Konversatorium zur Vorbereitung der zweiten Diplomprüfung im Lehramtsstudium (Nr. 702693, KO1, ECTS 0.5)

Schwingungsgleichungen

Quelle. Skriptum von Peter Wagner[1] zur Vorlesung *Mathematik A*.

Kapitel IV.17 Die Schwingungsgleichung

[1] Siehe http://mat1.uibk.ac.at/wagner/skripten.html

Wesentliche Inhalte.

(1) *Physikalisches Modell.*

- *Klassische Mechanik (Newtonsche Axiome).*

  Die Bewegung eines Körpers wird mittels einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben

  $$\text{Masse} \times \text{Beschleunigung} \;=\; \text{Summe der einwirkenden Kräfte}\,.$$

  Bei Vorgabe zusätzlicher Anfangsbedingungen (Anfangsposition und Anfangsgeschwindigkeit) ist die Bewegung des Körpers eindeutig bestimmt.

  Dies führt auf ein Anfangswertproblem der Form

  $$\begin{cases} y''(t) = F\big(t, y(t), y'(t)\big)\,, & t \in [0,T]\,,\\ y(0) \text{ gegeben}\,, \quad y'(0) \text{ gegeben}\,. \end{cases}$$

- *Spezielle Situation (Schwingungsgleichung).*

  Körper der Masse $m > 0$ (zur Vereinfachung Normierung $m = 1$).

  Einwirkung einer linearen Federkraft (Rückstellkraft proportional zur Auslenkung der Feder aus der Ruhelage, Federkonstante $k > 0$)

  $$F_{\text{Feder}}(t) = -\,k\,y(t)\,.$$

  Einwirkung einer linearen Reibungskraft (dämpfende Kraft proportional zur Geschwindigkeit, Reibungskonstante $r > 0$, Spezialfall $r = 0$ bei einer ungedämpften Schwingung)

  $$F_{\text{Reibung}}(t) = -\,r\,y'(t)\,.$$

  Zusätzliche Einwirkung einer zeitabhängigen äußeren Kraft $f : [0,T] \to \mathbb{R} : t \mapsto f(t)$.

  Zu bestimmen ist die Auslenkung des Körpers aus der Ruhelage bei Vorgabe der Anfangsposition und der Anfangsgeschwindigkeit, d.h. eine zeitabhängige Funktion $y : [0,T] \to \mathbb{R} : t \mapsto y(t)$, welche das Anfangswertproblem

  $$\begin{cases} y''(t) + r\,y'(t) + k\,y(t) = f(t)\,, & t \in [0,T]\,,\\ y(0) \text{ gegeben}\,, \quad y'(0) \text{ gegeben}\,, \end{cases}$$

  erfüllt. Insbesondere im Spezialfall einer ungedämpften Schwingung (d.h. $r = 0$) erwartet man eine periodische Funktion als Lösung.

(2) *Umformulierung als Differentialgleichungssystem erster Ordnung.* Zur Bestimmung der Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist es zweckmäßig, diese als ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung zu formulieren. Mittels

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix},$$

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -k\,y_1(t) - r\,y_2(t) + f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

ergibt sich das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} Y'(t) = A\,Y(t) + b(t), & t \in [0,T], \\ Y(0) \text{ gegeben}, \end{cases}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -r \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

(3) *Eigenwertzerlegung.* Im generischen Fall $r^2 - 4k \neq 0$ besitzt die Matrix A zwei voneinander verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2$, die ein Eigensystem des $\mathbb{C}^2$ bilden, und somit ergibt sich die Zerlegung

$$r^2 - 4\,k \neq 0: \qquad A = V \Lambda V^{-1},$$

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}\,r < 0, \quad \beta = \tfrac{1}{2}\sqrt{r^2 - 4k} = \mathrm{i}\,\gamma,$$

$$\lambda_1 = \alpha - \beta = \alpha - \mathrm{i}\,\gamma, \quad \lambda_2 = \alpha + \beta = \alpha + \mathrm{i}\,\gamma,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \tfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beachte, daß im Spezialfall einer ungedämpften Schwingung die Relationen

$$r = 0: \qquad \alpha = 0, \quad \beta = \mathrm{i}\sqrt{k}, \quad \gamma = \sqrt{k}.$$

folgen.

Exponentialfunktion. Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit Eigenzerlegung $A = V\Lambda V^{-1}$ ist die zugehörige Matrixexponentialfunktion gegeben durch (wegen $A^j = V\Lambda^j V^{-1}$ für $j \in \mathbb{N}$)

$$\mathrm{e}^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \tfrac{1}{j!}\, t^j A^j = V \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tfrac{1}{j!}\, t^j \Lambda^j \right) V^{-1} = V\,\mathrm{e}^{t\Lambda}\,V^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Inbesondere ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA} &= V\,\mathrm{e}^{t\Lambda}\,V^{-1} \\
&= \tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{t\lambda_1} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{t\lambda_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_2 & -1\\ -\lambda_1 & 1\end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_2\,\mathrm{e}^{t\lambda_1} & -\mathrm{e}^{t\lambda_1}\\ -\lambda_1\,\mathrm{e}^{t\lambda_2} & \mathrm{e}^{t\lambda_2}\end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix}\lambda_2\,\mathrm{e}^{t\lambda_1}-\lambda_1\,\mathrm{e}^{t\lambda_2} & \mathrm{e}^{t\lambda_2}-\mathrm{e}^{t\lambda_1}\\ \lambda_1\,\lambda_2\big(\mathrm{e}^{t\lambda_1}-\mathrm{e}^{t\lambda_2}\big) & \lambda_2\,\mathrm{e}^{t\lambda_2}-\lambda_1\,\mathrm{e}^{t\lambda_1}\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R},
\end{aligned}
$$

und mittels $\lambda_1 = \alpha - \beta$ sowie $\lambda_2 = \alpha + \beta$ folgt

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA} &= \tfrac{1}{2\beta}\,\mathrm{e}^{t\alpha}\begin{pmatrix}\big(\alpha+\beta\big)\,\mathrm{e}^{-t\beta}-(\alpha-\beta)\,\mathrm{e}^{t\beta} & \mathrm{e}^{t\beta}-\mathrm{e}^{-t\beta}\\ \big(\beta-\alpha\big)\big(\alpha+\beta\big)\big(\mathrm{e}^{t\beta}-\mathrm{e}^{-t\beta}\big) & \big(\alpha+\beta\big)\,\mathrm{e}^{t\beta}-\big(\alpha-\beta\big)\,\mathrm{e}^{-t\beta}\end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{2\beta}\,\mathrm{e}^{t\alpha}\begin{pmatrix}-\alpha\big(\mathrm{e}^{t\beta}-\mathrm{e}^{-t\beta}\big)+\beta\big(\mathrm{e}^{t\beta}+\mathrm{e}^{-t\beta}\big) & \mathrm{e}^{t\beta}-\mathrm{e}^{-t\beta}\\ \big(\beta^2-\alpha^2\big)\big(\mathrm{e}^{t\beta}-\mathrm{e}^{-t\beta}\big) & \alpha\big(\mathrm{e}^{t\beta}-\mathrm{e}^{-t\beta}\big)+\beta\big(\mathrm{e}^{t\beta}+\mathrm{e}^{-t\beta}\big)\end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{\beta}\,\mathrm{e}^{t\alpha}\begin{pmatrix}-\alpha\,\sinh(t\beta)+\beta\,\cosh(t\beta) & \sinh(t\beta)\\ \big(\beta^2-\alpha^2\big)\,\sinh(t\beta) & \alpha\,\sinh(t\beta)+\beta\,\cosh(t\beta)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Resultat (Verschiedene Eigenwerte). Multiplikation mit $C = (C_1, C_2)^T \in \mathbb{R}^2$ führt auf

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA}C &= \tfrac{1}{\beta}\,\mathrm{e}^{t\alpha}\begin{pmatrix}-\alpha\,\sinh(t\beta)+\beta\,\cosh(t\beta) & \sinh(t\beta)\\ \big(\beta^2-\alpha^2\big)\,\sinh(t\beta) & \alpha\,\sinh(t\beta)+\beta\,\cosh(t\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{t\alpha}\begin{pmatrix}\frac{1}{\beta}\big(-C_1\,\alpha+C_2\big)\,\sinh(t\beta)+C_1\,\cosh(t\beta)\\ \frac{1}{\beta}\Big(C_1\big(\beta^2-\alpha^2\big)+C_2\,\alpha\Big)\,\sinh(t\beta)+C_2\,\cosh(t\beta)\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Resultat (Doppelter Eigenwert). Im Spezialfall eines doppelten Eigenwertes existiert kein Eigensystem, jedoch führt dann der Grenzübergang $\beta \to 0$ und somit $\frac{\sinh(t\beta)}{t\beta} \to 1$ und $\cosh(t\beta) \to 1$ auf das Ergebnis

$$
\mathrm{e}^{tA}C = \mathrm{e}^{t\alpha}\begin{pmatrix}\big(-C_1\,\alpha+C_2\big)\,t+C_1\\ \Big(C_1\big(\beta^2-\alpha^2\big)+C_2\,\alpha\Big)\,t+C_2\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}.
$$

(4) *Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems.* Die Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems, genauer des Anfangswertproblems (mit $Y = (y, y')^T$)

$$
\begin{cases} Y'(t) = A\,Y(t), & t\in[0,T],\\ Y(0)\ \text{gegeben}, \end{cases}
$$

ist gegeben durch

$$
Y(t) = \mathrm{e}^{tA}\,Y(0), \quad t\in[0,T].
$$

In Hinblick auf das Lösungsverhalten unterscheidet man folgende Fälle.

(i) *Periodischer Fall.* Falls $r^2 - 4k < 0$ bzw. $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{4k - r^2} > 0$ ergibt sich aus den obigen Überlegungen (zusätzliches Ersetzen $\beta = \mathrm{i}\,\gamma$ und $2\sinh(\mathrm{i}\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi} = 2\mathrm{i}\sin\xi$ sowie $2\cosh(\mathrm{i}\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi} = 2\cos\xi$)

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}\,r \leq 0\,, \qquad \gamma = \tfrac{1}{2}\sqrt{4k - r^2} > 0\,,$$

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{t\alpha} \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma}\big(-\,y(0)\,\alpha + y'(0)\big)\,\sin(t\gamma) + y(0)\,\cos(t\gamma) \\ \frac{1}{\gamma}\Big(-\,y(0)\,\big(\alpha^2 + \gamma^2\big) + y'(0)\,\alpha\Big)\,\sin(t\gamma) + y'(0)\,\cos(t\gamma) \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,T]\,.$$

(ii) *Aperiodischer Fall.* Falls $r^2 - 4k > 0$ bzw. $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - 4k} > 0$ erhält man die Lösungsdarstellung

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}\,r < 0\,, \qquad \beta = \tfrac{1}{2}\sqrt{r^2 - 4k} > 0\,,$$

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{t\alpha} \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta}\big(-\,y(0)\,\alpha + y'(0)\big)\,\sinh(t\beta) + y(0)\,\cosh(t\beta) \\ \frac{1}{\beta}\Big(y(0)\,\big(\beta^2 - \alpha^2\big) + y'(0)\,\alpha\Big)\,\sinh(t\beta) + y'(0)\,\cosh(t\beta) \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,T]\,.$$

(iii) *Aperiodischer Grenzfall.* Speziell für $r^2 - 4k = 0$ bzw. $\beta = 0 = \gamma$ folgt

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}\,r < 0\,, \qquad \beta = 0 = \gamma\,,$$

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{t\alpha} \begin{pmatrix} y(0) + \big(-\,y(0)\,\alpha + y'(0)\big)\,t \\ y'(0) + \big(-\,y(0)\,\alpha^2 + y'(0)\,\alpha\big)\,t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,T]\,.$$

(5) *Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems.* Für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} Y'(t) = A\,Y(t) + b(t)\,, & t \in [0,T]\,, \\ Y(0) \ \text{gegeben}\,, \end{cases}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -r \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

ergibt sich mittels der linearen Variation-der-Konstanten Formel die Lösungsdarstellung

$$Y(t) = \mathrm{e}^{tA}\,Y(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)A}\,b(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \quad t \in [0,T]\,.$$

Spezialfall. Setzt man speziell $Y(0) = 0$ so ergibt sich die Lösungsdarstellung

$$Y(0) = 0: \qquad y(t) = \tfrac{1}{\gamma}\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\alpha}\,\sin\big((t-\tau)\gamma\big)\,f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \quad t \in [0,T]\,.$$

Illustration.

(1) Einfache Spezialfälle