial_t u(x, t) = -c \Delta u(x, t).$$

<sup>16</sup>Die Ausbildung von Mustern kann man auch unter

[http://techmath.uibk.ac.at/mecht/MyHomepage/Research/Movie\\_GrayScott\\_NovelApproach\\_Solution.mov](http://techmath.uibk.ac.at/mecht/MyHomepage/Research/Movie_GrayScott_NovelApproach_Solution.mov)

beobachten.

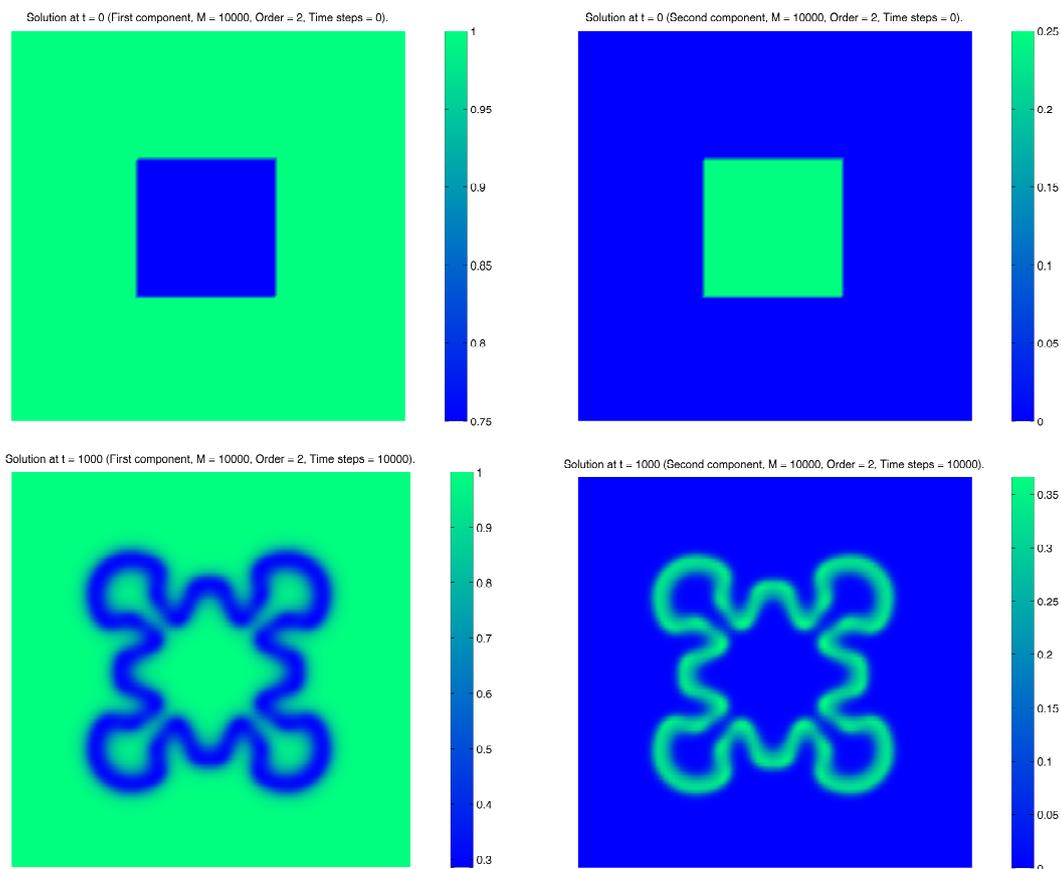


Abbildung 1.4: Gray–Scott-Gleichungen in zwei Raumdimensionen unter periodischen Randbedingungen. Anfangsbedingungen und numerisch berechnete Lösungswerte ( $t = 1000$ ).

- (ii) *Verallgemeinerungen.* Ein Grundprinzip der Quantenphysik besagt, daß ein quantenphysikalisches System durch einen auf einem separablen komplexen Hilbert-Raum definierten selbstadjungierten Hamilton-Operator beschrieben wird. Die zeitliche Entwicklung des Systemes ist durch die zugehörige Schrödinger-Gleichung

$$i \partial_t u(x, t) = H(x) u(x, t)$$

bestimmt; deren komplex-wertige Lösung  $u : \mathbb{R}^d \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{C}$  wird als Wellenfunktion bezeichnet. Das zugehörige Integral über einen Teilbereich  $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^d$  wird beispielsweise als die Aufenthaltswahrscheinlichkeit von Teilchen interpretiert

$$\int_{\Omega_0} |u(x, t)|^2 dx.$$

In zahlreichen Anwendungen umfaßt der Hamilton-Operator den Laplace-Operator und

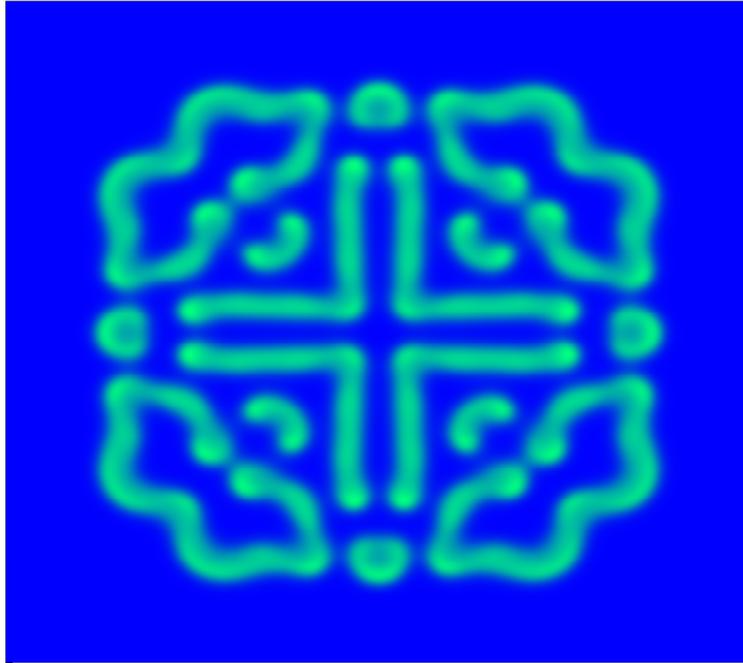


Abbildung 1.5: Gray–Scott-Gleichungen in zwei Raumdimensionen unter periodischen Randbedingungen. Numerisch berechnete Lösungswerte (zweite Komponente,  $t = 2000$ ).

ein reellwertiges Potential<sup>17</sup>

$$H = -\Delta + V, \quad V: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto V(x);$$

eine wesentliche Eigenschaft ist in diesem Fall die zeitliche Invarianz der reellen Größe (verwende partielle Integration)

$$\begin{aligned} (H(x) u(\cdot, t) | u(\cdot, t))_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^d} (-\Delta u(x, t) + V(x) u(\cdot, t)) \overline{u(x, t)} \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x, t)|^2 + V(x) |u(x, t)|^2 \, dx, \end{aligned}$$

welche im Allgemeinen der Gesamtenergie des Quantensystemes entspricht. Da die Dimension des Systemes mit der Anzahl der betrachteten Teilchen zusammenhängt, treten beispielsweise bei der Modellierung von Molekülen hochdimensionale lineare Schrödinger-Gleichungen auf

$$d = 3N \gg 1;$$

<sup>17</sup>Allgemeiner sind auch zeitabhängige Potentiale

$$V: \mathbb{R}^d \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto V(x, t),$$

welche auf nichtautonome lineare Schrödinger-Gleichungen führen, relevant.

in speziellen Situationen führen geeignete Ansätze und Näherungen auf reduzierte Modelle in Form von nichtlinearen Schrödinger-Gleichungen in drei Dimensionen.

- (iii) *Spezielle lineare Schrödinger-Gleichungen.* Elementare Beispiele linearer Schrödinger-Gleichungen sind Schrödinger-Gleichungen mit quadratischen Potentialen (mit positiven Gewichten  $\omega_j > 0$  für  $j \in \{1, \dots, d\}$ )

$$i \partial_t u(x, t) = -\Delta u(x, t) + \sum_{j=1}^d \omega_j^2 x_j^2 u(x, t).$$

Modelle für Elektronen-Systeme, wo paarweise Interaktionen durch Coulomb-Potentiale beschrieben werden, führen auf lineare Schrödinger-Gleichungen der Form

$$i \partial_t u(x, t) = -\Delta u(x, t) + V(x) u(x, t),$$

$$V(x) = \sum_{1 \leq j < k \leq N} \frac{1}{\|x_j - x_k\|_{\mathbb{R}^3}}, \quad x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{3N}.$$

- (iv) *Spezielle nichtlineare Schrödinger-Gleichungen.* Bekannte Beispiele nichtlinearer Schrödinger-Gleichungen sind kubische Schrödinger-Gleichungen oder etwas allgemeinere Gleichungen der Form (mit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ )

$$i \partial_t u(x, t) = -\Delta u(x, t) + f(|u(x, t)|^2) u(x, t).$$

Systeme von Gross–Pitaevskii-Gleichungen modellieren gewisse Aspekte von Bose-Einstein-Kondensaten; Herleitungen beruhen auf geeigneten Mittelungen (*mean field theory*). Abgesehen von zusätzlich auftretenden einfangenden Potentialen haben einzelne Gross–Pitaevskii-Gleichungen häufig eine ähnliche Form wie kubische Schrödinger-Gleichungen

$$i \partial_t u(x, t) = -\Delta u(x, t) + V(x) u(x, t) + |u(x, t)|^2 u(x, t).$$

Spezielle Ansätze ermöglichen die Reduktion von elektronischen Schrödinger-Gleichungen auf Systeme nichtlinearer Schrödinger-Gleichungen in drei Dimensionen, die MCTDHF-Gleichungen.<sup>18</sup>

- (v) *Verschiedene Regime.* Im Zusammenhang mit Schrödinger-Gleichungen ist es wesentlich, Größenordnungen von auftretenden physikalischen Parametern zu berücksichtigen; beispielsweise untersucht man für kubische Schrödinger-Gleichungen

$$i \partial_t u(x, t) = -c_1 \Delta u(x, t) + c_2 |u(x, t)|^2 u(x, t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

den Fall hoher Oszillationen sowie das semi-klassische Regime (wobei  $0 < |\varepsilon| \ll 1$ )

$$i \partial_t u(x, t) = -\frac{1}{\varepsilon} \Delta u(x, t) + |u(x, t)|^2 u(x, t),$$

$$i \partial_t u(x, t) = -\Delta u(x, t) + \frac{1}{\varepsilon} |u(x, t)|^2 u(x, t).$$

<sup>18</sup>MCTDHF steht für *multi-configuration time-dependent Hartee-Fock*.

- (vi) *Illustration (Semi-klassisches Regime)*. Als Modell-Gleichung wird folgende eindimensionale nichtlineare Schrödinger-Gleichung mit einem quadratischen Potential und einer WKB-Anfangsbedingung<sup>19</sup> betrachtet (wobei  $\omega = 2$  und  $\vartheta = 1$ )

$$\begin{aligned} i \partial_t u(x, t) &= -\frac{1}{2} \partial_{xx} u(x, t) + \frac{1}{\varepsilon} \omega^2 x^2 u(x, t) + \frac{1}{\varepsilon} \vartheta |u(x, t)|^2 u(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (t_0, T), \\ u(x, t_0) &= \varrho_0(x) e^{i \frac{1}{\varepsilon} \sigma_0(x)}, & \varrho_0(x) = e^{-x^2}, \quad \sigma_0(x) = -\ln(e^x + e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Im semi-klassischen Regime, d.h. für kleinere Werte des Parameters  $\varepsilon > 0$ , beobachtet man rasche Oszillationen der Lösung bezüglich Ort und Zeit. Zur numerischen Approximation wurde ein Splitting-Verfahren zweiter Ordnung verwendet und mittels Fourier-Spektralverfahren realisiert; der Ortsbereich wurde dazu auf ein hinreichend großes Intervall eingeschränkt. Da man nur bei geeigneter Wahl der Zeitschrittweite ein korrektes numerisches Resultat erhält, ist es sinnvoll, eine automatische lokale Schrittweitensteuerung zu verwenden; Abbildung 1.6 veranschaulicht das Profil der näherungsweise berechneten Lösung auf dem Ortsintervall  $[0, 1.5]$  für verschiedene vorgegebene Toleranzen.

- (vii) *Illustration (Gross–Pitaevskii-Gleichung mit Rotationsterm)*. Die numerische Lösung einer zweidimensionalen Gross–Pitaevskii-Gleichung mit zusätzlichem Rotationsterm

$$\begin{aligned} i \partial_t u(x, y, t) &= \left( -\frac{1}{2} (\partial_{xx} + \partial_{yy}) + i \Omega (x \partial_y - y \partial_x) + V_{\text{ext}}(x, y) + \beta |u(x, y, t)|^2 \right) u(x, y, t), \\ V_{\text{ext}}(x, y) &= \frac{1}{2} \gamma_1^2 x^2 + \frac{1}{2} \gamma_2^2 y^2, & (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times (t_0, T), \\ \gamma_1 &= 0.8, \quad \gamma_2 = 1.2, \quad \Omega = 0.5, \quad \beta = 100, \end{aligned}$$

unter der speziellen Anfangsbedingung

$$u(x, y, t_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (x + i y) e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

ist in Abbildung 1.7 illustriert; ähnlich wie zuvor wurde ein Splitting-Verfahren zweiter Ordnung verwendet und mittels eines speziellen Spektralverfahrens, welches auf verallgemeinerten Laguerre-Basisfunktionen sowie Fourier-Basisfunktionen beruht, realisiert.<sup>20</sup>

## Wellengleichungen.

- (i) *Elementare lineare Gleichungen*. Homogene lineare Wellengleichungen haben die Form (wobei  $\alpha > 0$ )

$$\partial_{tt} u(x, t) = \alpha \Delta u(x, t).$$

<sup>19</sup>Benannt nach Wentzel, Kramers und Brillouin.

<sup>20</sup>Die zeitliche Entwicklung der Lösung kann man auch unter

[http://techmath.uibk.ac.at/mecht/MyHomepage/Research/Movie\\_GPEWithRotation.mov](http://techmath.uibk.ac.at/mecht/MyHomepage/Research/Movie_GPEWithRotation.mov)

beobachten.

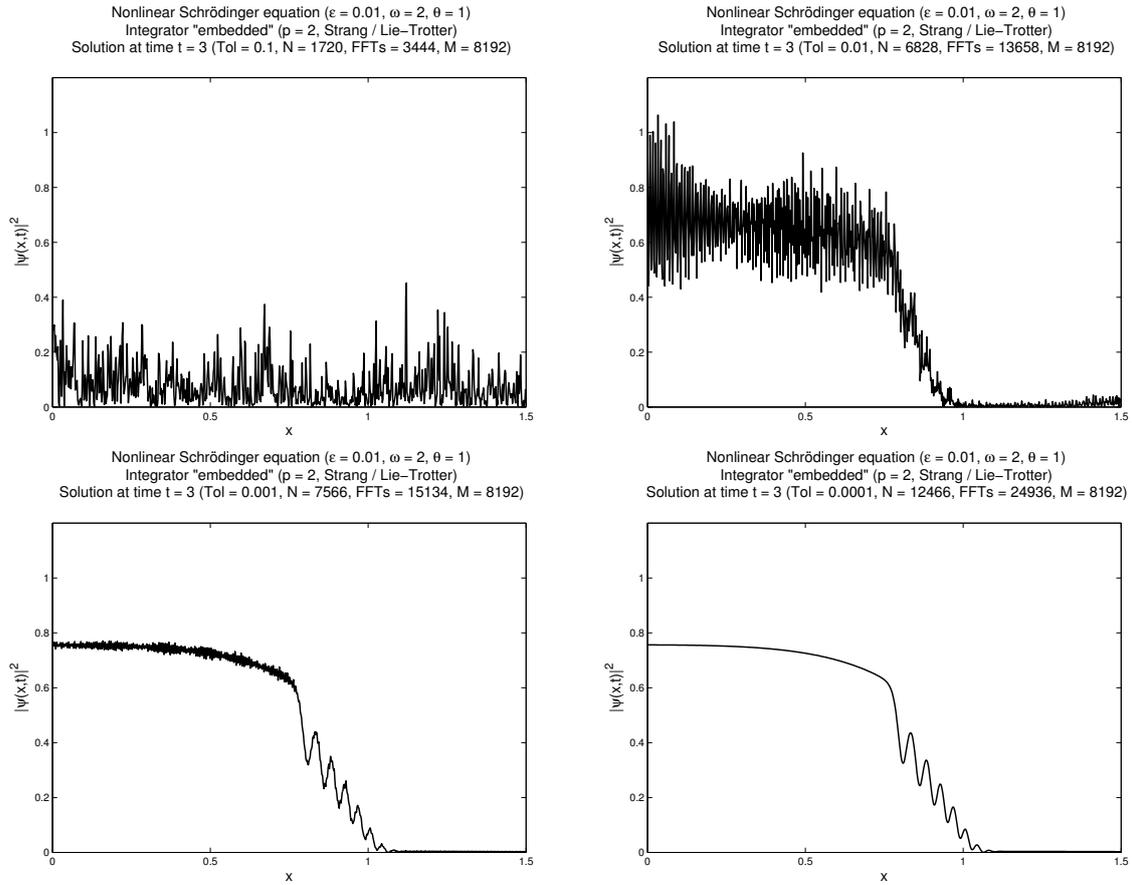


Abbildung 1.6: Eindimensionale nichtlineare Schrödinger-Gleichung im semi-klassischen Regime. Mittels lokaler Schrittweitensteuerung numerisch berechnete Lösungswerte; für hinreichend kleine Toleranzen beobachtet man ein konsistentes Resultat.

Für theoretische Zwecke verwendet man meist äquivalente Formulierungen als Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung bezüglich der Zeit; setzt man etwa  $U_1 = u$  sowie  $U_2 = \partial_t u$ , erhält man

$$\begin{cases} \partial_t U_1(x, t) = U_2(x, t), \\ \partial_t U_2(x, t) = \alpha \Delta U_1(x, t). \end{cases}$$

- (ii) *Helmholtz-Gleichungen.* Bei homogenen linearen Wellengleichungen führt das Einsetzen eines speziellen Separationsansatzes auf Eigenwertgleichungen

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{ict} v(x), \\ 0 &= \partial_{tt} u(x, t) - \alpha \Delta u(x, t) = e^{ict} (-c^2 v(x) - \alpha \Delta v(x)), \\ \alpha \Delta v(x) &= -c^2 v(x); \end{aligned}$$

diese werden als Helmholtz-Gleichungen bezeichnet.

Rotational Gross-Pitaevskii equation. Strang (N = 750, T = 15).

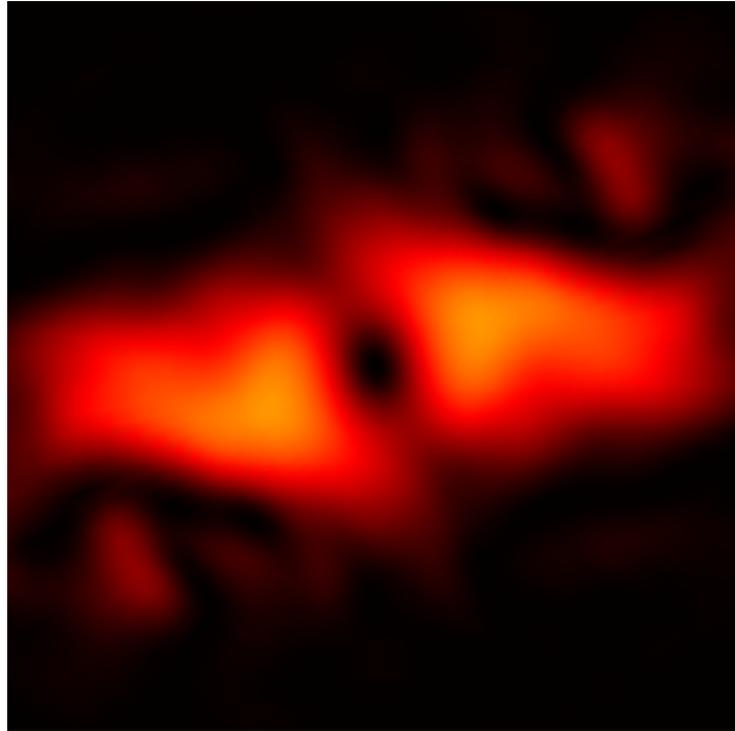


Abbildung 1.7: Zweidimensionale Gross–Pitaevskii-Gleichung mit zusätzlichem Rotations-term. Numerische berechnete Lösungswerte.

- (iii) *Verallgemeinerungen.* Ähnlich wie bei parabolischen Gleichungen ergeben sich lineare und nichtlineare Verallgemeinerungen von homogenen linearen Wellengleichungen durch die Betrachtung von linearen oder nichtlinearen elliptischen Differentialoperatoren sowie die Hinzunahme von nichtlinearen Termen mit geringeren Regularitätsanforderungen; entsprechend übernimmt man die Einteilung in lineare, semi-lineare, quasi-lineare und voll nichtlineare Gleichungen. In Hinblick auf theoretische Untersuchungen ist es außerdem wesentlich, zwischen ungedämpften und gedämpften Wellengleichungen zu unterscheiden. Man beachte, daß bereits bei Schwingungsgleichungen (Masse  $m > 0$ , Reibungskonstante  $r > 0$ , Federkonstante  $k > 0$ )

$$m y''(t) + r y'(t) + k y(t) = 0$$

Lösungen unterschiedliche charakteristische Eigenschaften aufweisen. Im ungedämpften Fall  $r = 0$  sind alle Lösungen periodisch, gegeben durch Linearkombinationen von Sinus- und Cosinus-Funktionen; im gedämpften Fall  $r > 0$  bewirkt ein exponentiell abfallender Faktor, daß sich alle Lösungen asymptotisch der Nullfunktion nähern.

- (iv) *Spezielle lineare und nichtlineare Wellengleichungen.* Elementare Beispiele für lineare

und semi-lineare Wellengleichungen sind die Klein–Gordon-Gleichung

$$\partial_{tt}u(x, t) = \Delta u(x, t) - u(x, t)$$

und die Sine–Gordon-Gleichung

$$\partial_{tt}u(x, t) = \Delta u(x, t) - \sin(u(x, t)).$$

- (v) *Spezielle gedämpfte nichtlineare Wellengleichungen.* Im Bereich der nichtlinearen Akustik treten beispielsweise bei der Modellierung von Ultraschall hoher Intensität gedämpfte nichtlineare Wellengleichungen auf. Die aus den Grundprinzipien der Erhaltung von Masse, Impuls und Energie sowie einer Zustandsgleichung abgeleitete Blackstock–Crighton–Brunnhuber–Jordan–Kuznetsov-Gleichung hat die Form (wobei  $\beta_j > 0$  für  $j \in \{1, \dots, 6\}$ )

$$\begin{aligned} &\partial_{ttt}u(x, t) - \beta_1 \Delta \partial_{tt}u(x, t) + \beta_2 \Delta^2 \partial_t u(x, t) - \beta_3 \Delta \partial_t u(x, t) + \beta_4 \Delta^2 u(x, t) \\ &+ \partial_{tt} \left( \frac{1}{2} \beta_5 (\partial_t u(x, t))^2 + \beta_6 |\nabla u(x, t)|^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Als reduziertes Modell ergibt sich die Westervelt-Gleichung (modifizierte Konstanten  $\beta_1, \beta_3, \beta_5 > 0$ , Umformulierung mittels Differentiation)

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u(x, t) &= \beta_1 \Delta \partial_t u(x, t) + \beta_3 \Delta u(x, t) - \frac{1}{2} \beta_5 \partial_t (\partial_t u(x, t))^2, \\ \partial_{ttt}u(x, t) &= (1 + \beta_5 \partial_t u(x, t))^{-1} \left( \beta_1 \Delta \partial_t u(x, t) + \beta_3 \Delta u(x, t) \right); \end{aligned}$$

bei der Anwendung von Splitting-Verfahren ergibt sich als Teilproblem eine nichtlineare Diffusionsgleichung

$$\beta_3 = 0, \quad v = \partial_t u: \quad \partial_t v(x, t) = (1 + \beta_5 v(x, t))^{-1} \beta_1 \Delta v(x, t),$$

was auf Querverbindungen zu parabolischen Gleichungen hinweist.

**Ergänzungen.** Weitere bekannte partielle Differentialgleichungen sollen zumindest namentlich erwähnt werden.

- Balkengleichung
- Biharmonische Gleichung
- Boussinesq-Gleichung
- Cahn–Hilliard-Gleichung
- Komplexe Ginzburg–Landau-Gleichung
- Euler-Gleichungen
- Navier–Stokes-Gleichungen
- Maxwell-Gleichungen

## 1.4 Klassifizierungen

**Klassifizierungen.** Aufgrund der Komplexität von partiellen Differentialgleichungen und dem Umfang des Gebietes ist es nur eingeschränkt möglich, Klassifizierungen vorzunehmen. Im Folgenden werden gebräuchliche Unterscheidungskriterien angegeben; wegen zahlreicher Überschneidungen und Querverbindungen sind strenge Abgrenzungen zwischen den einzelnen Klassen jedoch nicht sinnvoll. Als erste Anhaltspunkte bestimmt man üblicherweise, ob zeitabhängige oder zeitunabhängige Gleichungen, autonome oder nichtautonome Gleichungen, lineare oder nichtlineare Gleichungen vorliegen. Es ist auch zweckmäßig, die räumliche Dimension, die Anzahl der Gleichungen des Systemes sowie die Ordnungen der höchsten auftretenden partiellen Ableitungen bezüglich der Zeit und des Raumes zu berücksichtigen; insbesondere bei linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung bezüglich der räumlichen Variablen ist letzteres mit der Klassifizierung in elliptische, parabolische und hyperbolische Gleichungen verknüpft. Um beurteilen zu können, wie das charakteristische Lösungsverhalten ist und welche theoretischen Zugänge zur Verfügung stehen, ist es zweckmäßig, eine genauere Klassifizierung in Erhaltungsgleichungen, parabolische Gleichungen, Schrödinger-Gleichungen und Wellengleichungen (ohne Dämpfung, mit Dämpfung) vorzunehmen. Umgekehrt kann man partielle Differentialgleichungen entsprechend der Schwierigkeitsgrade der zur Verfügung stehenden funktionalanalytischen Methoden unterscheiden.

**Zeitabhängige versus zeitunabhängige Gleichungen.** Für die weiteren Überlegungen ist es hilfreich, zeitabhängige partielle Differentialgleichungen in kompakter Weise als abstrakte Evolutionsgleichungen erster Ordnung bezüglich der Zeit zu formulieren (mit definierender Funktion  $F : D(F) \subseteq [t_0, T] \times X \rightarrow X : (t, v) \mapsto F(t, v)$ )

$$u'(t) = F(t, u(t)), \quad t \in (t_0, T).$$

Eine zeitunabhängige partielle Differentialgleichung entspricht einer Gleichung der Form<sup>21</sup>

$$F(u) = 0.$$

**Autonome versus nichtautonome Evolutionsgleichungen.** Falls für die zuvor angegebene Evolutionsgleichung die definierende Funktion nicht explizit von der Zeitvariable abhängt, spricht man von einer autonomen Evolutionsgleichung

$$u'(t) = F(u(t)), \quad t \in (t_0, T);$$

---

<sup>21</sup>*Bemerkung.* Die angegebenen abstrakten Formulierungen lassen leichter erkennen, daß die Frage der Lösbarkeit von partiellen Differentialgleichungen mit der Frage der Existenz von Fixpunkten zusammenhängt; im zeitabhängigen Fall führt man beispielsweise ähnlich dem Ansatz von Picard–Lindelöf eine zusätzliche Integration durch, um den Fixpunktoperator zu definieren

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t F(\zeta, u(\zeta)) \, d\zeta, \quad G : D(G) \rightarrow \mathcal{X} : v \mapsto \left[ t \mapsto u(t_0) + \int_{t_0}^t F(\zeta, v(\zeta)) \, d\zeta \right], \quad G(u) = u.$$

ohne nähere Erklärung sei bemerkt, daß bereits die Behandlung von nichtautonomen homogenen linearen Evolutionsgleichungen

$$u'(t) = A(t) u(t), \quad t \in (t_0, T),$$

wesentlich komplexer als die Untersuchung autonomer homogener linearer Gleichungen ist

$$u'(t) = A u(t), \quad t \in (t_0, T).$$

**Lineare versus nichtlineare Evolutionsgleichungen.** Entsprechend dem Schwierigkeitsgrad ist es sinnvoll, Evolutionsgleichungen in lineare Evolutionsgleichungen und nichtlineare Evolutionsgleichungen einzuteilen; bei nichtlinearen Evolutionsgleichungen unterscheidet man außerdem zwischen semi-linearen, quasi-linearen und voll nichtlinearen Gleichungen.

(i) *Lineare Evolutionsgleichungen.* Lineare Evolutionsgleichungen haben die Form

$$u'(t) = A(t) u(t) + b(t), \quad t \in (t_0, T);$$

falls die Funktion  $b$  nicht auftritt, spricht man von einer homogenen linearen Evolutionsgleichung. Lineare Evolutionsgleichungen sind beispielsweise durch lineare Differentialoperatoren zweiter Ordnung bezüglich der räumlichen Variablen definiert; die Koeffizienten-Funktionen können dabei sowohl von den räumlichen Variablen als auch von der Zeitvariable abhängen. Zu relevanten Anwendungen zählen lineare Schrödinger-Gleichungen und lineare Wellengleichungen.

(ii) *Semi-lineare Evolutionsgleichungen.* Bei semi-linearen Evolutionsgleichungen

$$u'(t) = A(t) u(t) + b(t, u(t)), \quad t \in (t_0, T),$$

kann die auftretende Nichtlinearität als *Störung* des linearen Operators verstanden werden, etwa weil die Ordnung des nichtlinearen Differentialoperators geringer als jene des linearen Differentialoperators ist; bekannte Beispiele sind Diffusions-Advektions-Reaktions-Gleichungen wie die Navier–Stokes-Gleichungen oder Diffusions-Reaktions-Gleichungen wie die Gray–Scott-Gleichungen.

(iii) *Quasi-lineare Evolutionsgleichungen.* Von quasi-linearen Evolutionsgleichungen spricht man, wenn Gleichungen der Form

$$u'(t) = A(t, u(t)) u(t) + b(t, u(t)), \quad t \in (t_0, T),$$

vorliegen. Dabei setzt man beispielsweise voraus, daß die Koeffizienten des definierenden Differentialoperators räumliche Ableitungen geringerer Ordnung umfassen; zusätz-

lich ist eine Semi-Linearität zugelassen. Im Fall von zwei Raumdimensionen ist eine autonome quasi-lineare partielle Differentialgleichung etwa durch<sup>22</sup>

$$\begin{aligned}
 d = 2: \quad \partial_t U(x, y, t) &= a_{11}(x, y, U(x, y, t), \partial_x U(x, y, t), \partial_y U(x, y, t)) \partial_{xx} U(x, y, t) \\
 &+ 2 a_{12}(x, y, U(x, y, t), \partial_x U(x, y, t), \partial_y U(x, y, t)) \partial_{xy} U(x, y, t) \\
 &+ a_{22}(x, y, U(x, y, t), \partial_x U(x, y, t), \partial_y U(x, y, t)) \partial_{yy} U(x, y, t) \\
 &+ B(x, y, U(x, y, t), \partial_x U(x, y, t), \partial_y U(x, y, t))
 \end{aligned}$$

gegeben; zur besseren Unterscheidung der Lösungen partieller Differentialgleichungen und der Lösungen zugehöriger abstrakter Evolutionsgleichungen werden hier die Bezeichnungen  $U$  und  $u$  verwendet.

- (iv) *Voll nichtlineare Evolutionsgleichungen.* Nichtlineare Evolutionsgleichungen, die weder als semi-lineare noch als quasi-lineare Evolutionsgleichungen formuliert werden können, bezeichnet man als voll nichtlineare Evolutionsgleichungen.

**Zeitunabhängige partielle Differentialgleichungen.** In verschiedenen Anwendungen ist neben der ursprünglichen zeitabhängigen partiellen Differentialgleichung die Betrachtung der zugehörigen zeitunabhängigen partiellen Differentialgleichung relevant; die zuvor angegebene Klassifizierung in lineare, semi-lineare, quasi-lineare und voll nichtlineare Gleichungen wird entsprechend angepaßt. Bekannte Beispiele linearer elliptischer Gleichungen sind Laplace-Gleichungen und Poisson-Gleichungen, welche sich etwa als stationäre Gleichungen von Diffusionsgleichungen oder im Zusammenhang mit Maxwell-Gleichungen ergeben.

**Elliptische, parabolische und hyperbolische Gleichungen.** Im Folgenden werden die zuvor erwähnten elementaren linearen partiellen Differentialgleichungen nochmals in ihrer einfachsten Form angegeben. In Hinblick auf eine übliche Klassifizierung von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung bezüglich der räumlichen Variablen in elliptische, parabolische und hyperbolische Gleichungen werden den auftretenden Differentialoperatoren Polynome in zwei Variablen zugeordnet; die zugehörigen Polynomgleichungen entsprechen Kegelschnittslinien und erklären die Namensgebung.

- (i) *Elliptische Gleichungen.* Elementare Beispiele elliptischer partieller Differentialgleichungen sind Poisson-Gleichungen in zwei Raumdimensionen

$$\partial_{xx} u(x, y) + \partial_{yy} u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

<sup>22</sup> *Bemerkung.* Da für zweimal stetig partiell differenzierbare Lösungen die Gleichheit  $\partial_{xy} U = \partial_{yx} U$  gilt, wird üblicherweise der Mittelwert der Koeffizienten gebildet, vgl. Klassifizierung in elliptische, parabolische und hyperbolische Gleichungen.

Betrachtet man den definierenden Differentialoperator und ersetzt die auftretenden partiellen Ableitungen durch<sup>23</sup>

$$\partial_{xx} \leftrightarrow x^2, \quad \partial_{yy} \leftrightarrow y^2,$$

so ergibt sich ein Polynom in zwei Variablen. Zugehörige Gleichungen (wobei  $0 \neq d \in \mathbb{R}$ )

$$x^2 + y^2 = d^2$$

entsprechen Kreisen und allgemeiner Ellipsen (zusätzliche Streckung bzw. Stauchung einer Koordinate, setze etwa  $x = c \tilde{x}$  mit  $0 \neq c \in \mathbb{R}$ )

$$c^2 x^2 + y^2 = d^2,$$

welche als Graphen von zwei Funktionen gegeben sind

$$c^2 x^2 + y^2 = d^2, \quad \left( y - \sqrt{d^2 - c^2 x^2} \right) \left( y + \sqrt{d^2 - c^2 x^2} \right) = 0, \quad \xi = \frac{|d|}{|c|},$$

$$g_1 : [-\xi, \xi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sqrt{d^2 - c^2 x^2}, \quad g_2 : [-\xi, \xi] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto -\sqrt{d^2 - c^2 x^2},$$

vgl. Abbildung 1.8; man beachte, daß aufgrund der Forderung reeller Funktionswerte eine Einschränkung des Definitionsbereiches notwendig ist.

- (ii) *Parabolische Gleichungen.* Elementare Beispiele parabolischer Gleichungen sind homogene lineare Diffusionsgleichungen in einer Raumdimension (wobei  $0 \neq c \in \mathbb{R}$ )

$$\partial_t u(x, t) = c^2 \partial_{xx} u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (t_0, T).$$

Die zugehörigen Polynomgleichungen in zwei Variablen entsprechen Parabeln (ersetze  $\partial_t \leftrightarrow y$  sowie  $\partial_{xx} \leftrightarrow x^2$ , wobei  $d \in \mathbb{R}$ )

$$y = c^2 x^2 + d,$$

vgl. Abbildung 1.8.

- (iii) *Hyperbolische Gleichungen.*

- (a) *Wellengleichungen.* Elementare Beispiele hyperbolischer Gleichungen sind eindimensionale homogene lineare Wellengleichungen<sup>24</sup> (wobei  $0 \neq c \in \mathbb{R}$ )

$$\partial_{tt} u(x, t) = c^2 \partial_{xx} u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (t_0, T).$$

<sup>23</sup>*Bemerkung.* Der Übergang von linearen Differentialoperatoren auf zugehörige Multiplikationsoperatoren wird in verschiedenen Situationen genützt, beispielsweise im Zusammenhang mit Lösungsansätzen, welche auf Fourier-Reihen oder der Fourier-Transformation basieren.

<sup>24</sup>*Bemerkung.* Man beachte, daß es für gedämpfte Wellengleichungen Verbindungen zu parabolischen Gleichungen gibt und deshalb die vorgenommene Klassifizierung nicht zutreffend ist, vgl. Blackstock–Crighton–Brunnhuber–Jordan–Kuznetsov-Gleichung.

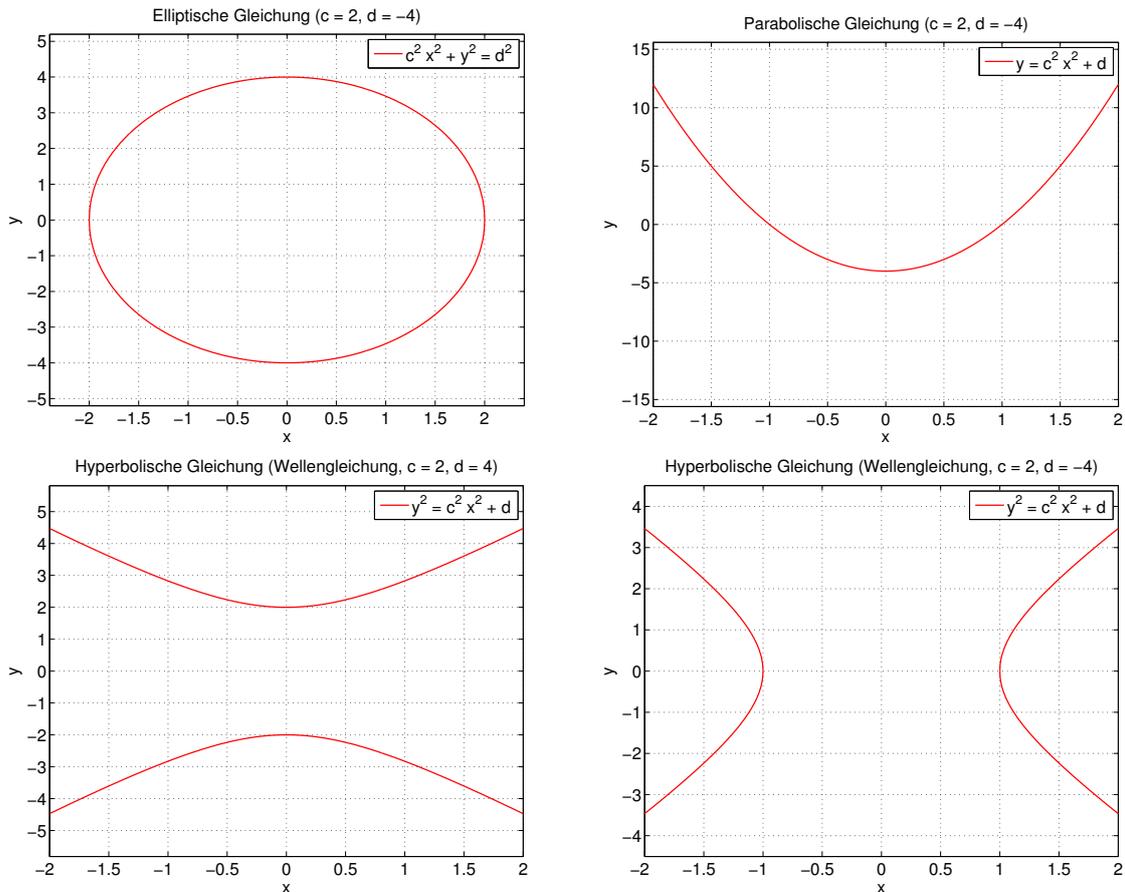


Abbildung 1.8: Elementare lineare partielle Differentialgleichungen und zugehörige Gleichungen für Polynome in zwei Variablen.

Die zugehörigen Gleichungen in zwei Variablen entsprechen Hyperbeln (ersetze  $\partial_{tt} \leftrightarrow y^2$  sowie  $\partial_{xx} \leftrightarrow x^2$ , wobei  $d \in \mathbb{R}$ )

$$y^2 = c^2 x^2 + d, \quad \left(y - \sqrt{c^2 x^2 + d}\right) \left(y + \sqrt{c^2 x^2 + d}\right) = 0, \quad \xi = \frac{\sqrt{|d|}}{|c|},$$

$$d > 0: \quad g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sqrt{c^2 x^2 + d}, \quad g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto -\sqrt{c^2 x^2 + d},$$

$$d < 0: \quad g_1: (-\infty, -\xi] \cup [\xi, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sqrt{c^2 x^2 + d},$$

$$d < 0: \quad g_2: (-\infty, -\xi] \cup [\xi, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto -\sqrt{c^2 x^2 + d},$$

vgl. Abbildung 1.8.

- (b) *Erhaltungsgleichungen.* In einer Raumdimension haben homogene lineare Advektionsgleichungen die Form (wobei  $0 \neq c \in \mathbb{R}$ )

$$\partial_t u(x, t) = c \partial_x u(x, t);$$

die zugehörigen Polynomgleichungen entsprechen Geraden. Unter der Annahme einer regulären Lösung führt Differentiation bezüglich der Zeit und Einsetzen der partiellen Differentialgleichung auf eine Wellengleichung

$$\partial_{tt} u(x, t) = c \partial_x \partial_t u(x, t) = c^2 \partial_{xx} u(x, t);$$

insofern ist es gerechtfertigt, Advektionsgleichungen und allgemeiner Erhaltungsgleichungen der Klasse der hyperbolischen Gleichungen zuzuordnen.<sup>25</sup>

- (c) *Schrödinger-Gleichungen.* In einer Raumdimension haben freie Schrödinger-Gleichungen die Form (wobei  $0 \neq c \in \mathbb{R}$ )

$$i \partial_t u(x, t) = -c \partial_{xx} u(x, t), \quad \partial_t u(x, t) = i c \partial_{xx} u(x, t).$$

Es gibt unterschiedliche Sichtweisen, was die Klassifizierung von Schrödinger-Gleichungen betrifft; in manchen Quellen werden sie hyperbolischen Gleichungen zugeordnet, in manchen jedoch nicht.

### Verallgemeinerungen.

- (i) *Spezielle Differentialoperatoren.* In Hinblick auf Verallgemeinerungen fassen wir die obigen Überlegungen nochmals zusammen. Die betrachteten elementaren linearen Differentialoperatoren zweiter Ordnung für Funktionen in zwei Variablen entsprechen Polynomen in zwei Variablen und deren Koeffizienten Diagonalmatrizen mit folgenden Eigenschaften (wobei  $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ )

Elliptische Gleichung:  $L = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2, \quad q(x) = x_1^2 + x_2^2, \quad \det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > 0,$

Parabolische Gleichung:  $L = \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2, \quad q(x) = x_1^2, \quad \det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$

Hyperbolische Gleichung:  $L = \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2, \quad q(x) = x_1^2 - x_2^2, \quad \det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} < 0;$

man beachte, daß bei der parabolischen Gleichung nur Beiträge zweiter Ordnung berücksichtigt werden.

- (ii) *Allgemeine Differentialoperatoren.* Allgemeine lineare Differentialoperatoren zweiter Ordnung für Funktionen in zwei Variablen entsprechen Polynomen der Form

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}: x = (x_1, x_2)^T \longmapsto p(x) = q(x) + r(x), \\ q(x) &= a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2, \quad a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R}, \\ r(x) &= b_1 x_1 + b_2 x_2 + c, \quad b_1, b_2, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

<sup>25</sup> *Bemerkung.* Mittels der folgenden Zerlegung des eindimensionalen Wellenoperators

$$(\partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}) u(x, t) = (\partial_t - |c| \partial_x) (\partial_t + |c| \partial_x) u(x, t)$$

kann man bekannte Lösungsdarstellungen für Advektionsgleichungen auf eindimensionale lineare Wellengleichungen erweitern.

Bei einer Klassifizierung in elliptische, parabolische und hyperbolische Gleichungen werden nur die führenden Terme zweiter Ordnung berücksichtigt; mittels kompakter Matrix-Vektor-Schreibweise erhält man dafür die Darstellung

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad q(x) = x^T A x.$$

Da die definierende Matrix symmetrisch ist, sind beide Eigenwerte, d.h. die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}^2 \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \stackrel{!}{=} 0, \end{aligned}$$

reell; eine einfache Rechnung bestätigt außerdem das allgemeingültige Resultat, daß das Produkt der Eigenwerte mit der Determinante der Matrix übereinstimmt

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) + \frac{1}{2}\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) - \frac{1}{2}\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}, \\ \lambda_1 \lambda_2 &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \det(A). \end{aligned}$$

Außerdem ist bekannt, daß Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten aufeinander orthogonal stehen. Ausgehend von den obigen Spezialfällen verwendet man, daß die Eigenwerte einer Matrix unter Koordinatentransformationen erhalten bleiben; somit ergibt sich für lineare Differentialoperatoren mit zugehörigen Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  die Klassifizierung

$$\text{Elliptische Gleichung:} \quad \det(A) > 0,$$

$$\text{Parabolische Gleichung:} \quad \det(A) = 0,$$

$$\text{Hyperbolische Gleichung:} \quad \det(A) < 0.$$

- (iii) *Verallgemeinerungen.* Die direkte Erweiterung der zuvor angegebenen Poisson-Gleichungen, Diffusionsgleichungen und Wellengleichungen auf mehrere Raumdimensionen führt auf die Klassifizierung (mit Einheitsmatrix  $I \in \mathbb{R}^{d \times d}$ )

$$\text{Elliptische Gleichung:} \quad L = \Delta, \quad q(x) = \sum_{j=1}^d x_j^2, \quad A = I,$$

$$\text{Parabolische Gleichung:} \quad L = \Delta - \partial_t, \quad q(x) = \sum_{j=1}^d x_j^2 - x_{d+1}, \quad A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{Hyperbolische Gleichung:} \quad L = \Delta - \partial_t^2, \quad q(x) = \sum_{j=1}^d x_j^2 - x_{d+1}^2, \quad A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

die Variable  $x_{d+1}$  entspricht dabei der Zeitvariable. Man beachte, daß ein lineare Differentialoperatoren zweiter Ordnung bezüglich des Ortes mit konstanten Koeffizienten Terme der Form (für reguläre Funktionen gilt  $\partial_{x_j x_k} u = \partial_{x_k x_j} u$ )

$$\sum_{j,k=1}^d a_{jk} \partial_{x_j x_k} u(x, t) = \sum_{j=1}^d a_{jj} \partial_{x_j}^2 u(x, t) + 2 \sum_{j=1}^d \sum_{k=j+1}^d \frac{1}{2} (a_{jk} + a_{kj}) \partial_{x_j x_k} u(x, t)$$

umfaßt. Als Entsprechung ergibt sich eine symmetrische und insbesondere diagonalisierbare Matrix

$$\left( \frac{1}{2} (a_{jk} + a_{kj}) \right)_{j,k=1}^d ;$$

man beachte, daß alle Eigenwerte reell sind und deshalb ihr Vorzeichen wohldefiniert ist. In Hinblick auf die angegebenen Spezialfälle ist folgende Definition basierend auf der Bestimmung der Eigenwerte der zugehörigen Matrizen naheliegend

- Elliptische Gleichung: alle Eigenwerte haben dasselbe Vorzeichen,
- Parabolische Gleichung: genau ein Eigenwert ist gleich Null,  
alle weiteren haben dasselbe Vorzeichen,
- Hyperbolische Gleichung: alle Eigenwerte sind verschieden von Null,  
alle bis auf einen haben dasselbe Vorzeichen.

Diese Klassifizierung kann man durch Fixierung des betrachteten Raumpunktes auf Koeffizienten, die von den räumlichen Variablen abhängen, übertragen; eine weitere Verallgemeinerung etwa auf quasi-lineare partielle Differentialgleichungen mit lösungsabhängigen Koeffizienten basiert auf zusätzlicher Fixierung der Funktion und damit der Funktionswerte in einem Raumpunkt.

**Lösungsmethoden.** Gebräuchliche theoretische Zugänge und Methoden der Funktionalanalysis, welche zur Untersuchung verschiedener Klassen von partiellen Differentialgleichungen genutzt werden, sind im Folgenden kurz angedeutet.

- (i) *Methode der Charakteristiken.* Die Methode der Charakteristiken bildet eine wichtige theoretische Grundlage für lineare und nichtlineare Erhaltungsgleichungen; sie basiert auf der Idee, Lösungen von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bezüglich der räumlichen und zeitlichen Variablen mit Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu verknüpfen. Für lineare Erhaltungsgleichungen und reguläre Anfangsprofile sichert die Methode der Charakteristiken die Existenz und Eindeutigkeit von klassischen Lösungen; bei nicht-regulären Anfangsprofilen geht man üblicherweise auf Integrallösungen über. Aufgrund der möglichen Ausbildung von Stoßwellen ist insbesondere im nichtlinearen Fall eine Abschwächung des Lösungsbegriffes erforderlich; um zusätzlich die Eindeutigkeit von Lösungen zu erreichen, betrachtet man beispielsweise viskose Lösungen und Entropie-Lösungen.

- (ii) *Diskrete und kontinuierliche Fourier-Transformation.* Falls die definierenden linearen Differentialoperatoren sowie die betrachteten räumlichen Gebiete spezielle Bedingungen erfüllen, sind diskrete bzw. kontinuierliche Fourier-Transformationen geeignete Mittel zur Herleitung von Lösungsdarstellungen; in Hinblick auf numerische Realisierungen ist insbesondere die diskrete Fourier-Transformation von hoher Relevanz. Beide Zugänge können als konkrete Anwendungen des Spektralsatzes verstanden werden; die kontinuierliche Fourier-Transformation ist außerdem eng mit dem Begriff der distributionellen Lösung verknüpft.
- (iii) *Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren.* In Situationen, wo die betrachteten linearen partiellen Differentialgleichungen durch selbstadjungierte Operatoren auf separablen Hilbert-Räumen definiert sind, führt die Anwendung des Spektralsatzes auf Integraldarstellungen der Lösungsoperatoren. In Spezialfällen, beispielsweise für Schrödinger-Gleichungen mit quadratischen Potentialen oder für homogene lineare Diffusionsgleichungen unter geeigneten Randbedingungen auf quaderförmigen räumlichen Gebieten, reduzieren sich diese Integraldarstellungen auf Reihendarstellungen; diese basieren auf der Kenntnis zugehöriger vollständiger Orthonormalsysteme von Eigenfunktionen und können auch zur numerischen Approximation genutzt werden.
- (iv) *Distributionen-Theorie.* Die Distributionen-Theorie bildet eine wesentliche Grundlage der linearen Funktionalanalysis. Die Einführung von Sobolev-Räumen beruht häufig auf dem Begriff der distributionellen Ableitung; damit eng verknüpft ist die Charakterisierung verallgemeinerter Lösungsbegriffe für partielle Differentialgleichungen. Resultate der Distributionen-Theorie ermöglichen die Herleitung von Lösungsdarstellungen für partielle Differentialgleichungen, welche durch lineare Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten definiert sind; wie zuvor für Poisson-Gleichungen angedeutet, folgen bei der Kenntnis von Fundamentallösungen durch Faltung mit der definierenden Funktion Lösungsdarstellungen.
- (v) *Semigruppen-Theorie.* Die Theorien stark-stetiger und analytischer Semigruppen bilden einen allgemeinen Rahmen zur Untersuchung abstrakter Evolutionsgleichungen; beispielsweise erweitern sie die Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren auf un-stetige lineare Operatoren mit Werten in Banach-Räumen. Im Zusammenhang mit linearen Evolutionsgleichungen der Form

$$u'(t) = Au(t)$$

präzisiert die Semigruppen-Theorie, unter welchen Anforderungen an das Spektrum des Operators die Lösungsdarstellung

$$u(t) = e^{tA} u(0)$$

sinnvoll definiert ist. Lösungsdarstellungen, welche auf geeigneten Linearisierungen und der Anwendung der Variation-der-Konstanten-Formel beruhen, ermöglichen die

Betrachtung von nichtlinearen Evolutionsgleichungen; Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung leitet man gegebenenfalls mittels des Banach'schen Fixpunkt-Satzes her.

- (vi) *Theorie monotoner Operatoren und Energie-Abschätzungen.* Für zahlreiche relevante nichtlineare Evolutionsgleichungen sind Kontraktivitätseigenschaften, welche die Herleitung von Existenzresultaten mittels Banach'schem Fixpunkt-Satz ermöglichen würden, nicht erfüllt; in solchen Situationen bietet der Fixpunktsatz von Schauder für kompakte nichtlineare Operatoren eine wichtige Alternative. Die Theorie monotoner Operatoren stellt insbesondere im Zusammenhang mit nichtlinearen parabolischen Evolutionsgleichungen einen geeigneten abstrakten Rahmen dar; aufgrund von schwachen Formulierungen sind vergleichsweise geringe Regularitätseigenschaften der Problem-  
daten ausreichend. Energie-Abschätzungen werden genutzt, um aus der Beschränktheit von Folgen bezüglich gewisser Normen die Existenz einer gegen eine schwache Lösung konvergierenden Teilfolge nachzuweisen. Ähnliche Konzepte verwendet man beispielsweise im Zusammenhang mit gedämpften nichtlinearen Wellengleichungen.



# Kapitel 2

## Erhaltungsgleichungen

**Inhalt.** Es ist naheliegend, mit der Untersuchung von linearen und nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bezüglich der räumlichen und zeitlichen Variablen zu beginnen. Die Methode der Charakteristiken ermöglicht es, Aussagen über die lokale Lösbarkeit von quasi-linearen Gleichungen zu treffen; numerische Approximationsverfahren beruhen ebenfalls auf diesem grundlegenden theoretischen Zugang. Zur Illustration werden zunächst homogene lineare Advektionsgleichungen mit bekannten exakten Lösungen behandelt. Die Überlegungen werden dann auf nichtlineare Erhaltungsgleichungen und insbesondere Burgers-Gleichungen erweitert; implizite Lösungsdarstellungen weisen darauf hin, daß sich in diesem Fall sogar für beliebig oft differenzierbare Anfangsprofile unstetige Lösungen ausbilden. Abschließend wird nachgewiesen, daß die Heaviside-Funktion eine verallgemeinerte Lösung der linearen Advektionsgleichung ist.

### Herleitung von Advektionsgleichungen.

(i) *Reguläre Anfangsprofile.* Die Verschiebung eines regulären Anfangsprofiles

$$u_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} : \xi \longmapsto u_0(\xi)$$

mit konstanter Geschwindigkeit  $c \in \mathbb{R}^d$  wird durch die räumlich und zeitlich abhängige Funktion

$$u : \mathbb{R}^d \times [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R} : (x, t) \longmapsto u(x, t) = u_0(x + c(t - t_0))$$

beschrieben. Partielle Differentiation mittels Kettenregel

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0(x_1 + c_1(t - t_0), \dots, x_d + c_d(t - t_0)), \\ \partial_t u(x, t) &= c_1 \partial_{\xi_1} u_0(x + c(t - t_0)) + \dots + c_d \partial_{\xi_d} u_0(x + c(t - t_0)), \\ c u(x, t) &= \left( c_1 u_0(x + c(t - t_0)), \dots, c_d u_0(x + c(t - t_0)) \right)^T, \\ \nabla \cdot (c u(x, t)) &= c_1 \partial_{\xi_1} u_0(x + c(t - t_0)) + \dots + c_d \partial_{\xi_d} u_0(x + c(t - t_0)), \end{aligned}$$

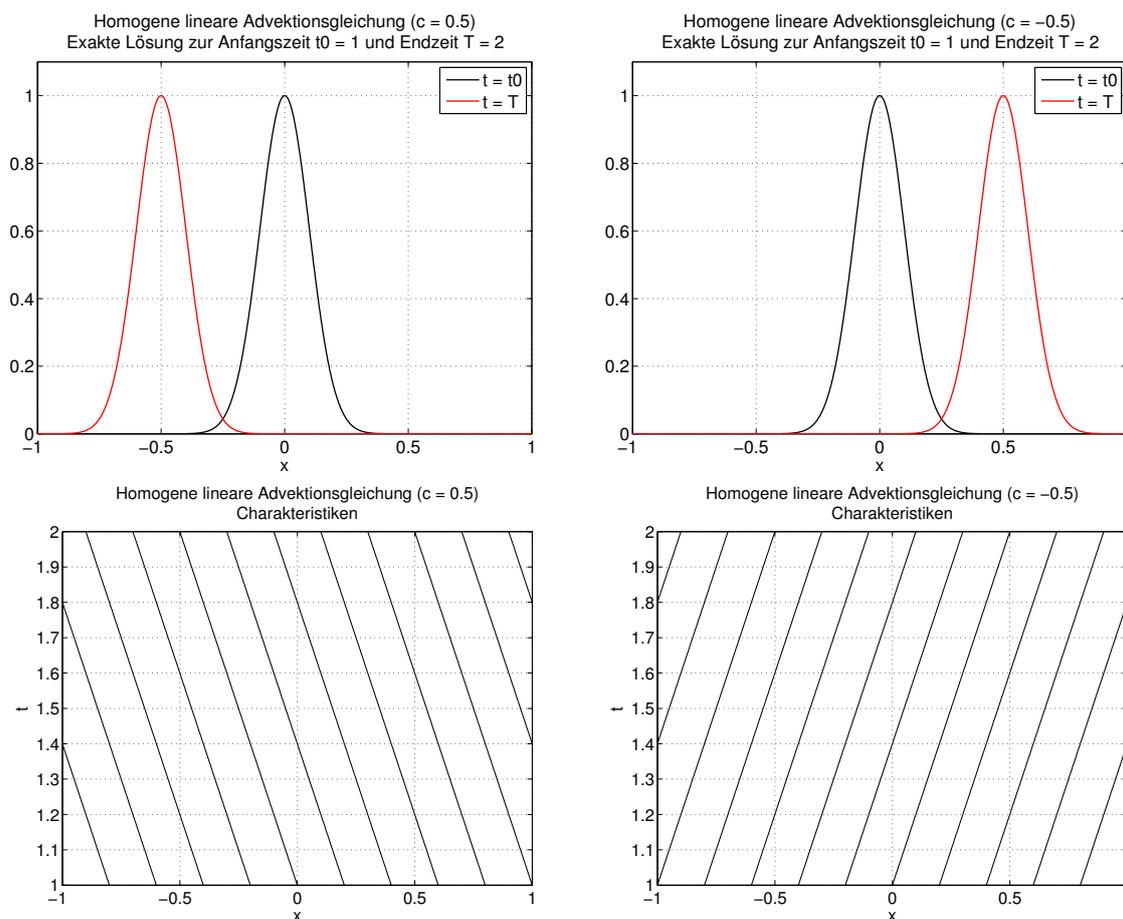


Abbildung 2.1: Klassische Lösungen  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [t_0, T], \mathbb{R})$  von eindimensionalen homogenen linearen Advektionsgleichungen mit positiven bzw. negativen Ausbreitungsgeschwindigkeiten. Zugehörige Charakteristiken  $\{(\xi(t), t) \in \mathbb{R} \times [t_0, T] : u(\xi(t), t) = u(\xi_0, t_0)\}$  sind durch Geraden gegeben.

führt auf eine homogene lineare Advektionsgleichung

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \nabla \cdot (c u(x, t)), & (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (t_0, T), \\ u(x, t_0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

- (ii) *Illustration.* In Abbildung 2.1 sind Lösungen von eindimensionalen homogenen linearen Advektionsgleichungen illustriert. Als Anfangsprofile werden Gauß-Funktionen

$$u_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \xi \longmapsto u_0(\xi) = e^{-\gamma^2 \xi^2}, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

$$u_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

gewählt; bei positiver Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c > 0$  wird das Anfangsprofil nach links verschoben, bei negativer Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c < 0$  nach rechts. Verfolgt

man den Verlauf einzelner Lösungswerte (wobei  $\xi_0 \in \mathbb{R}$ )

$$\left\{ (\xi(t), t) \in \mathbb{R} \times [t_0, T] : u(\xi(t), t) = u_0(\xi_0) \right\},$$

beispielsweise den Maximalwert, so erhält man Geraden; diese werden als Kurven in der  $(x, t)$ -Ebene veranschaulicht und heißen Charakteristiken der Gleichung.<sup>1</sup>

- (iii) *Nichtglatte Anfangsprofile.* Bei Anwendungen etwa im Bereich der Gasdynamik ist auch die Betrachtung von nichtglaten Anfangsprofilen von Relevanz. An späterer Stelle wird gezeigt, daß die Heaviside-Funktion

$$H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

eine Integrallösung der eindimensionalen homogenen linearen Advektionsgleichung ist; ähnliche Argumente gelten für die in Abbildung 2.2 gezeigte Funktion.

### Methode der Charakteristiken.

- (i) *Erhaltungsgleichungen.* Im Folgenden wird die Methode der Charakteristiken für quasi-lineare Erhaltungsgleichungen der Form (wobei  $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ )

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \nabla \cdot f(x, u(x, t)), & (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (t_0, T), \\ u(x, t_0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

beschrieben und anhand von linearen Advektionsgleichungen sowie Burgers-Gleichungen illustriert; da die partiellen Differentialgleichungen in Divergenzform gegeben sind, spricht man auch von Erhaltungsgleichungen in konservativer Form.

- (ii) *Äquivalente Formulierungen.* Es sei daran erinnert, daß  $\nabla = \nabla_x$  die partiellen Ableitungen bezüglich der räumlichen Variablen  $x$  umfaßt; entsprechend werden die partiellen Ableitungen der definierenden Funktion

$$f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d : (\zeta, w) \longmapsto f(\zeta, w) = (f_1(\zeta, w), \dots, f_d(\zeta, w))^T$$

---

<sup>1</sup>*Bemerkungen.*

- (i) Der Begriff der Charakteristik wird in der Literatur nicht einheitlich verwendet. Für die hier betrachteten eindimensionalen skalaren partiellen Differentialgleichungen mit vorgegeben Lösungswerten auf einer zur  $x$ -Achse parallelen Geraden werden die durch  $\xi$  definierten Kurven als Charakteristiken bezeichnet; die entsprechenden Lösungswerte werden nicht hinzugenommen. Dies erlaubt eine Veranschaulichung der Charakteristiken als Kurven in der  $(x, t)$ -Ebene; ansonsten müßte man Kurven im dreidimensionalen Raum darstellen.
- (ii) Im Spezialfall  $c = 0$  verlaufen alle Geraden parallel zur  $t$ -Achse und können damit nicht durch Funktionen der Form  $t = g(x)$  dargestellt werden.

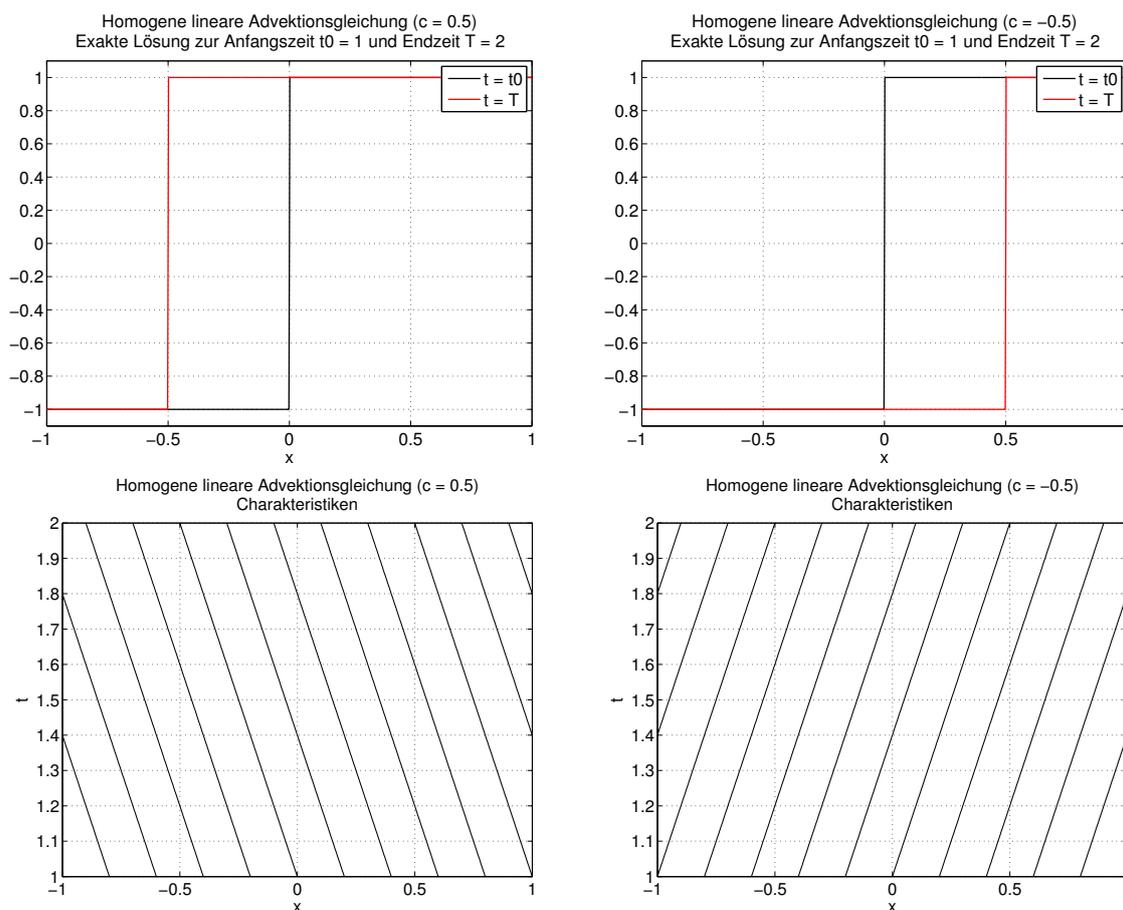


Abbildung 2.2: Verallgemeinerte Lösungen von eindimensionalen homogenen linearen Advektionsgleichungen mit positiven bzw. negativen Ausbreitungsgeschwindigkeiten. Zugehörige Charakteristiken  $\{(\xi(t), t) \in \mathbb{R} \times [t_0, T] : u(\xi(t), t) = u(\xi_0, t_0)\}$  sind durch Geraden gegeben.

mit  $\nabla_\zeta f$  und  $\partial_w f$  bezeichnet. Für reguläre definierende Funktionen und Lösungen folgt mittels Kettenregel (wobei  $\partial_w f = (\partial_w f_1, \dots, \partial_w f_d)^T$ )

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot f(x, u(x, t)) &= \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} f_j(x_1, \dots, x_d, u(x_1, \dots, x_d, t)) \\
 &= \sum_{j=1}^d \partial_{\zeta_j} f_j(x, u(x, t)) + \sum_{j=1}^d \partial_w f_j(x, u(x, t)) \partial_{x_j} u(x, t) \\
 &= \nabla_\zeta \cdot f(x, u(x, t)) + \partial_w f(x, u(x, t)) \cdot \nabla u(x, t)
 \end{aligned}$$

eine für die folgenden Überlegungen zweckmäßige alternative Formulierung

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \partial_w f(x, u(x, t)) \cdot \nabla u(x, t) + \nabla_\zeta \cdot f(x, u(x, t)), & (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (t_0, T), \\ u(x, t_0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

- (iii) *Allgemeiner Zugang.* Die Methode der Charakteristiken ist ein wichtiges theoretisches Hilfsmittel im Zusammenhang mit linearen und nichtlinearen Erhaltungsgleichungen. Sie basiert auf der Idee, von beliebigen Startpunkten  $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$  ausgehend, Elemente des Raumbereiches durch reguläre zeitabhängige Funktionen, die Charakteristiken, zu beschreiben

$$\xi : [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d : t \longmapsto \xi(t), \quad \xi(t_0) = \xi_0.$$

Die Lösungswerte entlang solcher Kurven definieren skalare zeitabhängige Funktionen

$$v : [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto v(t) = u(\xi(t), t), \quad v(t_0) = u(\xi(t_0), t_0) = u_0(\xi_0);$$

für reguläre Lösungen sind diese Kompositionen ebenfalls regulär. Differentiation mittels Kettenregel und Einsetzen der partiellen Differentialgleichung führt auf ( $\nabla u$  umfaßt die partiellen Ableitungen nach den ersten  $d$  Komponenten,  $\partial_t u$  bezeichnet die partielle Ableitung nach der letzten Komponente, ersetze  $v(t) = u(\xi(t), t)$ )

$$\begin{aligned} v'(t) &= \frac{d}{dt} u(\xi(t), t) = \xi'(t) \cdot \nabla u(\xi(t), t) + \partial_t u(\xi(t), t), \\ v'(t) &= \left( \xi'(t) + \partial_w f(\xi(t), v(t)) \right) \cdot \nabla u(\xi(t), t) + \nabla_\zeta \cdot f(\xi(t), v(t)); \end{aligned}$$

diese Relation läßt sich geometrisch als Orthogonalitätsbedingung interpretieren

$$\begin{pmatrix} \xi'(t) + \partial_w f(\xi(t), v(t)) \\ v'(t) - \nabla_\zeta \cdot f(\xi(t), v(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nabla u(\xi(t), t) \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Als zusätzliche Bedingungen an die Charakteristiken und die zugehörigen Lösungswerte fordert man deshalb

$$\xi'(t) + \partial_w f(\xi(t), v(t)) = 0, \quad v'(t) - \nabla_\zeta \cdot f(\xi(t), v(t)) = 0, \quad t \in (t_0, T),$$

genauer, daß das gewöhnliche Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \xi'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_w f(\xi(t), v(t)) \\ \nabla_\zeta \cdot f(\xi(t), v(t)) \end{pmatrix}, & t \in (t_0, T), \\ \begin{pmatrix} \xi(t_0) \\ v(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ u_0(\xi_0) \end{pmatrix}, \end{cases}$$

erfüllt ist; aufgrund der Annahme regulärer Funktionen ist die lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen sichergestellt.

- (iv) *Wichtiger Spezialfall.* In Situationen, wo die definierenden Funktionen nicht explizit von den räumlichen Variablen abhängen

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \nabla \cdot f(u(x, t)), & (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (t_0, T), \\ u(x, t_0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

vereinfachen sich die Bedingungen an die Charakteristiken (aus  $\nabla_{\xi} \cdot f = 0$  folgt  $v'(t) = 0$ )

$$\begin{aligned} \xi : [t_0, T] &\longrightarrow \mathbb{R}^d : t \longmapsto \xi(t), & \xi(t_0) &= \xi_0, \\ v : [t_0, T] &\longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto v(t) = u(\xi(t), t), & v(t_0) &= u(\xi(t_0), t_0) = u_0(\xi_0), \\ v(t) &= u(\xi(t), t) \stackrel{!}{=} v(t_0) = u_0(\xi_0), & t &\in [t_0, T]. \end{aligned}$$

In diesen für Anwendungen relevanten Spezialfällen erfüllen die Charakteristiken gewöhnliche Differentialgleichungen mit bekannten Lösungen ( $f' = \partial_w f$  bezeichnet Jacobi-Matrix von  $f$ , verwende  $v(t) = u_0(\xi_0)$ )

$$\begin{cases} \xi'(t) = -f'(u_0(\xi_0)), & t \in (t_0, T), \\ \xi(t_0) = \xi_0, \end{cases} \\ \xi(t) = \xi_0 - (t - t_0) f'(u_0(\xi_0)), \quad t \in [t_0, T].$$

Die Lösungswerte sind somit implizit durch die Identität

$$x = \xi(t) = \xi_0 - (t - t_0) f'(u_0(\xi_0)), \quad u(x, t) = u_0(\xi_0), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0, T],$$

gegeben, d.h. für einen vorgegebenen Punkt  $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0, T]$  ist der Startpunkt der Charakteristik durch  $x = \xi(t)$  zu bestimmen. Elimination von  $\xi_0$  mittels der Gleichheit

$$\xi_0 = x + (t - t_0) f'(u_0(\xi_0)) = x + (t - t_0) f'(u(x, t)),$$

führt auf alternative implizite Darstellungen

$$u(x, t) = u_0\left(x + (t - t_0) f'(u(x, t))\right), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0, T],$$

d.h. für jedes  $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0, T]$  ist der zugehörige Funktionswert  $u(x, t)$  als Lösung einer nichtlinearen Gleichung gegeben.

- (v) *Lineare Advektionsgleichungen.* Für homogene lineare Advektionsgleichungen mit vorgegebenen regulären Anfangsprofilen (wobei  $c \in \mathbb{R}^d$ )

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \nabla \cdot (c u(x, t)), & (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (t_0, T), \\ u(x, t_0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

führt die Methode der Charakteristiken wie erwartet auf die zuvor angegebene explizite Lösungsdarstellung (Ansatz, Anwendung der Kettenregel und Ersetzen der Zeitableitung durch rechte Seite der partiellen Differentialgleichung  $\nabla \cdot (c u) = c \cdot \nabla u$ , gewöhnliche Differentialgleichung mit bekannter Lösung, Verknüpfung von Punkten mit gleichen Funk-

tionswerten, Substitution  $x = \xi_0 - c(t - t_0)$  bzw.  $\xi_0 = x + c(t - t_0)$ )

$$\begin{aligned} \xi &: [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d : t \longmapsto \xi(t), & \xi(t_0) &= \xi_0, \\ v &: [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto v(t) = u(\xi(t), t), & v(t_0) &= u(\xi(t_0), t_0) = u_0(\xi_0), \\ v(t) &= u(\xi(t), t) \stackrel{!}{=} v(t_0) = u_0(\xi_0), & t &\in [t_0, T], \\ 0 \stackrel{!}{=} v'(t) &= \xi'(t) \cdot \nabla u(\xi(t), t) + \partial_t u(\xi(t), t) = (\xi'(t) + c) \cdot \nabla u(\xi(t), t), & t &\in (t_0, T), \\ & \begin{cases} \xi'(t) = -c, & t \in (t_0, T), \\ \xi(t_0) = \xi_0, \end{cases} \\ \xi(t) &= \xi_0 - c(t - t_0), & t &\in [t_0, T], \\ u(x, t) &= u_0(\xi_0) = u_0(x + c(t - t_0)), & (x, t) &\in \mathbb{R} \times [t_0, T]. \end{aligned}$$

Exakte Lösungen von homogenen linearen Advektionsgleichungen mit Gauß-Funktionen als Anfangsprofilen und zugehörige Charakteristiken sind in Abbildung 2.1 illustriert.

- (vi) *Burgers-Gleichungen.* Im Fall von eindimensionalen Burgers-Gleichungen mit vorgegebenen regulären Anfangsprofilen (wobei  $c \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = c u(x, t) \partial_x u(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (t_0, T), \\ u(x, t_0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

führt die Methode der Charakteristiken auf implizite Lösungsdarstellungen (Ansatz, Anwendung der Kettenregel, Ersetzen der Zeitableitung durch rechte Seite der partiellen Differentialgleichung und Verwenden des Ansatzes, gewöhnliche Differentialgleichung mit bekannter Lösung, Verknüpfung von Punkten mit gleichen Funktionswerten, Verwenden der Relation  $x = \xi_0 - c(t - t_0)$   $u_0(\xi_0) = \xi_0 - c(t - t_0) u(x, t)$  und folglich  $\xi_0 = x + c(t - t_0) u(x, t)$ , implizite Darstellung für gesuchten Lösungswert  $u(x, t)$ )

$$\begin{aligned} \xi &: [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d : t \longmapsto \xi(t), & \xi(t_0) &= \xi_0, \\ v &: [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto v(t) = u(\xi(t), t), & v(t_0) &= u(\xi(t_0), t_0) = u_0(\xi_0), \\ v(t) &= u(\xi(t), t) \stackrel{!}{=} v(t_0) = u_0(\xi_0), & t &\in [t_0, T], \\ 0 \stackrel{!}{=} v'(t) &= \xi'(t) \partial_x u(\xi(t), t) + \partial_t u(\xi(t), t) = (\xi'(t) + c u_0(\xi_0)) \partial_x u(\xi(t), t), & t &\in (t_0, T), \\ & \begin{cases} \xi'(t) = -c u_0(\xi_0), & t \in (t_0, T), \\ \xi(t_0) = \xi_0, \end{cases} \\ \xi(t) &= \xi_0 - c(t - t_0) u_0(\xi_0), & t &\in [t_0, T], \\ u(x, t) &= u_0(\xi_0) = u_0(x + c(t - t_0) u(x, t)), & (x, t) &\in \mathbb{R} \times [t_0, T]. \end{aligned}$$

- (vii) *Illustrationen.* In Abbildung 2.3 und Abbildung 2.4 sind Lösungen von eindimensionalen Burgers-Gleichung mit der Ausbildung von Stoßwellen<sup>2</sup> sowie Lösungen von homo-

<sup>2</sup>Englisch: *Shock wave*.

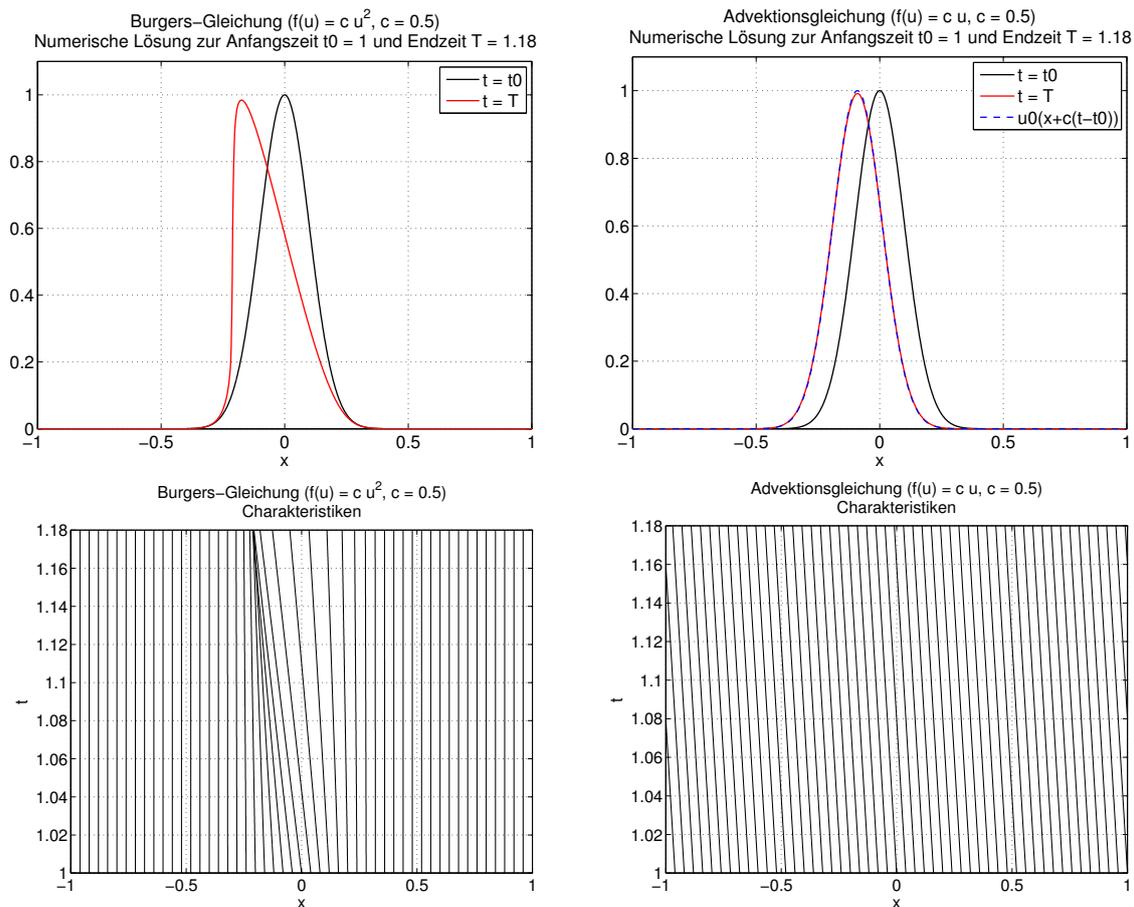


Abbildung 2.3: Eindimensionale Burgers-Gleichung mit Ausbildung von Stoßwellen und Vergleich mit linearer Advektionsgleichung. Numerische Approximation mittels Upwind-Verfahren (dämpfende Eigenschaften).

genen linearen Advektionsgleichungen illustriert; man beachte, daß zusammenlaufende Charakteristiken auf entstehenden Unstetigkeitsstellen hinweisen und der Endzeitpunkt entsprechend angepaßt wurde. Zur numerischen Berechnung wurde das Upwind-Verfahren verwendet; dessen dämpfende Eigenschaften sind insbesondere bei homogenen linearen Advektionsgleichungen mit bekannten exakten Lösungen an einer Verkleinerung des Maximalwertes zu erkennen.

- (viii) *Elementare lineare Gleichung.* Ein in JÜNGEL (2017) angegebenes elementares Beispiel illustriert, daß die Methode der Charakteristiken nur dann zielführend ist, wenn die vorgeschriebene Anfangsbedingung, genauer, die für die Vorgabe von Lösungswerten vorgeschriebene Kurve, geeignet gewählt ist. Für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = 1, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (t_0, T), \\ u(x, t_0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

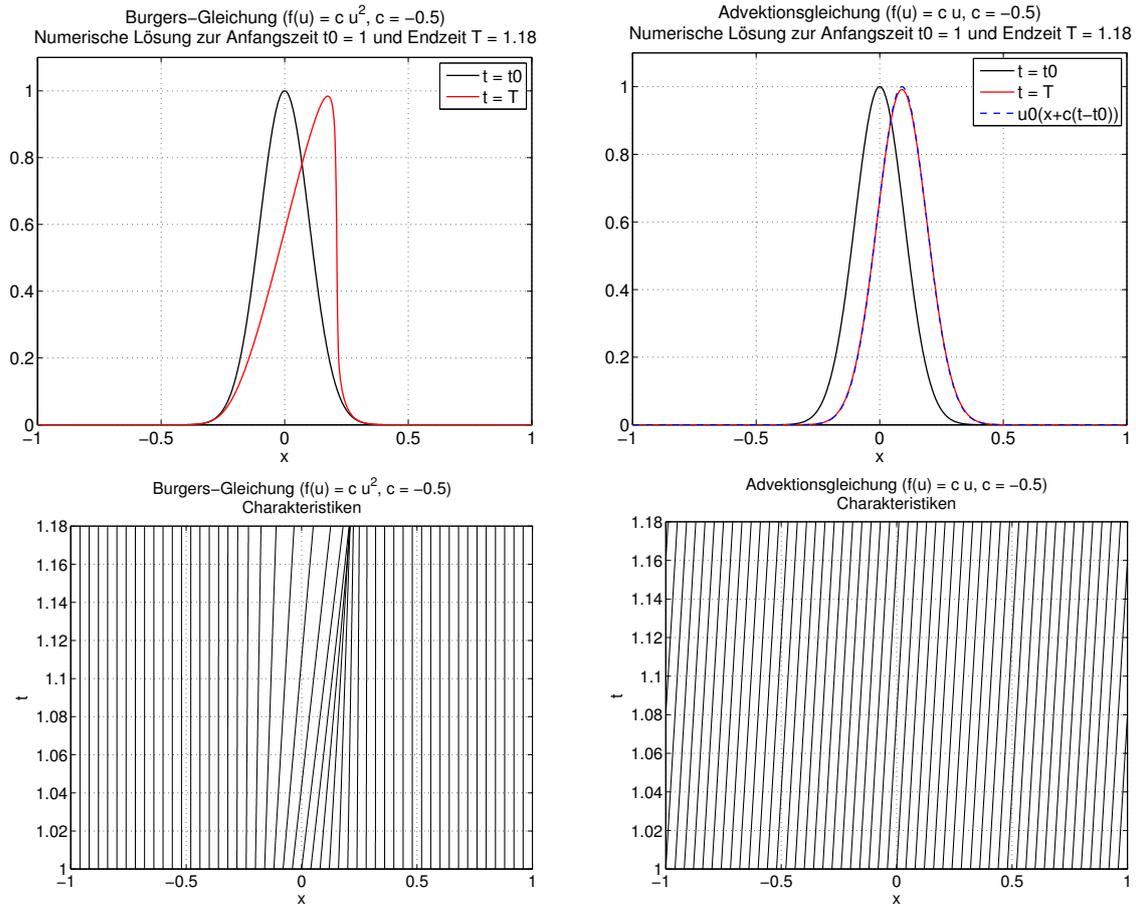


Abbildung 2.4: Eindimensionale Burgers-Gleichung mit Ausbildung von Stoßwellen und Vergleich mit linearer Advektionsgleichung. Numerische Approximation mittels Upwind-Verfahren (dämpfende Eigenschaften).

läßt sich die Lösung mittels direkter Integration bezüglich der zeitlichen Variable sowie Einsetzen der Anfangsbedingung berechnen

$$u(x, t) - u(x, t_0) = t - t_0, \quad u(x, t) = u_0(x) + t - t_0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [t_0, T],$$

und mit Hilfe der Methode der Charakteristiken verifizieren

$$\begin{aligned} \xi &: [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \xi(t), & \xi(t_0) &= \xi_0, \\ v &: [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto v(t) = u(\xi(t), t), & v(t_0) &= u(\xi(t_0), t_0) = u_0(\xi_0), \\ v'(t) &= \xi'(t) \partial_x u(\xi(t), t) + \partial_t u(\xi(t), t) = \xi'(t) \partial_x u(\xi(t), t) + 1, \\ \begin{cases} \xi'(t) = 0, & t \in (t_0, T), \\ \xi(t_0) = \xi_0, \end{cases} & \begin{cases} v'(t) = 1, & t \in (t_0, T), \\ v(t_0) = u_0(\xi_0), \end{cases} \\ x = \xi(t) = \xi_0, & u(x, t) = v(t) = u_0(\xi_0) + t - t_0 = u_0(x) + t - t_0, & t \in [t_0, T]. \end{aligned}$$

Bei der folgenden Anfangsbedingung ist es hingegen nicht möglich, die Lösung zu bestimmen

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = 1, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (t_0, T), \\ u(x_0, t) = u_0(t), & t \in [t_0, T]. \end{cases}$$

- (ix) *Quasi-lineare Gleichung.* Zur abschließenden Illustration der Methode der Charakteristiken ist eine in JÜNGEL (2017) angeführte quasi-lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung bezüglich der räumlichen und der zeitlichen Variablen ergänzt; die Bezeichnungen sind entsprechend angepaßt. Eine kurze Rechnung führt auf eine explizite Lösungsdarstellung (Differentiation und Einsetzen der partiellen Differentialgleichung, Orthogonalitätsbedingungen führen auf gewöhnliche Differentialgleichungen mit bekannten Lösungen)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \partial_t u(x, t) = -\partial_x u(x, t) + (u(x, t))^2, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (t_0, T), \\ u(x, t_0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \\ & \xi: [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}: t \longmapsto \xi(t), \quad \xi(t_0) = \xi_0, \\ & v: [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}: t \longmapsto v(t) = u(\xi(t), t), \quad v(t_0) = u(\xi(t_0), t_0) = u_0(\xi_0), \\ & v'(t) = \xi'(t) \partial_x u(\xi(t), t) + \partial_t u(\xi(t), t) = (\xi'(t) - 1) \partial_x u(\xi(t), t) + (v(t))^2, \\ & \begin{cases} \xi'(t) = 1, & t \in (t_0, T), \\ \xi(t_0) = \xi_0, \end{cases} \quad \begin{cases} v'(t) = (v(t))^2, & t \in (t_0, T), \\ v(t_0) = u_0(\xi_0), \end{cases} \\ & \xi(t) = \xi_0 + t - t_0, \quad t \in [t_0, T], \\ & -\left(\frac{1}{v(t)} - \frac{1}{u_0(\xi_0)}\right) = t - t_0, \quad v(t) = \frac{u_0(\xi_0)}{1 - (t - t_0) u_0(\xi_0)}, \quad t \in [t_0, T], \\ & x = \xi_0 + t - t_0, \quad \xi_0 = x - (t - t_0), \\ & u(x, t) = \frac{u_0(x - (t - t_0))}{1 - (t - t_0) u_0(x - (t - t_0))}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [t_0, T]. \end{aligned}$$

- (x) *Verweis.* Für eine etwas allgemeinere Darstellung der Methode der Charakteristiken sei auf JÜNGEL (2017) verwiesen.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>*Bemerkung.* Für eine quasi-lineare partielle Differentialgleichung der Form

$$a(x, t, u(x, t)) \partial_x u(x, t) + b(x, t, u(x, t)) \partial_t u(x, t) - c(x, t, u(x, t)) = 0$$

mit auf einer Kurve  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  vorgegebenen Anfangswerten würde man folgenden Ansatz verwenden

$$\begin{aligned} & (\xi_0, \tau_0) \in \Gamma, \quad u(\xi_0, \tau_0) \text{ gegeben,} \\ & x = \xi(s), \quad \xi(s_0) = \xi_0, \quad t = \tau(s), \quad \tau(s_0) = \tau_0, \quad s \in [s_0, S], \\ & v(s) = u(\xi(s), \tau(s)), \quad s \in [s_0, S], \\ & v'(s) = \xi'(s) \partial_x u(\xi(s), \tau(s)) + \tau'(s) \partial_t u(\xi(s), \tau(s)), \\ & \xi'(s) \partial_x u(\xi(s), \tau(s)) + \tau'(s) \partial_t u(\xi(s), \tau(s)) - v'(s) = 0, \\ & a(\xi(s), \tau(s), v(s)) \partial_x u(\xi(s), \tau(s)) + b(\xi(s), \tau(s), v(s)) \partial_t u(\xi(s), \tau(s)) - c(\xi(s), \tau(s), v(s)) = 0, \\ & \xi'(s) = a(\xi(s), \tau(s), v(s)), \quad \tau'(s) = b(\xi(s), \tau(s), v(s)), \quad v'(s) = c(\xi(s), \tau(s), v(s)). \end{aligned}$$

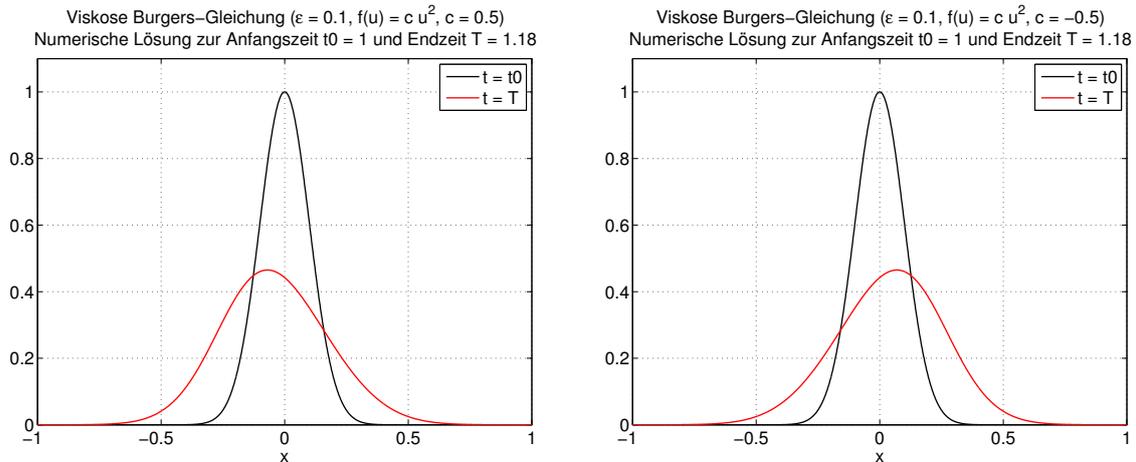


Abbildung 2.5: Eindimensionale viskose Burgers-Gleichungen. Numerische Approximation mittels Lie–Trotter–Splitting-Verfahren und explizitem Euler-Verfahren; Realisierung mittels FFT.

**Regularisierte Gleichungen.** Um den regularisierende Effekt von zusätzlichen Diffusions-termen zu illustrieren, werden in Abbildungen 2.5-2.8 numerisch berechnete Lösungen von eindimensionalen viskosen Burgers-Gleichungen (wobei  $\varepsilon > 0$  und  $0 \neq c \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \varepsilon \partial_{xx} u(x, t) + c u(x, t) \partial_x u(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (t_0, T), \\ u(x, t_0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

veranschaulicht; zum Vergleich sind außerdem numerisch berechnete Lösungen von Diffusions-Advektions-Gleichungen der Form

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = \varepsilon \partial_{xx} u(x, t) + c \partial_x u(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (t_0, T), \\ u(x, t_0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ergänzt. Am deutlichsten zeigt sich das regularisierende Verhalten des zusätzlichen Laplace-Operators für  $\varepsilon = 10^{-1}$ ; für  $\varepsilon = 10^{-4}$  ist bei bloßem Hinsehen kein Unterschied zwischen den Lösungen der nicht-viskosen und der entsprechenden viskosen Gleichungen, welche der Klasse der parabolischen Gleichungen zuzuordnen sind, zu erkennen.

**Verallgemeinerte Lösungen.** Wie zuvor erwähnt, ist es beispielsweise in Hinblick auf relevante Anwendungen mit der Ausbreitung von Stoßwellen wünschenswert, auch Funktionen mit geringeren Regularitätseigenschaften als verallgemeinerte Lösungen von Erhaltungsgleichungen zuzulassen. Im Folgenden werden homogene lineare Advektionsgleichungen und

---

Entsprechende Überlegungen gelten für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung in mehreren Raumvariablen.

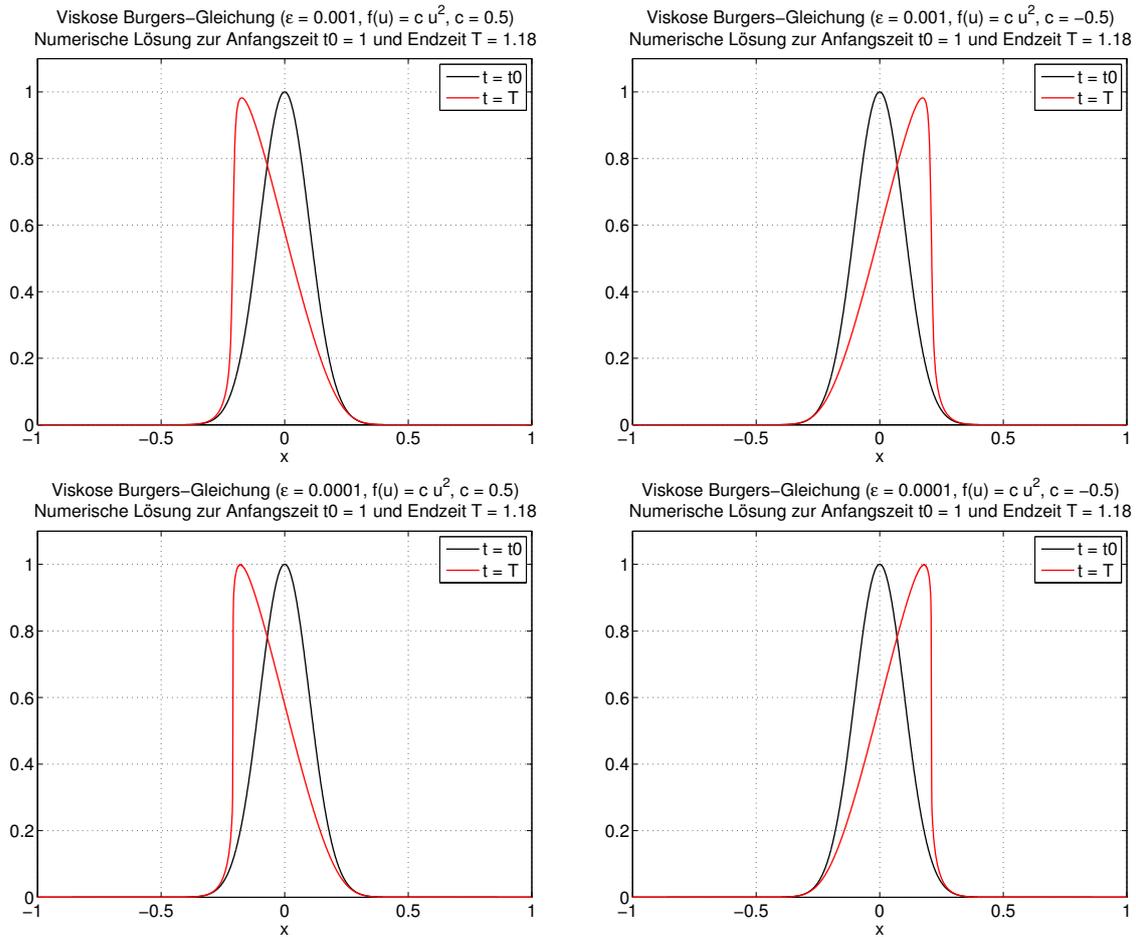


Abbildung 2.6: Eindimensionale viskose Burgers-Gleichungen. Numerische Approximation mittels Lie–Trotter-Splitting-Verfahren und explizitem Euler-Verfahren; Realisierung mittels FFT.

spezielle Anfangsprofile mit isolierten Unstetigkeitsstellen betrachtet; zur Vereinfachung wird der Fall einer Raumdimension untersucht.

- (i) *Lineare Advektionsgleichungen.* Für  $u_0 \notin \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  und  $0 \neq c \in \mathbb{R}$  beschreiben die durch

$$u : \mathbb{R} \times [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R} : (x, t) \longmapsto u_0(x + c(t - t_0))$$

definierten Funktionen Verschiebungen von Anfangsprofilen mit konstanten Geschwindigkeiten; aufgrund der fehlenden Regularitätseigenschaften sind sie jedoch keine klassischen Lösungen der zugehörigen eindimensionalen homogenen linearen Advektionsgleichungen

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = c \partial_x u(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (t_0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

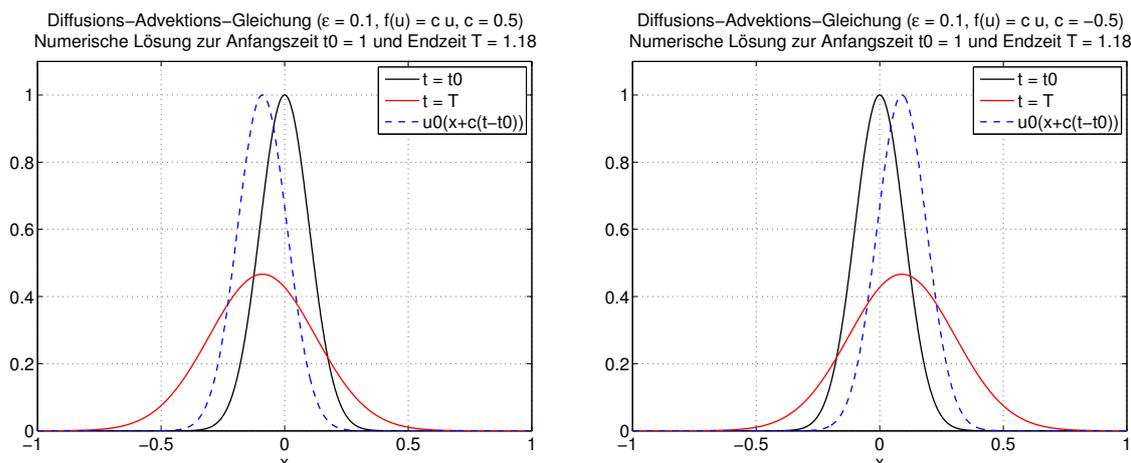


Abbildung 2.7: Eindimensionale Diffusions-Advektions-Gleichungen. Numerische Approximation mittels Lie-Trotter-Splitting-Verfahren und explizitem Euler-Verfahren; Realisierung mittels FFT. Vergleich mit exakten Lösungen von linearen Advektionsgleichungen.

Der Begriff der Integrallösung eröffnet die Möglichkeit, weiterhin kompakte Formulierungen als partielle Differentialgleichungen zu nützen.

- (ii) *Integrallösungen.* Ausgehend von den angegebenen Anfangswertproblemen führt die Multiplikation der partiellen Differentialgleichungen mit hinreichend regulären, ansonsten beliebig wählbaren Testfunktionen<sup>4</sup> sowie Integration bezüglich der räumlichen und zeitlichen Variablen auf

$$\partial_t u(x, t) - c \partial_x u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (t_0, T),$$

$$v : \mathbb{R} \times [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \int_{[t_0, T]} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u(x, t) - c \partial_x u(x, t)) v(x, t) dx dt = 0.$$

Die grundlegende Idee von Integrallösungen ist es, sowohl die räumliche partielle Ableitung als auch die zeitliche partielle Ableitung auf die Testfunktionen zu verschieben;

<sup>4</sup> *Bemerkung.* Für eine Testfunktion wird üblicherweise vorausgesetzt, daß sie bezüglich der räumlichen Variablen beliebig oft differenzierbar ist

$$v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \mathcal{C}^m(\Omega, \mathbb{R});$$

um das Auftreten von Randtermen zu vermeiden, fordert man im Allgemeinen auch, daß der Träger eine kompakte Menge bildet

$$v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}) = \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) : \text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}} \text{ kompakt in } \Omega \right\}.$$

Im Zusammenhang mit Integrallösungen für Erhaltungsgleichungen werden zusätzliche Eigenschaften bezüglich der Zeitvariable benötigt.

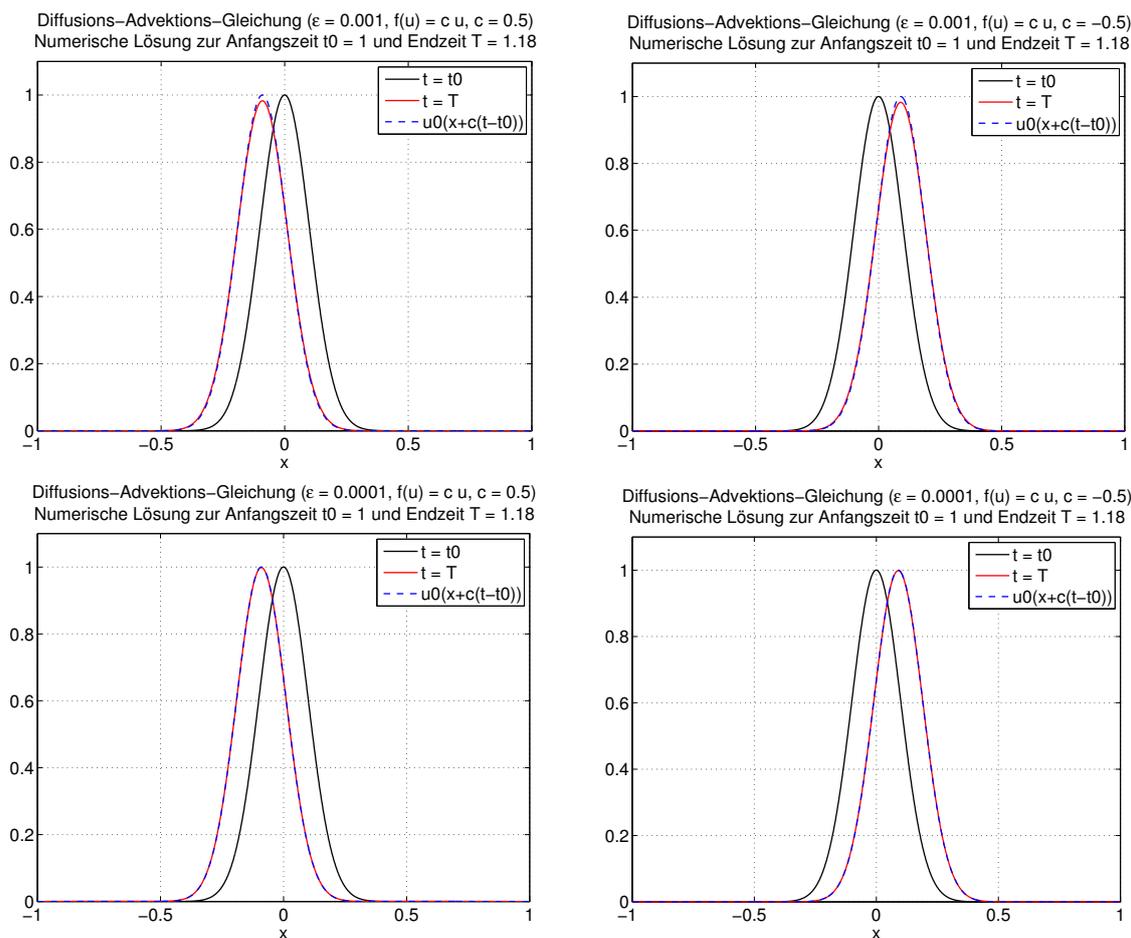


Abbildung 2.8: Eindimensionale Diffusions-Advektions-Gleichungen. Numerische Approximation mittels Lie-Trotter-Splitting-Verfahren und explizitem Euler-Verfahren; Realisierung mittels FFT. Vergleich mit exakten Lösungen von linearen Advektionsgleichungen.

mittels partieller Integration und durch Einsetzen der Anfangsbedingung erhält man

$$\int_{[t_0, T]} \partial_t u(x, t) v(x, t) dt = u(x, T) v(x, T) - u_0(x) v(x, t_0) - \int_{[t_0, T]} u(x, t) \partial_t v(x, t) dt,$$

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_x u(x, t) v(x, t) dx = u(x, t) v(x, t) \Big|_{x=-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} u(x, t) \partial_x v(x, t) dx.$$

Da man in der vorliegenden Situation keine Informationen über die Randterme

$$u(x, T) v(x, T), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) v(x, t), \quad t \in [t_0, T],$$

hat, ist es naheliegend, die Menge der Testfunktionen entsprechend einzuschränken

$$\mathcal{V} = \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [t_0, T], \mathbb{R}) : \varphi(x, T) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, \lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x, t) = 0 \text{ für alle } t \in [t_0, T] \right\}.$$

Dies erklärt die Betrachtung der Integralgleichungen

$$\int_{[t_0, T]} \int_{\mathbb{R}} u(x, t) (\partial_t v(x, t) - c \partial_x v(x, t)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) v(x, t_0) dx = 0$$

und die folgende Definition

$u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [t_0, T], \mathbb{R})$  Integrallösung

$$\iff \left( \forall v \in \mathcal{V} : \int_{[t_0, T]} \int_{\mathbb{R}} u(x, t) (\partial_t v(x, t) - c \partial_x v(x, t)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) v(x, t_0) dx = 0 \right);$$

man beachte, daß klassische Lösungen von Anfangswertproblemen für homogene lineare Advektionsgleichungen insbesondere Integrallösungen sind.

(iii) *Heaviside-Funktion.* Um zu zeigen, daß die Heaviside-Funktion mit einer Unstetigkeitsstelle im Ursprung

$$u_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

auf Integrallösungen von homogenen linearen Advektionsgleichungen führt

$$u : \mathbb{R} \times [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R} : (x, t) \longmapsto u(x, t) = u_0(x + c(t - t_0)) = \begin{cases} 1, & x + c(t - t_0) \geq 0, \\ 0, & x + c(t - t_0) < 0, \end{cases}$$

ist die Gültigkeit der Relation

$$\forall v \in \mathcal{V} : \int_{[t_0, T]} \int_{\mathbb{R}} u(x, t) (\partial_t v(x, t) - c \partial_x v(x, t)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) v(x, t_0) dx = 0$$

nachzuweisen. Bei Einsetzen der Lösungswerte vereinfachen sich die Integrale zu

$$\begin{aligned} I &= \int_{[t_0, T]} \int_{\mathbb{R}} u(x, t) (\partial_t v(x, t) - c \partial_x v(x, t)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) v(x, t_0) dx \\ &= \int_J (\partial_t v(x, t) - c \partial_x v(x, t)) d(x, t) + \int_{[0, \infty)} v(x, t_0) dx, \end{aligned}$$

wobei der Integrationsbereich durch

$$J = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times [t_0, T] : x \geq -c(t - t_0)\} = J_1 \cup J_2, \quad J_1 = [0, \infty) \times [t_0, T],$$

gegeben ist. Für die Angabe von  $J_2$  ist es zweckmäßig, positive und negative Ausbreitungsgeschwindigkeiten und entsprechend die beiden Fälle (verwende  $t_0 < T$ )

$$\begin{cases} -cT < -ct_0, & \text{falls } c > 0, \\ -ct_0 < -cT, & \text{falls } c < 0, \end{cases}$$

zu unterscheiden, vgl. Abbildung 2.9. Für  $c > 0$  gilt die Gleichheit (in Hinblick auf Re-

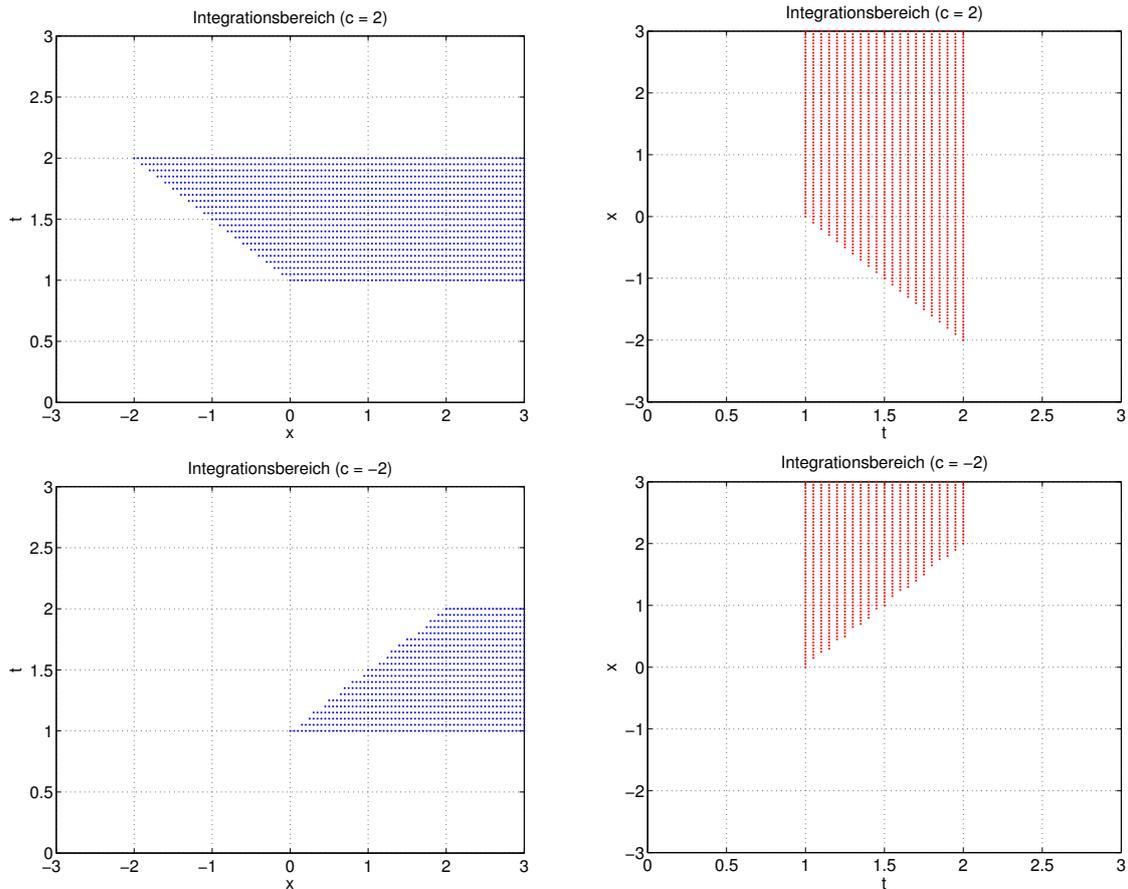


Abbildung 2.9: Integrationsbereiche für positive und negative Ausbreitungsgeschwindigkeiten. Darstellungen in der  $(x, t)$ -Ebene und  $(t, x)$ -Ebene.

lation  $x = -c(t - t_0)$  betrachte affin-lineare Funktion  $g_1(t) = -c(t - t_0)$  mit  $g_1(t_0) = 0$  und  $g_1(T) = -c(T - t_0)$ , inverse Funktion  $g_2(x) = t_0 - \frac{1}{c}x$  erfüllt  $g_2(-c(T - t_0)) = T$  und  $g_2(0) = t_0$

$$c > 0: \quad J_2 = \left\{ (x, t) : x \in [-c(T - t_0), 0], t_0 - \frac{1}{c}x \leq t \leq T \right\} \\ = \left\{ (x, t) : t \in [t_0, T], -c(t - t_0) \leq x \leq 0 \right\};$$

eine kurze Rechnung führt auf das gewünschte Ergebnis (Integration, Einsetzen der Null-Randbedingungen an  $v$  für  $x \rightarrow \infty$  und  $t = T$ , Vereinfachen, Substitution  $t = t_0 - \frac{1}{c}x$

bzw.  $x = -c(t - t_0)$ )

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{J_1 \cup J_2} (\partial_t v(x, t) - c \partial_x v(x, t)) \, d(x, t) + \int_{[0, \infty)} v(x, t_0) \, dx \\
 &= \int_{[0, \infty)} \int_{[t_0, T]} \partial_t v(x, t) \, dt \, dx + \int_{[-c(T-t_0), 0]} \int_{[t_0 - \frac{1}{c}x, T]} \partial_t v(x, t) \, dt \, dx \\
 &\quad - c \int_{[t_0, T]} \int_{[0, \infty)} \partial_x v(x, t) \, dx \, dt - c \int_{[t_0, T]} \int_{[-c(t-t_0), 0]} \partial_x v(x, t) \, dx \, dt + \int_{[0, \infty)} v(x, t_0) \, dx \\
 &= \int_{[0, \infty)} (v(x, T) - v(x, t_0)) \, dx + \int_{[-c(T-t_0), 0]} (v(x, T) - v(x, t_0 - \frac{1}{c}x)) \, dx \\
 &\quad - c \int_{[t_0, T]} \left( \lim_{x \rightarrow \infty} v(x, t) - v(0, t) \right) \, dt - c \int_{[t_0, T]} (v(0, t) - v(-c(t-t_0), t)) \, dt \\
 &\quad + \int_{[0, \infty)} v(x, t_0) \, dx \\
 &= - \int_{[-c(T-t_0), 0]} v(x, t_0 - \frac{1}{c}x) \, dx + c \int_{[t_0, T]} v(-c(t-t_0), t) \, dt \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Ähnliche Überlegungen zeigen die Behauptung für  $c < 0$ . ◇

- (iv) *Bemerkung.* Aufgrund der Linearität von homogenen Advektionsgleichungen können die Überlegungen direkt auf Anfangsprofile, welche durch Linearkombinationen von Heaviside-Funktionen mit verschiedenen Polen gegeben sind, erweitert werden.
- (v) *Nichtlineare Erhaltungsgleichungen.* Im nichtlinearen Fall ist die Situation wesentlich komplexer; zusätzliche Informationen zu verallgemeinerten Lösungen von nichtlinearen Erhaltungsgleichungen, insbesondere zu eindimensionalen Burgers-Gleichungen, sind beispielsweise unter

<https://web.stanford.edu/class/math220a/handouts/conservation.pdf>

zu finden.