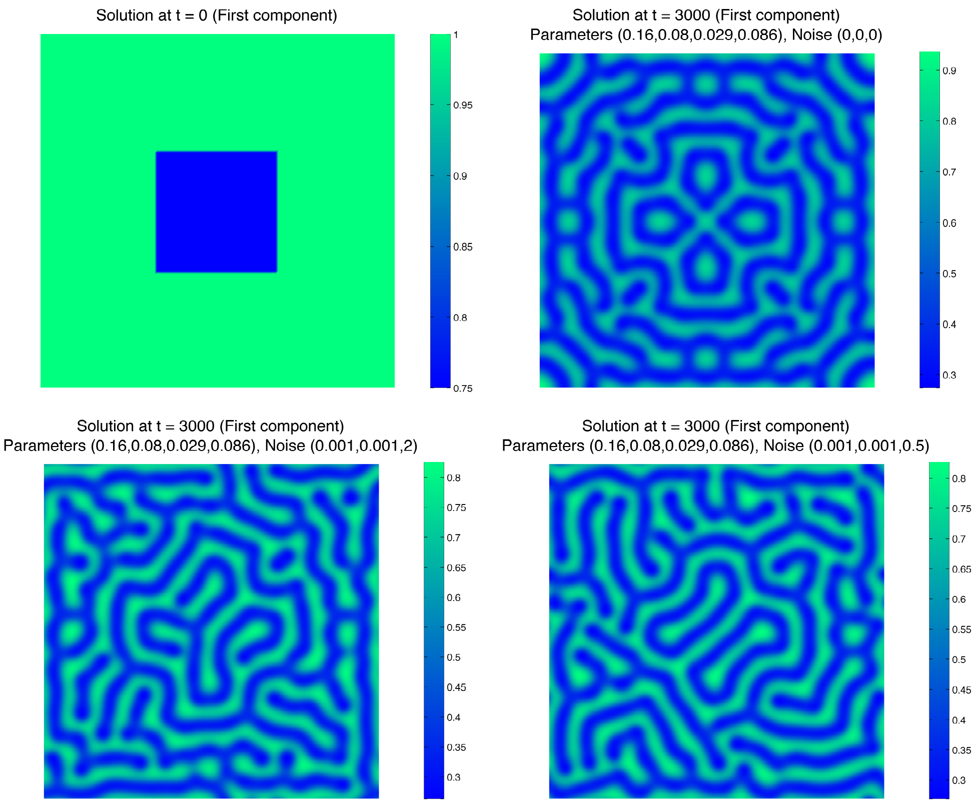
Kompendium zur Lehrveranstaltung

Stochastik

Daniela Schiefeneder
Mechthild Thalhammer



Leopold–Franzens Universität Innsbruck

Sommersemester 2019

Statistiken sind kein Ersatz für das eigene Urteil.
Das Beste (1974)

Statistiken sind mit Vorsicht zu genießen und mit Verstand einzusetzen.
CARL HAHN (*1926)

Traue keiner Statistik, die Du nicht selbst gefälscht hast.
Ein fälschlicherweise WINSTON CHURCHILL (1874–1965) zugeschriebenes Zitat.

Es gibt Notlügen, verdammte Lügen und Statistik.
Ein Zitat des britischen Politikers LEONARD HENRY COURTNEY (1832–1918),
welches fälschlicherweise vom amerikanischen Schriftsteller MARC TWAIN (1835–1910)
dem britischen Politiker BENJAMIN DISRAELI (1804–1881) zugeschrieben wurde.

Statistiken sind Zahlengebäude.
Sollen sie gut sein, brauchen sie – wie gute Häuser – ein solides Fundament,
klare Konturen und den Beweis, dass sie im Wandel der Zeiten ihren Wert behalten.
Es gibt aber auch schlechte Statistiken. Sie fallen zusammen wie Kartenhäuser.
PAUL SCHNITKER (1927–2013)

Statistik ist für mich das Informationsmittel der Mündigen.
Wer mit ihr umgehen kann, kann weniger leicht manipuliert werden.
Der Satz: Mit Statistik kann man alles beweisen
gilt nur für die Bequemen, die keine Lust haben, genau hinzusehen.
ELISABETH NOELLE–NEUMANN (1916–2010)

Illustration. Die auf der Titelseite angegebenen Graphiken illustrieren den Einfluß stochastischen Rauschens auf Reaktions-Diffusions-Prozesse mit Musterbildungen. Zu sehen sind Lösungen der zweidimensionalen deterministischen Gray–Scott-Gleichungen und der entsprechenden stochastischen Gray–Scott-Gleichungen

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = D_u \, \Delta u(x,t) + \alpha_u \big(1 - u(x,t)\big) - u(x,t) \big(v(x,t)\big)^2 \,, \\ \partial_t v(x,t) = D_v \, \Delta v(x,t) - \alpha_v \, v(x,t) + u(x,t) \big(v(x,t)\big)^2 \,, \\ u(x,0) = u_0(x) \,, \quad v(x,0) = v_0(x) \,, \quad x \in [-a,a]^2 \,, \quad t \in [0,T] \,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(x,t) = \Big(D_u \, \Delta u(x,t) + \alpha_u \big(1 - u(x,t)\big) - u(x,t) \big(v(x,t)\big)^2\Big) \, \mathrm{d}t + \sigma_u \, u(x,t) \, \mathrm{d}W_u(x,t) \,, \\ \mathrm{d}v(x,t) = \Big(D_v \, \Delta v(x,t) - \alpha_v \, v(x,t) + u(x,t) \big(v(x,t)\big)^2\Big) \, \mathrm{d}t + \sigma_v \, v(x,t) \, \mathrm{d}W_v(x,t) \,, \\ u(x,0) = u_0(x) \,, \quad v(x,0) = v_0(x) \,, \quad x \in [-a,a]^2 \,, \quad t \in [0,T] \,. \end{cases}$$

Das vorliegende Kompendium faßt die im Rahmen der Lehrveranstaltung **Stochastik** (VO4) im Sommersemester 2019 an der Universität Innsbruck behandelten Themen zusammen. Ohne Anspruch auf Allgemeinheit und Vollständigkeit werden Grundlagen der **Wahrscheinlichkeitstheorie** und **Statistik** angegeben. Als Illustrationen werden schulrelevante Aufgabenstellungen und Implementierungen mittels mathematischer Software besprochen.

Dieses Kompendium beruht auf dem Vorlesungsskriptum

> DANIELA SCHIEFENEDER
> *Mathematische und statistische Methoden für Pharmazeuten*
> Sommersemester 2015

und an späterer Stelle erwähnten Unterlagen.

Es gibt zahlreiche Literaturquellen, die in das Thema Stochastik einführen. Als zusätzliche Lektüre werden insbesondere die Skripten

> ZAKHAR KABLUCHKO
> *Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung*
> *Mathematische Statistik*
> https://www.uni-muenster.de/Stochastik/Arbeitsgruppen/Kabluchko/

und die darin angegebenen Monographien empfohlen.

Vorlesungsskripten bieten die Vorteile kompakter Darstellungen und freier Verfügbarkeit, sollten jedoch mit einem kritischen Blick auf inhaltliche Richtigkeit und mögliche Druckfehler verwendet werden.

Inhaltsverzeichnis

Griechisches Alphabet

Alpha	A	α
Beta	B	β
Gamma	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Epsilon	E	ϵ, ε
Zeta	Z	ζ
Eta	H	η
Theta	Θ	θ, ϑ
Iota	I	ι
Kappa	K	$\kappa, \varkappa$
Lambda	Λ	λ
My	M	μ
Ny	N	ν
Xi	Ξ	ξ
Omikron	O	o
Pi	Π	π, ϖ
Rho	P	ρ, ϱ
Sigma	Σ	σ, ς
Tau	T	τ
Ypsilon	Υ	υ
Phi	Φ	ϕ, φ
Chi	X	χ
Psi	Ψ	ψ
Omega	Ω	ω

Teil I

Wahrscheinlichkeitstheorie

Kapitel 1

Grundlegende Begriffe und Resultate

In diesem Kapitel werden grundlegende Begriffe und Resultate der Wahrscheinlichkeitstheorie eingeführt und anhand von Beispielen illustriert. Zusätzliche Erklärungen und Präzisierungen finden sich in Kapitel 2 zu Grundlagen der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie.

1.1 Zufallsexperiment, Ereignisraum

Zufällige Vorgänge. Im Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie untersucht man Vorgänge, deren Ausgänge nicht vorhersehbar und in diesem Sinne *zufällig* sind. Man geht dabei von idealisierten Situationen aus, wo für die betrachteten Vorgänge die Versuchsbedingungen festgelegt sind und beliebig oft reproduziert werden können; weiters nimmt man an, daß alle möglichen Ausgänge bekannt sind.

Bezeichnung (Zufallsexperiment, Ereignisraum, Ereignis)**.**

(i) Unter einem *Zufallsexperiment* versteht man einen wiederholbaren Vorgang, dessen Ausgang nicht vorhersehbar ist. Die Menge Ω aller möglichen Ausgänge heißt *Ereignisraum* (Ergebnisraum); man unterscheidet endliche, abzählbar unendliche und überabzählbare Ereignisräume. Eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ wird als *Ereignis* (Ergebnis) bezeichnet; eine einelementige Teilmenge $\{\omega\} \subseteq \Omega$ nennt man ein Elementarereignis (Elementarergebnis).

(ii) Man sagt, daß das Ereignis $A \subseteq \Omega$ eintritt, wenn das betrachtete Zufallsexperiment ein Ereignis $\omega \in A$ liefert. Ist $A = \Omega$, so nennt man A sicheres Ereignis; ist $A = \emptyset$, so nennt man A unmögliches Ereignis.

(iii) Die Verknüpfung von Ereignissen $A, B \subseteq \Omega$ mittels Mengenoperationen führt auf neue Ereignisse

$$A \cup B\,, \quad A \cap B\,, \quad A \setminus B\,, \quad \Omega \setminus A\,;$$

man spricht vom Ereignis A oder B, A und B, A aber nicht B und vom Komplementärereignis von A. Sind zwei Ereignisse disjunkt

$$A \cap B = \emptyset\,,$$

so nennt man die Ereignisse unvereinbar.

Glückspiele. Im Rahmen des Schulunterrichtes werden in erster Linie Zufallsexperimente betrachtet, wo der zugehörige Ereignisraum eine endliche Menge ist. Als einfache Beispiele für solche Zufallsexperimente dienen Glückspiele.

Beispiel.

(1) *Wurf einer Münze.*

(a) *Einfacher Münzwurf.* Beim Wurf einer Münze werden *Kopf* und *Zahl* als mögliche Ausgänge betrachtet[1]

$$\Omega = \big\{\text{Kopf}, \text{Zahl}\big\}\,.$$

(b) *Mehrfacher Münzwurf.* Betrachtet man mehrfache Würfe von Münzen, so sind die zugehörigen Ereignisräume durch kartesische Produkte

$$\Omega = \big\{\text{Kopf}, \text{Zahl}\big\} \times \cdots \times \big\{\text{Kopf}, \text{Zahl}\big\}$$

gegeben; insbesondere in Hinsicht auf die Verwendung eines Computers ist es hier zweckmäßig, den Ausgängen Tupel von Zahlen zuzuordnen und eine natürliche Anordnung der Elemente zu nützen. Beispielsweise ersetzt man *Kopf* durch 0 und *Zahl* durch 1; bei einem zweifachen Münzwurf ergibt sich dann folgender Ereignisraum mit insgesamt vier Elementen

$$\Omega = \{0,1\} \times \{0,1\} = \big\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\big\}\,, \qquad |\Omega| = 2 \cdot 2 = 4\,.$$

(2) *Wurf eines Würfels.*

(a) *Einfacher Würfelwurf.* Beim Wurf eines Würfels betrachtet man als Ereignisraum üblicherweise die Menge

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}\,;$$

ein Elementarereignis entspricht somit der Augenzahl. Beispiele für mögliche Ereignisse sind *Würfeln einer geraden Zahl* und *Augenzahl größer gleich fünf*

$$A = \{2,4,6\}\,, \qquad B = \{5,6\}\,;$$

entsprechend erhält man

$$A \cup B = \{2,4,5,6\}\,, \qquad A \cap B = \{6\}\,, \qquad \Omega \setminus A = \{1,3,5\}\,, \qquad B \setminus A = \{5\}\,.$$

(b) *Mehrfacher Würfelwurf.* Betrachtet man einen zweifachen Wurf, so enthält der zugehörige Ereignisraum insgesamt 36 Elemente

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \big\{(1,1), (1,2), \dots (6,6)\big\}\,, \qquad |\Omega| = 6^2\,;$$

entsprechend gilt bei einem N-fachen Wurf

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^N\,, \qquad |\Omega| = 6^N\,.$$

(3) *Ziehen von farbigen Kugeln.* Vergleiche Vorlesung.

(4) *Glückslose, Lotto, Roulette.* Vergleiche Vorlesung.

(5) *Wiederholter Wurf eines Würfels bis die Augenzahl* 6 *gewürfelt wird.* Vergleiche Vorlesung.

(6) *Drehen eines Glücksrades und Messung des gedrehten Winkels.* Vergleiche Vorlesung.

[1] *Bemerkung.* Bei der tatsächlichen Ausführung eines Münzwurfes kann auch eine Randlage auftreten; da dieser Ausgang ein physikalisch instabiler Zustand ist und deshalb sehr selten beobachtet wird, wird er jedoch nicht als sinnvoller Ausgang angesehen.

Bemerkung. Vergleiche Kapitel 1.5.

1.2 Wahrscheinlichkeitsmaß

Wahrscheinlichkeit. Um die *Wahrscheinlichkeiten* der möglichen Ausgänge eines Zufallsexperimentes zu bewerten, ordnet man sämtlichen Ereignissen reelle Zahlen im Einheitsintervall zu

$$A \subseteq \Omega\,, \quad \mathbb{P}(A) \in [0,1]\,;$$

das sichere Ereignis besitzt dabei die Wahrscheinlichkeit eins, das unmögliche Ereignis die Wahrscheinlichkeit null

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1\,, \quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0\,.$$

Historisch gab es verschiedene Zugänge, den Begriff der Wahrscheinlichkeit einzuführen. Zu bedeutsamen Beiträgen zählen jene des französischen Mathematikers PIERRE-SIMON LAPLACE (1749–1827), des in die USA emigrierten österreichisch-ungarischen Mathematikers RICHARD EDLER VON MISES (1883–1953) und des russischen Mathematikers ANDREI KOLMOGOROW (1903–1987), auf den die Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes und somit das Fundament für eine mathematisch konsistente Wahrscheinlichkeitstheorie zurückgeht.

Wahrscheinlichkeitsbegriff nach LAPLACE

Der von LAPLACE im Jahr 1812 eingeführte Wahrscheinlichkeitsbegriff ermöglicht die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten ohne die Ausführung von Zufallsexperimenten; da er jedoch nur auf spezielle Situationen zutrifft, ist er nicht als allgemeingültige Definition geeignet.

Bezeichnung (Laplace-Experiment, Laplace-Wahrscheinlichkeit)**.**

(i) Ein Zufallsexperiment heißt *Laplace-Experiment*, wenn der Ereignisraum eine endliche Menge ist und allen Elementarereignissen dieselbe Wahrscheinlichkeit zugeordnet wird

$$|\Omega| < \infty\,,$$
$$\forall\, \omega \in \Omega: \quad \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = \frac{1}{|\Omega|}\,.$$

(ii) Für ein Ereignis der Form

$$A = \{\omega_1, \dots, \omega_m\} \subseteq \Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$$

ergibt sich als zugehörige *Laplace-Wahrscheinlichkeit*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$$

ein Wert im Einheitsintervall; häufig wird dafür die Sprechweise

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der insgesamt möglichen Ereignisse}}$$

verwendet.

Bemerkung. Für einfache Zufallsexperimente nützt man theoretische Überlegungen, beispielsweise Symmetrieargumente, um die Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit zu rechtfertigen.

Beispiel. Zuvor erwähnte Glücksspiele wie etwa das Werfen von Würfeln, Lotto oder Roulette zählen zu Laplace-Experimenten. Vergleiche Vorlesung und Kapitel 1.5.

Wahrscheinlichkeitsbegriff nach von Mises

Der von von Mises im Jahr 1931 eingeführte *frequentistische Zugang* beruht auf der Idee, ein Zufallsexperiment unter denselben Bedingungen (gedanklich) zu wiederholen und die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen als Grenzwerte der relativen Häufigkeiten aufzufassen. Der betrachtete Vorgang mit Ereignisraum Ω wird N-mal ausgeführt; dabei beobachtet man das Eintreten gewisser Elementarereignisse

$$(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) \in \Omega^N .$$

Für ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ wird dabei die absolute Häufigkeit festgehalten, d.h. es wird gezählt, wie oft das Ereignis eintritt

$$h_N(A) = \left|\left\{n \in \{1, 2, \dots, N\} : \omega_n \in A\right\}\right| .$$

Für eine große Anzahl an Wiederholungen $N \gg 1$ sollte sich die relative Häufigkeit

$$r_N(A) = \frac{h_N(A)}{N}$$

stabilisieren; dieser Wert soll dann als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses aufgefasst werden

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{N \to \infty} r_N(A) .$$

Der frequentistische Zugang kann für die Schätzung von Wahrscheinlichkeiten und heuristische Definitionen verwendet werden, ist jedoch in Hinblick auf eine rigorose mathematische Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffes nicht geeignet; er birgt die Schwierigkeit, daß ein Experiment in der Realität nur endlich oft wiederholt werden kann, die Sicherstellung identer Versuchsbedingungen nicht immer möglich ist und der analytische Grenzwertbegriff nicht verwendet werden kann.

Bemerkung. Die grundsätzlichen Schwierigkeiten des frequentistischen Zuganges zeigen sich beispielsweise bei der tatsächliche Ausführung eines Münzwurfes, vergleiche Teil III.

Wahrscheinlichkeitsbegriff nach KOLMOGOROW

Eine axiomatische Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes geht auf KOLMOGOROW und das Jahr 1933 zurück. Anstelle der Festlegung der Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen werden strukturelle Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsräumen und zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaßen formuliert. Die Forderungen sind durch Eigenschaften von relativen Häufigkeiten sowie von Maßen motiviert; präzise mathematische Definitionen der Begriffe σ-Algebra, meßbarer Raum, meßbare Funktion, Maß, Maßraum, Wahrscheinlichkeitsmaß, Wahrscheinlichkeitsraum und sich daraus ergebende elementare Folgerungen sind in Kapitel 2 zusammengefasst.

Bezeichnung (Axiome von KOLMOGOROW, Wahrscheinlichkeitsmaß, Wahrscheinlichkeit)**.** Es bezeichne Ω einen Ereignisraum. Eine auf dem Mengensystem der Ereignisse definierte reellwertige Funktion

$$\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß* (Wahrscheinlichkeitsverteilung), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) *Nichtnegativität.* Ein Wahrscheinlichkeitsmaß hat nicht-negative Funktionswerte

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega): \quad \mathbb{P}(A) \geq 0\,.$$

(ii) *Normiertheit.* Das sichere Ereignis hat den Wert eins

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1\,.$$

(iii) *Additivität.* Für jede Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Teilmengen von Ω gilt die Relation

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_k)\,.$$

Für ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ nennt man den Wert $\mathbb{P}(A)$ die zugehörige *Wahrscheinlichkeit.*

Folgerungen. Aus den Axiomen von KOLMOGOROW lassen sich weitere grundlegende Relationen für Wahrscheinlichkeitsmaße ableiten.

Resultat (Relationen für Wahrscheinlichkeitsmaße)**.** Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$

gelten folgende Aussagen.

(i) *Unmögliches Ereignis.* Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses ist gleich null

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0\,.$$

(ii) *Endliche Additivität.* Für endlich viele, paarweise unvereinbare Ereignisse gilt die Identität

$$A_1, \dots, A_K \subseteq \Omega\,, \qquad \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{K} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(A_k)\,.$$

(iii) *Komplementärereignis.* Für ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ ist die Wahrscheinlichkeit des Komplementärereignisses durch

$$\mathbb{P}(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$$

gegeben; insbesondere bestätigt dies, daß das unmögliche Ereignis die Wahrscheinlichkeit null hat

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0\,.$$

(iv) *Additionstheorem.* Für zwei Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ gilt die Relation

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\,;$$

sind die Ereignisse unvereinbar, so folgt

$$A \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)\,.$$

(v) *Differenz.* Für die Mengendifferenz zweier Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ folgt die Identität

$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)\,.$$

(vi) *Monotonie.* Für zwei Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ gilt die Relation

$$A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)\,;$$

insbesondere bestätigt dies die Eigenschaft

$$0 = \mathbb{P}(\emptyset) \leq \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\Omega) = 1\,.$$

Erklärung. Direkte Anwendung der Axiome von KOLMOGOROW, vergleiche Proseminar. ◇

$$
\begin{array}{cccc}
 & 1-p \swarrow & & \searrow p \\
1-q \swarrow & \searrow q & 1-q \swarrow & \searrow q \\
\underbrace{(1-p)\,(1-q)}_{=\mathbb{P}(\{(0,0)\})} & \underbrace{(1-p)\,q}_{=\mathbb{P}(\{(0,1)\})} & \underbrace{p\,(1-q)}_{=\mathbb{P}(\{(1,0)\})} & \underbrace{p\,q}_{=\mathbb{P}(\{(1,1)\})}
\end{array}
$$

Abbildung 1.1: Baumdiagramm zur Veranschaulichung vorgegebener Wahrscheinlichkeiten für Elementarereignisse.

Spezialfall. Bei endlichen Ereignisräumen der Form

$$\Omega = \big\{\omega_k : k \in \{1,\dots,n\}\big\}\,, \quad |\Omega| = n\,,$$

erfüllen die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse die Eigenschaften

$$\forall\, k \in \{1,\dots,n\}: \quad \mathbb{P}\big(\{\omega_k\}\big) \in [0,1]\,, \quad \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\{\omega_k\}\big) = 1\,;$$

für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $A \subseteq \Omega$ gilt

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{k\in\{1,\dots,n\}\\ \omega_k\in A}} \mathbb{P}\big(\{\omega_k\}\big)\,.$$

Entsprechende Erweiterungen gelten für abzählbar unendliche Ereignisräume

$$
\begin{gathered}
\Omega = \big\{\omega_k : k \in \mathbb{N}\big\}\,, \quad |\Omega| = \infty\,,\\
\forall\, k \in \mathbb{N}: \quad \mathbb{P}\big(\{\omega_k\}\big) \in [0,1]\,, \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\big(\{\omega_k\}\big) = 1\,,\\
\forall\, A \subseteq \Omega: \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ \omega_k\in A}} \mathbb{P}\big(\{\omega_k\}\big)\,.
\end{gathered}
$$

Beispiel. Im Zusammenhang mit Übungsaufgabe (10) *Kugelschreiber* für die standardisierte Reifeprüfung in Mathematik ist es naheliegend, den Ereignisraum

$$\Omega = \big\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\big\}\,, \quad |\Omega| = 2^2 = 4\,,$$

zu betrachten. Die erste Komponente gibt dabei an, ob die Mine defekt (Wert 0) oder in Ordnung (Wert 1) ist; die zweite Komponente gibt an, ob das Gehäuse defekt (Wert 0) oder in Ordnung (Wert 1) ist.

(i) Bei Betrachtung als Laplace-Experiment würde man allen Elementarereignissen die gleiche Wahrscheinlichkeit zuweisen

$$\mathbb{P}\big(\{(0,0)\}\big) = \tfrac{1}{4}\,, \quad \mathbb{P}\big(\{(0,1)\}\big) = \tfrac{1}{4}\,, \quad \mathbb{P}\big(\{(1,0)\}\big) = \tfrac{1}{4}\,, \quad \mathbb{P}\big(\{(1,1)\}\big) = \tfrac{1}{4}\,.$$

(ii) Als Alternative kann man die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse mittels vorgegebener Wahrscheinlichkeiten

$$p, q \in [0,1]$$

und entsprechender Gegenwahrscheinlichkeiten definieren

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(\{(0,0)\}\big) &= (1-p)\,(1-q)\,,\\
\mathbb{P}\big(\{(0,1)\}\big) &= (1-p)\,q\,,\\
\mathbb{P}\big(\{(1,0)\}\big) &= p\,(1-q)\,,\\
\mathbb{P}\big(\{(1,1)\}\big) &= p\,q\,;
\end{aligned}$$

die für Wahrscheinlichkeitsmaße geforderte Normierungsbedingung ist damit insbesondere erfüllt

$$\mathbb{P}\big(\{(0,0)\}\big) + \mathbb{P}\big(\{(0,1)\}\big) + \mathbb{P}\big(\{(1,0)\}\big) + \mathbb{P}\big(\{(1,1)\}\big) = 1\,.$$

Zur Veranschaulichung ist eine Darstellung mittels Baumdiagrammen hilfreich, vergleiche Abbildung 1.1 und Kapitel 1.4.

(iii) Die Überlegungen lassen sich leicht verallgemeinern; beispielsweise auf den Ereignisraum

$$\Omega = \big\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\big\}\,, \quad |\Omega| = 2^3\,,$$

und vorgegebene Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned}
p, q, r &\in [0,1]\,,\\
\mathbb{P}\big(\{(0,0,0)\}\big) &= (1-p)\,(1-q)\,(1-r)\,,\\
\mathbb{P}\big(\{(0,0,1)\}\big) &= (1-p)\,(1-q)\,r\,,\\
\mathbb{P}\big(\{(0,1,0)\}\big) &= (1-p)\,q\,(1-r)\,,\\
\mathbb{P}\big(\{(0,1,1)\}\big) &= (1-p)\,q\,r\,,\\
\mathbb{P}\big(\{(1,0,0)\}\big) &= p\,(1-q)\,(1-r)\,,\\
\mathbb{P}\big(\{(1,0,1)\}\big) &= p\,(1-q)\,r\,,\\
\mathbb{P}\big(\{(1,1,0)\}\big) &= p\,q\,(1-r)\,,\\
\mathbb{P}\big(\{(1,1,1)\}\big) &= p\,q\,r\,,\\
\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) &= 1\,,
\end{aligned}$$

oder auf den Ereignisraum

$$\Omega = \big\{(3,0),(3,1),(3,2),(4,0),(4,1),(4,2),(5,0),(5,1),(5,2),(6,0),(6,1),(6,2)\big\}\,, \quad |\Omega| = 12\,,$$

und vorgegebene Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{gathered}
p_1, p_2, p_3, p_4 \in [0,1]\,, \quad p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1\,, \\
q_1, q_2, q_3 \in [0,1]\,, \quad q_1 + q_2 + q_3 = 1\,, \\
\mathbb{P}\big(\{(3,0)\}\big) = p_1\, q_1\,, \quad \mathbb{P}\big(\{(3,1)\}\big) = p_1\, q_2\,, \quad \mathbb{P}\big(\{(3,2)\}\big) = p_1\, q_3\,, \\
\mathbb{P}\big(\{(4,0)\}\big) = p_2\, q_1\,, \quad \mathbb{P}\big(\{(4,1)\}\big) = p_2\, q_2\,, \quad \mathbb{P}\big(\{(4,2)\}\big) = p_2\, q_3\,, \\
\mathbb{P}\big(\{(5,0)\}\big) = p_3\, q_1\,, \quad \mathbb{P}\big(\{(5,1)\}\big) = p_3\, q_2\,, \quad \mathbb{P}\big(\{(5,2)\}\big) = p_3\, q_3\,, \\
\mathbb{P}\big(\{(6,0)\}\big) = p_4\, q_1\,, \quad \mathbb{P}\big(\{(6,1)\}\big) = p_4\, q_2\,, \quad \mathbb{P}\big(\{(6,2)\}\big) = p_4\, q_3\,, \\
\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = 1\,.
\end{gathered}$$

1.3 Bedingtes Wahrscheinlichkeitsmaß

Bedingte Wahrscheinlichkeit. Im Folgenden wird der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit eingeführt.

Bezeichnung (Bedingte Wahrscheinlichkeit)**.** Es bezeichne Ω einen Ereignisraum mit zugehörigem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ und $A, B \subseteq \Omega$ zwei Ereignisse mit Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$ und $\mathbb{P}(B) \in (0,1]$. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis A unter der Bedingung, daß das Ereignis B bereits eingetreten ist, eintritt

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

nennt man *bedingte Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses A unter der Bedingung B.

Folgerungen. In der obigen Situation gelten die Relationen

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Omega|B) &= \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1\,, \quad B \subseteq \Omega\,,\\
\mathbb{P}(A|B) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1\,, \quad A, B \subseteq \Omega\,, \quad B \subseteq A\,,
\end{aligned}$$

wobei die erste offensichtlich ein Spezialfall der zweiten ist. Man beachte außerdem, daß man für unvereinbare Ereignisse die Identität

$$\mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\big((A_1 \cup A_2) \cap B\big)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2|B)\,,$$
$$A_1, A_2 \subseteq \Omega\,, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset\,,$$

erhält; diese impliziert insbesondere die Relation

$$\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(\Omega \setminus A|B) = \mathbb{P}(\Omega|B) = 1\,, \quad A, B \subseteq \Omega\,.$$

Das nachfolgende Resultat besagt, daß durch die bedingte Wahrscheinlichkeit ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert wird.

Resultat (Bedingtes Wahrscheinlichkeitsmaß, Multiplikationssatz)**.** Wie zuvor bezeichnet $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

(i) *Bedingtes Wahrscheinlichkeitsmaß.* Für ein Ereignis $B \subseteq \Omega$ mit positiver Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(B) \in (0,1]$ wird durch

$$\mathbb{P}(\,\cdot\,|B) : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert; dieses heißt *bedingtes Wahrscheinlichkeitsmaß* unter der Bedingung B.

(ii) *Multiplikationssatz.* Für zwei Ereignisse gilt die Identität

$$\mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)\,, \quad A,B\subseteq\Omega\,.$$

(iii) *Verallgemeinerung.* Ausgehend von der Identität

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1\cap\ldots\cap A_K) &= \mathbb{P}(A_K|A_1\cap\ldots\cap A_{K-1}) \qquad \underbrace{\mathbb{P}(A_1\cap\ldots\cap A_{K-1})}_{=\mathbb{P}(A_{K-1}|A_1\cap\ldots\cap A_{K-2})\,\mathbb{P}(A_1\cap\ldots\cap A_{K-2})}\\ &= \mathbb{P}(A_K|A_1\cap\ldots\cap A_{K-1})\,\mathbb{P}(A_{K-1}|A_1\cap\ldots\cap A_{K-2})\,\mathbb{P}(A_1\cap\ldots\cap A_{K-2})\end{aligned}$$

erhält man für endlich viele Ereignisse das Resultat

$$\begin{gathered}\mathbb{P}(A_1\cap\ldots\cap A_K) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2|A_1)\,\mathbb{P}(A_3|A_1\cap A_2)\cdots\mathbb{P}(A_K|A_1\cap\ldots\cap A_{K-1})\,,\\ A_k\subseteq\Omega\,,\quad k\in\{1,\ldots,K\}.\end{gathered}$$

Erklärung. Vergleiche Proseminar. ◇

Beispiel. Betrachtet wird der Wurf eines Würfels, d.h. folgendes Laplace-Experiment

$$\begin{gathered}\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}\,,\\ \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big)=\tfrac{1}{6}\,,\quad \omega\in\Omega\,.\end{gathered}$$

(i) Die Wahrscheinlichkeit, daß eine gerade Zahl gewürfelt wurde (Ereignis A), wenn schon bekannt ist, daß die Zahl kleiner gleich 3 ist (Ereignis B), ist gegeben durch

$$\begin{gathered}A=\{2,4,6\}\,,\quad B=\{1,2,3\}\,,\quad A\cap B=\{2\}\,,\\ \mathbb{P}(B)=\tfrac{3}{6}=\tfrac{1}{2}\,,\quad \mathbb{P}(A\cap B)=\tfrac{1}{6}\,,\\ \mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\tfrac{1}{3}\,.\end{gathered}$$

(ii) Die Wahrscheinlichkeit, daß eine ungerade Zahl gewürfelt wurde (Komplementärereignis von A), wenn schon bekannt ist, daß die Zahl kleiner gleich 3 ist (Ereignis B), ist gegeben durch

$$\begin{gathered}\Omega\setminus A=\{1,3,5\}\,,\quad B=\{1,2,3\}\,,\quad (\Omega\setminus A)\cap B=\{1,3\}\,,\\ \mathbb{P}(B)=\tfrac{3}{6}=\tfrac{1}{2}\,,\quad \mathbb{P}\big((\Omega\setminus A)\cap B\big)=\tfrac{2}{6}=\tfrac{1}{3}\,,\\ \mathbb{P}(\Omega\setminus A|B)=\frac{\mathbb{P}\big((\Omega\setminus A)\cap B\big)}{\mathbb{P}(B)}=\tfrac{2}{3}=1-\mathbb{P}(A|B)\,.\end{gathered}$$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit. Um den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und die daraus folgende Bayes'sche Formel zu formulieren, ist es zweckmäßig, den Begriff der vollständige Ereignisdisjunktion einzuführen.

Bezeichnung (Vollständige Ereignisdisjunktion). Eine Familie von paarweise disjunkten Ereignissen, welchen den betrachteten Ereignisraum erzeugen, wird als *vollständige Ereignisdisjunktion* bezeichnet

$$
\begin{gathered}
A_k \subseteq \Omega\,, \quad k \in \{1,\dots,K\}\,,\\
A_k \cap A_\ell = \emptyset\,, \quad k,\ell \in \{1,\dots,K\}\,, \quad k \neq \ell\,,\\
\bigcup_{k=1}^{K} A_k = \Omega\,.
\end{gathered}
$$

Resultat (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit, Bayes'sche Formel). In der obigen Situation führt der Schnitt mit einem Ereignis $B \subseteq \Omega$ auf eine Familie mit den Eigenschaften

$$
\begin{gathered}
A_k \cap B \subseteq \Omega\,, \quad k \in \{1,\dots,K\}\,,\\
(A_k \cap B) \cap (A_\ell \cap B) = \emptyset\,, \quad k,\ell \in \{1,\dots,K\}\,, \quad k \neq \ell\,,\\
\bigcup_{k=1}^{K} (A_k \cap B) = B\,.
\end{gathered}
$$

(i) *Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit.* Daraus erhält man für die zugehörigen bedingten Wahrscheinlichkeiten das Resultat

$$
\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(A_k \cap B) = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(B|A_k)\,\mathbb{P}(A_k)\,,
$$

welches als *Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit* bezeichnet wird.

(ii) *Bayes'sche Formel.* Ausgehend vom Multiplikationssatz zeigt dies die als *Bayes'sche Formel* bekannte Identität

$$
\begin{gathered}
\mathbb{P}(A_k|B)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_k \cap B) = \mathbb{P}(B|A_k)\,\mathbb{P}(A_k)\,,\\
\mathbb{P}(A_k|B) \sum_{\ell=1}^{K} \mathbb{P}(B|A_\ell)\,\mathbb{P}(A_\ell) = \mathbb{P}(B|A_k)\,\mathbb{P}(A_k)\,,\\
k \in \{1,\dots,K\}\,.
\end{gathered}
$$

1.4 Darstellung mittels Baumdiagrammen

Baumdiagramme. Betrachtet man Zufallsexperimente, wo die zugehörigen Ereignisräume als kartesische Produkte gegeben sind

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_N \,,$$

ist es hilfreich, Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen mittels Baumdiagrammen zu veranschaulichen. Ein Baumdiagramm besteht aus Teilstrecken (Pfaden), an denen die zu Knoten führenden Wahrscheinlichkeiten angegeben werden; dabei gelten die im Folgenden angeführten Regeln.

(i) *Multiplikationspfadregel.* Die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses ergibt sich als Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs eines Pfades (Pfadwahrscheinlichkeit).

(ii) *Additionspfadregel.* Falls zu einem Ereignis mehrere Pfade gehören, erhält man die zugehörige Wahrscheinlichkeit durch Addition der entsprechenden einzelnen Pfadwahrscheinlichkeiten.

(iii) *Totalwahrscheinlichkeitsregel.* Die Summe der Teilwahrscheinlichkeiten an den Endknoten ist gleich Eins.

Beispiel. Betrachtet wird das zweimalige blinde Ziehen von Kugeln ohne Zurücklegen aus einer Urne, worin sich 5 blaue und 3 rote Kugeln, also insgesamt 8 Kugeln, befinden; es bezeichnet *blau* das Ereignis *Ziehen einer blauen Kugel* und *rot* das Ereignis *Ziehen einer roten Kugel.* Der zugehörige Ereignisraum umfasst die Elementarereignisse

$$\Omega = \big\{(\text{blau}, \text{blau}), (\text{blau}, \text{rot}), (\text{rot}, \text{blau}), (\text{rot}, \text{rot})\big\} \,,$$

wobei die erste Komponente das Ergebnis des ersten Zuges und die zweite Komponente das Ergebnis des zweiten Zuges angibt; in Hinblick auf eine kompakte Darstellung würde man den Elementarereignissen Zahlenpaare zuweisen, beispielsweise

$$\Omega = \big\{(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)\big\} \,.$$

Man beachte, daß im Fall von Ziehen mit Zurücklegen der erste und zweite Zug unabhängig voneinander sind. Im betrachteten Fall von Ziehen mit Zurücklegen beeinflusst das Ergebnis des ersten Zuges das Ergebnis des zweiten Zuges; somit sind erster und zweiter Zug nicht unabhängig voneinander, und es treten bedingte Wahrscheinlichkeiten auf. In Abbildung 1.2 ist das entsprechende Baumdiagramm dargestellt.

(i) *Multiplikationspfadregel.* Entlang der Pfade sind die zugehörigen bedingten Wahrscheinlichkeiten angegeben, und die Wahrscheinlichkeiten an den Endknoten erhält

$1-p=\frac{3}{8}\swarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\searrow p=\frac{5}{8}$

0 (rot) (1. Zug) $\qquad\qquad\qquad\qquad$ 1 (blau) (1. Zug)

$1-q_2=\frac{2}{7}\swarrow$ $\qquad$ $\searrow q_2=\frac{5}{7}$ $\qquad$ $1-q_1=\frac{3}{7}\swarrow$ $\qquad$ $\searrow q_1=\frac{4}{7}$

0 (2. Zug) $\qquad$ 1 (2. Zug) $\qquad$ 0 (2. Zug) $\qquad$ 1 (2. Zug)

$$\underbrace{(1-p)\,(1-q_2)}_{=\mathbb{P}(\{(0,0)\})} \qquad \underbrace{(1-p)\,q_2}_{=\mathbb{P}(\{(0,1)\})} \qquad \underbrace{p\,(1-q_1)}_{=\mathbb{P}(\{(1,0)\})} \qquad \underbrace{p\,q_1}_{=\mathbb{P}(\{(1,1)\})}$$

Abbildung 1.2: Ziehen von Kugeln ohne Zurücklegen. Baumdiagramm zur Veranschaulichung vorgegebener Wahrscheinlichkeiten.

man durch Multiplikation

$$\begin{gathered}
p=\tfrac{5}{8}, \quad q_1=\tfrac{4}{7}, \quad q_2=\tfrac{5}{7}, \\
\mathbb{P}\big(\{(1,1)\}\big)=p\,q_1=\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{4}{7}=\tfrac{20}{56}, \\
\mathbb{P}\big(\{(1,0)\}\big)=p\,(1-q_1), \\
\mathbb{P}\big(\{(0,1)\}\big)=(1-p)\,q_2, \\
\mathbb{P}\big(\{(0,0)\}\big)=(1-p)\,(1-q_2)=\tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{2}{7}=\tfrac{6}{56}.
\end{gathered}$$

(ii) *Totalwahrscheinlichkeitsregel.* Offensichtlich ist die Summe der Teilwahrscheinlichkeiten an den Endknoten gleich Eins

$$\mathbb{P}\big(\{(1,1)\}\big)+\mathbb{P}\big(\{(1,0)\}\big)+\mathbb{P}\big(\{(0,1)\}\big)+\mathbb{P}\big(\{(0,0)\}\big)=1.$$

(iii) *Additionspfadregel.* Mittels des Baumdiagrammes kann man etwa die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben durch Addition der entsprechenden einzelnen Pfadwahrscheinlichkeiten leicht berechnen

$$P\big(\{(1,1),(0,0)\}\big)=\tfrac{20}{56}+\tfrac{6}{56}=\tfrac{26}{56}.$$

1.5 Grundlagen der Kombinatorik

Kombinatorik. Der Bereich der Kombinatorik befaßt sich mit endlich vielen oder abzählbar unendlich vielen diskreten Strukturen; eine zentrale Frage mit Anwendungen im Bereich der Wahrscheinlichkeitstheorie ist das Abzählen von möglichen Konfigurationen.

Stochastische Modelle. Im Folgenden werden spezielle Laplace-Experimente betrachtet; die Wahrscheinlichkeiten der auftretenden Elementarereignisse ergeben sich somit aus der Angabe des Ereignisraumes bzw. dessen Mächtigkeit

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_J\}, \quad |\Omega| = J,$$
$$\forall\, j \in \{1, \dots, J\}: \quad \mathbb{P}\big(\{\omega_j\}\big) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{J}.$$

Zur Veranschaulichung der Zufallsexperimente dient eine Urne mit farbigen Kugeln, aus denen man blind eine gewisse Anzahl von Kugeln zieht; in Hinblick auf eine systematische Angabe des Ereignisraumes ist es zweckmäßig, den farbigen Kugeln natürliche Zahlen zuzuweisen und den Elementarereignissen Tupel von Zahlen, wobei die Einträge den Ergebnissen beim Ziehen entsprechen.

Ziehen unterscheidbarer Kugeln mit Zurücklegen. In einer Urne befinden sich n unterscheidbare Kugeln.

(1) Es werden n Kugeln gezogen, wobei die gezogene Kugel gleich wieder in die Urne zurückgelegt wird. Weist man den Kugeln die Zahlen $1, 2, \dots, n$ zu, so zeigt ein Induktionsbeweis, daß der Ereignisraum wie folgt gegeben ist

$$\Omega = \big\{(j_1, j_2, \dots, j_n) : j_1, j_2, \dots, j_n \in \{1, 2, \dots, n\}\big\},$$
$$|\Omega| = n^n.$$

Erklärung. Es ist zweckmäßig, die auftretenden Elementarereignisse systematisch anzuordnen; beispielweise identifiziert man ein n-Tupel mit der entsprechenden n-stelligen Zahl und wählt eine Anordnung in aufsteigender Reihenfolge.

(i) Für eine einzige Kugel gilt offensichtlich

$$n = 1: \quad \Omega = \{1\}, \quad |\Omega| = 1.$$

(ii) Bei zwei Kugeln ergeben sich folgende Möglichkeiten

$$n = 2: \quad \Omega = \big\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\big\}, \quad |\Omega| = 2^2.$$

(iii) Bei drei Kugeln erhält man

$$n=3: \quad \Omega = \big\{(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,2,1),(1,2,2),(1,2,3),(1,3,1),(1,3,2),(1,3,3),$$
$$(2,1,1),(2,1,2),(2,1,3),(2,2,1),(2,2,2),(2,2,3),(2,3,1),(2,3,2),(2,3,3),$$
$$(3,1,1),(3,1,2),(3,1,3),(3,2,1),(3,2,2),(3,2,3),(3,3,1),(3,3,2),(3,3,3)\big\},$$
$$|\Omega| = 3^3 .$$

(iv) In Hinblick auf die Behandlung des allgemeinen Falles $n \in \mathbb{N}$ und den Induktionsschritt $n-1 \to n$ wird der Schritt $2 \to 3$ nochmals angegeben; die Fixierung des ersten Eintrages und die Variation der restlichen Einträge führt auf

$$\Omega_1 = \big\{(1,1,\underbrace{*}_{\text{Eintrag aus }\{1,2,3\}}),(1,2,\underbrace{*}_{\text{Eintrag aus }\{1,2,3\}}),(1,3,\underbrace{*}_{\text{Eintrag aus }\{1,2,3\}})\big\},$$
$$\Omega_2 = \big\{(2,\underbrace{*,*}_{\text{wie bei }\Omega_1}),$$
$$\Omega_3 = \big\{(3,\underbrace{*,*}_{\text{wie bei }\Omega_1}),$$
$$|\Omega| = \big|\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3\big| = \big|\Omega_1\big| + \big|\Omega_2\big| + \big|\Omega_3\big| = 3\cdot(3+3+3) = 3\cdot 3^2 = 3^3 .$$

Nun ist es einleuchtend, daß sich im allgemeinen Fall $n \in \mathbb{N}$ der Ereignisraum entsprechend aus disjunkten Teilmengen zusammensetzt und insbesondere die Gesamtanzahl der Elementarereignisse durch

$$|\Omega| = \big|\Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_n\big| = n\cdot n^{n-1} = n^n$$

gegeben ist. ◇

(2) Werden $k \in \{1,2,\dots,n\}$ Kugeln gezogen, wobei die gezogene Kugel gleich wieder in die Urne zurückgelegt wird, erhält man

$$\Omega = \big\{(j_1, j_2, \dots, j_k) : j_1, j_2, \dots, j_k \in \{1,2,\dots,n\}\big\},$$
$$|\Omega| = n^k .$$

Erklärung. Ähnliche Überlegungen wie zuvor zeigen das angegebene Resultat. ◇

Ziehen unterscheidbarer Kugeln ohne Zurücklegen. In einer Urne befinden sich n unterscheidbare Kugeln.

(1) Werden n Kugeln ohne Zurücklegen gezogen, so umfaßt der Ereignisraum sämtlichen Permutationen des n-Tupels $(1,2,\dots,n)$, und somit gilt

$$\Omega = \big\{(j_1, j_2, \dots, j_n) : j_1 \in \{1,2,\dots,n\}, j_2 \in \{1,2,\dots,n\} \setminus \{j_1\}, \dots,$$
$$j_n \in \{1,2,\dots,n\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_{n-1}\}\big\},$$
$$|\Omega| = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1 .$$

Erklärung. Als Illustration werden die Fälle $n=2$ und $n=3$ betrachtet.

Variationen mit Wiederholung Angabe aller n-Tupel der Form $(j_1,\dots,j_n)$ mit $j_1,\dots,j_n \in \{1,\dots,n\}$: n^n Möglichkeiten
Permutationen ohne Wiederholung Sämtliche Umordnungen des n-Tupels $(1,\dots,n)$ bzw. Angabe aller n-Tupel der Form $(j_1,\dots,j_n)$ mit $j_1,\dots,j_n \in \{1,\dots,n\}$ paarweise verschieden: $n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$ Möglichkeiten
Permutationen mit Wiederholung ($k_1,\dots,k_d \in \{1,\dots,n\}, k_1+\dots+k_d = n$) Sämtliche Umordnungen des n-Tupels $\big(\underbrace{1,\dots,1}_{k_1\text{ mal}},\dots,\underbrace{d,\dots,d}_{k_d\text{ mal}}\big)$: $\frac{n!}{k_1!\cdots k_d!}$ Möglichkeiten
Variationen mit Wiederholung ($k \in \{1,\dots,n\}$) Angabe aller k-Tupel der Form $(j_1,\dots,j_k)$ mit $j_1,\dots,j_k \in \{1,\dots,n\}$: n^k Möglichkeiten
Variationen ohne Wiederholung ($k \in \{1,\dots,n\}$) Angabe aller k-Tupel der Form $(j_1,\dots,j_k)$ mit $j_1,\dots,j_k \in \{1,\dots,n\}$ paarweise verschieden: $n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten
Kombinationen mit Wiederholung ($k \in \{1,\dots,n\}$) Angabe aller k-Tupel der Form $(j_1,\dots,j_k)$ mit $j_1,\dots,j_k \in \{1,\dots,n\}$ und $j_{i_1} \le j_{i_2}$ für $i_1,i_2 \in \{1,\dots,k\}$ mit $i_1 \le i_2$: $\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten
Kombinationen ohne Wiederholung ($k \in \{1,\dots,n\}$) Angabe aller k-Tupel der Form $(j_1,\dots,j_k)$ mit $j_1,\dots,j_k \in \{1,\dots,n\}$ und $j_{i_1} < j_{i_2}$ für $i_1,i_2 \in \{1,\dots,k\}$ mit $i_1 < i_2$: $\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$ Möglichkeiten

Tabelle 1.1: Mögliche Anordnungen von Tupeln ($n \in \mathbb{N}$)

(i) Bei zwei Kugeln treten zwei Elementarereignisse auf

$$n = 2: \quad \Omega = \big\{(1,2),(2,1)\big\}, \quad |\Omega| = 2.$$

(ii) Bei drei Kugeln erhält man

$$n = 3: \quad \Omega = \big\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\big\}, \quad |\Omega| = 3\cdot 2,$$

beispielsweise durch Betrachtung des Falles mit Zurücklegen und Weglassen aller Tripel mit doppelt oder dreifach auftretenden Einträgen. ◇

(2) Werden $k \in \{1,2,\dots,n\}$ Kugeln ohne Zurücklegen gezogen, so gilt entsprechend

$$\begin{aligned}\Omega = \big\{(j_1, j_2, \dots, j_k) : j_1 \in \{1,2,\dots,n\},\, j_2 \in \{1,2,\dots,n\} \setminus \{j_1\}, \dots,&\\ j_k \in \{1,2,\dots,n\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_{k-1}\}\big\}\,,&\\ |\Omega| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)\,.&\end{aligned}$$

Variationen, Permutationen, Kombinationen. In Tabelle 1.1 sind die zuvor behandelten stochastischen Modelle sowie weitere häufig betrachtete Konfigurationen zusammengefasst. Bei Kombinationen wird die Reihenfolge der Einträge nicht beachtet, d.h. gewisse Tupel werden miteinander identifiziert und nur ein Repräsentant angegeben; die Anzahl der Möglichkeiten erklärt man mittels der Relationen

$$\sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=i_1}^{n} \cdots \sum_{i_k=i_{k-1}}^{n} 1 = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}\,,$$
$$\sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=i_1+1}^{n} \cdots \sum_{i_k=i_{k-1}+1}^{n} 1 = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,,$$
$$k \in \{1,\dots,n\}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Mathematische Begründungen der angegebenen Resultate für den allgemeinen Fall beruhen auf Induktionsbeweisen, vgl. auch Faulhabersche Formel für endliche Reihen der Form

$$\sum_{i=1}^{n} i^m\,, \quad m,n \in \mathbb{N}\,.$$

Spezialfall ($k=2$). Der einfachste Spezialfall der Faulhaberschen Formel

$$m = 1: \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \tfrac{1}{2}\, n\,(n+1)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

ist auch als *kleiner Gauß* bekannt; für gerade natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ ergibt er sich durch Aufsummieren der kleinsten und größten Zahl etc. und entsprechend für ungerade Zahlen

$$n \text{ gerade}: \quad \sum_{i=1}^{n} i = (1+n) + (2+n-1) + \ldots + \left(\tfrac{n}{2} + \tfrac{n}{2} + 1\right) = \tfrac{n}{2}\,(n+1)\,,$$
$$n \text{ ungerade}: \quad \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n-1} i + n = \tfrac{n-1}{2}\, n + n = n\, \tfrac{n+1}{2}\,.$$

Damit zeigt man die zuvor angegebenen Relationen für $k=2$, denn

$$\sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=i_1}^{n} 1 = \sum_{i_1=1}^{n} (n+1-i_1) = (n+1) \sum_{i_1=1}^{n} 1 - \sum_{i_1=1}^{n} i_1 = n\,(n+1) - \tfrac{1}{2}\, n\,(n+1) = \tfrac{1}{2}\, n\,(n+1)\,,$$
$$\sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=i_1+1}^{n} 1 = \sum_{i_1=1}^{n} (n-i_1) = n \sum_{i_1=1}^{n} 1 - \sum_{i_1=1}^{n} i_1 = n^2 - \tfrac{1}{2}\, n\,(n+1) = \tfrac{1}{2}\,(n-1)\,n\,.$$

Illustrationen. Implementierungen in MATLAB, welche die auftretenden Konfigurationen illustrieren, finden sich in Kapitel 5.

Kapitel 2

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

Das Gebiet der *Maßtheorie* befaßt sich mit der Abstraktion elementargeometrischer Begriffe wie Streckenlänge, Flächeninhalt und Volumen; inbesondere geht es um die Frage, wie Mengen mit komplexen Strukturen ein *Maß* zugeordnet werden kann. Die Maßtheorie bildet die Grundlage der Integrationstheorie und der Wahrscheinlichkeitstheorie.

In der Maßtheorie treten *σ-Algebren* als Definitionsbereiche von Maßen auf; σ-Algebren sind insbesondere in der Wahrscheinlichkeitstheorie von Bedeutung, wo zufällige Ereignisse durch die Elemente einer σ-Algebra modelliert werden. Maße spiegeln die Größen von Mengen wieder und bilden damit die Grundlage der Integrationstheorie; so ordnet das Lebesgue–Borel-Maß Teilmengen des euklidischen Raumes ihren Inhalt zu. Maße treten auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie auf, um zufälligen Ereignissen, gegeben durch die Elemente einer σ-Algebra, Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen.

Im Folgenden werden grundlegende Begriffe der Maßtheorie und der Wahrscheinlichkeitstheorie dargestellt.

2.1 Meßbarer Raum, meßbare Funktion

Meßbarer Raum. Eine σ-*Algebra* ist ein System von Teilmengen einer Grundmenge, welches die Grundmenge enthält und bezüglich der Komplementbildung und abzählbaren Vereinigung von Mengen abgeschlossen ist. Das Paar bestehend aus Grundmenge und σ-Algebra bezeichnet man als *meßbaren Raum.*

Bezeichnung (σ-Algebra, meßbarer Raum)**.** Eine σ-*Algebra* über einer nichtleeren Grundmenge $\Omega \neq \emptyset$ ist eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ mit folgenden Eigenschaften.

(i) *Grundmenge.* Es gilt

$$\Omega \in \mathscr{A}\,.$$

(ii) *Komplement.* Aus $A \in \mathscr{A}$ folgt

$$\Omega \setminus A \in \mathscr{A}\,.$$

(iii) *Abzählbare Vereinigung.* Aus $A_k \in \mathscr{A}$ für $k \in \mathbb{N}$ folgt

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathscr{A}\,.$$

Das Paar $(\Omega, \mathscr{A})$ heißt *meßbarer Raum* (Meßraum).

Folgerungen. Direkte Folgerungen aus der Definition einer σ-Algebra $\mathscr{A}$ über einer Menge $\Omega \neq \emptyset$ sind.

(i) *Leere Menge.* Es gilt

$$\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathscr{A}\,.$$

(ii) *Abzählbarer Durchschnitt.* Aus $A_k \in \mathscr{A}$ für $k \in \mathbb{N}$ folgt mittels der Regel von De Morgan[1]

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \Omega \setminus \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (\Omega \setminus A_k) \right) \in \mathscr{A}\,.$$

(iii) *Endliche Vereinigung und endlicher Durchschnitt.* Es sei $K \in \mathbb{N}$, und es gelte $A_k \in \mathscr{A}$ für $k \in \{1, \dots, K\}$; durch Hinzunahme der leeren Menge bzw. der Grundmenge und Anwendung der Eigenschaften abzählbare Vereinigung bzw. abzählbarer Durchschnitt folgt

$$\bigcup_{k=1}^{K} A_k \in \mathscr{A}\,, \quad \bigcap_{k=1}^{K} A_k \in \mathscr{A}\,.$$

(iv) *Mengendifferenz.* Aus $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ folgt

$$A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap (\Omega \setminus A_2) \in \mathscr{A}\,.$$

[1] *Regeln von De Morgan.* Für zwei Mengen $A_1, A_2 \subseteq \Omega$ gelten die Relationen

$$\Omega \setminus (A_1 \cup A_2) = (\Omega \setminus A_1) \cap (\Omega \setminus A_1)\,, \quad \Omega \setminus (A_1 \cap A_2) = (\Omega \setminus A_1) \cup (\Omega \setminus A_1)\,,$$

und entsprechend die Erweiterungen auf abzählbar viele Mengen.

Erzeugte σ-Algebra. Für eine Teilmenge des euklidischen Raumes $A \subseteq \Omega = \mathbb{R}^d$ erhält man durch Betrachtung von

$$\mathscr{A} = \{\emptyset, A, \mathbb{R}^d \setminus A, \mathbb{R}^d\}$$

eine σ-Algebra. Allgemeiner geht man für ein System von Teilmengen einer Grundmenge auf die davon erzeugte σ-Algebra über.

Bezeichnung (Erzeugte σ-Algebra)**.** Es bezeichnet $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ ein System von Teilmengen der Grundmenge $\Omega \neq \emptyset$. Das Mengensystem

$$\sigma(\mathscr{M}) = \bigcap \{\mathscr{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra über } \Omega \text{ mit } \mathscr{M} \subseteq \mathscr{A}\}$$

ist die kleinste σ-Algebra über Ω, welche $\mathscr{M}$ umfaßt; es wird als die von $\mathscr{M}$ *erzeugte σ-Algebra* bezeichnet.

Meßbare Funktion. Eine Funktion zwischen zwei Mengen mit zugehörigen σ-Algebren heißt *meßbar*, wenn das Urbild eines Elementes der σ-Algebra über der Bildmenge ein Element der σ-Algebra über der Definitionsmenge ist.

Bezeichnung (Meßbare Funktion)**.** Es bezeichnen $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ zwei meßbare Räume. Eine Funktion $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ heißt *meßbar*, wenn das Urbild eines Elementes von $\mathscr{A}_2$ ein Element von $\mathscr{A}_1$ ist

$$\forall A_2 \in \mathscr{A}_2 : \quad f^{-1}(A_2) \in \mathscr{A}_1 \,.$$

2.2 Maßraum, Wahrscheinlichkeitsraum

Maßraum. Ein *Maß* ist eine Funktion, die den Elementen einer σ-Algebra nicht-negative Zahlen zuordnet und insbesondere die leere Menge auf Null abbildet.

Bezeichnung (Maß, Maßraum)**.** Es bezeichnet $(\Omega, \mathscr{A})$ einen meßbaren Raum, d.h. $\mathscr{A}$ ist eine σ-Algebra über der Grundmenge $\Omega \neq \emptyset$. Ein *Maß* auf $\mathscr{A}$ ist eine Funktion

$$\mu : \mathscr{A} \longrightarrow [0, \infty] : A \longmapsto \mu(A)$$

mit folgenden Eigenschaften.

(i) *Maß der leeren Menge.* Es gilt

$$\mu(\emptyset) = 0\,.$$

(ii) *σ-Additivität (Abzählbare Vereinigung).* Für eine Folge von paarweise disjunkten Mengen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $A_k \in \mathscr{A}$ für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu\Bigg(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Bigg) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)\,.$$

Das Tripel bestehend aus Grundmenge, σ-Algebra und Maß bezeichnet man als *Maßraum.*

Folgerungen. Direkte Folgerungen aus der Definition eines Maßes $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ sind.

(i) *Endliche Additivität (Endliche Vereinigung).* Für endlich viele paarweise disjunkte Mengen $A_k \in \mathscr{A}$ mit $k \in \{1, \ldots, K\}$, wobei $K \in \mathbb{N}$, folgt

$$\mu\Bigg(\bigcup_{k=1}^{K} A_k\Bigg) = \sum_{k=1}^{K} \mu(A_k)\,.$$

(ii) *Subtraktivität (Mengendifferenz).* Für $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ mit $A_2 \subseteq A_1$ und $\mu(A_2) < \infty$ folgt

$$\mu(A_1 \setminus A_2) = \mu(A_1) - \mu(A_2)\,.$$

Erklärung. In der betrachteten Situation bildet

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup A_2$$

eine disjunkte Vereinigung; damit folgt

$$\mu(A_1) = \mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_2)\,,$$

was die angegebene Relation zeigt. ⋄

(iii) *Monotonie (Vereinigung).* Für $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ mit $A_2 \subseteq A_1$ folgt die Abschätzung

$$\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$$

aus der obigen Relation und $\mu(A_1 \setminus A_2) \geq 0$.

(iv) *Identität (Vereinigung und Durchschnitt).* Für $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ gilt

$$\mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)\,.$$

Erklärung. Im trivialen Fall $A_2 \subseteq A_1$ folgt die Behauptung sofort aus $A_1 \cup A_2 = A_1$ und $A_1 \cap A_2 = A_2$; analog für $A_1 \subseteq A_2$. Im allgemeinen Fall zeigt eine Veranschaulichung

$$\begin{aligned}\mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) &= \mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1) + 2\,\mu(A_1 \cap A_2)\\ &= \mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \mu(A_1 \cap A_2)\\ &= \mu(A_1) + \mu(A_2)\end{aligned}$$

und damit die angegebene Relation. ◇

(v) *Subadditivität (Abzählbare Vereinigung).* Für eine Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $A_k \in \mathscr{A}$ gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)\,.$$

Erklärung. Wegen $\mu(A_1 \cap A_2) \geq 0$ impliziert die obige Relation

$$\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2)\,;$$

die angegebene Abschätzung folgt daraus durch wiederholte Anwendung. ◇

Endlicher Maßraum. Ein *Maß* mit beschränktem Wertebereich führt auf einen endlichen Maßraum.

Bezeichnung (Endliches Maß, endlicher Maßraum)**.** Es bezeichnet $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ einen Maßraum. Falls das Maß der Grundmenge endlich ist

$$\mu(\Omega) < \infty\,,$$

heißt das Maß *endlich* (beschränkt) und $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein *endlicher* (beschränkter) *Maßraum.*

Normierungsbedingung. Ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* ist ein Spezialfall eines endlichen Maßes; es wird üblicherweise mit $\mu = \mathbb{P}$ bezeichnet. Man beachte, daß für jeden endlichen Maßraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ die zusätzlich geforderte Normierungsbedingung mittels

$$\forall A \in \mathscr{A}: \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

erreicht werden kann.

Bezeichnung (Wahrscheinlichkeitsmaß, Wahrscheinlichkeitsraum)**.** Falls ein endlicher Maßraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ die Normierungsbedingung

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

erfüllt, wird er als *Wahrscheinlichkeitsraum* bezeichnet; das zugehörige Maß $\mathbb{P}$ nennt man ein *Wahrscheinlichkeitsmaß.*

Identifikation. Da es zweckmäßig ist, Objekte zu identifizieren, die sich nur in geringem Maß unterscheiden, führt man den Begriff der *Nullmenge* ein und untersucht üblicherweise vollständige Maß- bzw. Wahrscheinlichkeitsräume.

Bezeichnung (Nullmenge)**.** Es sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Falls für ein Element $A_0 \in \mathscr{A}$ das Maß den Wert Null annimmt

$$\mu(A_0) = 0\,,$$

bezeichnet man A_0 als *Nullmenge.* Man sagt, daß eine Eigenschaft *fast überall* in Ω gilt, wenn eine Nullmenge $A_0 \in \mathscr{A}$ existiert, sodaß die Eigenschaft für alle Elemente $\omega \in \Omega \setminus A_0$ gültig ist; im Zusammenhang mit einem Wahrscheinlichkeitsraum spricht man von einer *fast sicheren* Eigenschaft.

Bezeichnung (Vollständiger Maßraum)**.** Ein Maßraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ bzw. das Maß μ heißt *vollständig,* wenn alle Teilmengen von Nullmengen in der σ-Algebra enthalten sind.

2.3 Lebesgue-Maß, Lebesgue-Integral

Borel-σ-Algebra und Lebesgue-Maß. Im Rahmen der Integrationstheorie für den euklidischen Raum $\mathbb{R}^d$ betrachtet man meist die zugehörige *Borel-σ-Algebra* und das *Lebesgue-Maß*; dieses ist auch im Bereich der Wahrscheinlichkeitstheorie relevant, etwa in Kombination mit der Dichtefunktion der Normalverteilung.

Bezeichnung (Borel-σ-Algebra, Borel-Menge)**.** In Situationen, wo die betrachtete Grundmenge $\Omega \neq \emptyset$ einen topologischen Raum[2] bildet, bezeichnet man die kleinste σ-Algebra, welche alle offenen Mengen der Grundmenge enthält, als *Borel-σ-Algebra* $\mathscr{B}(\Omega)$ und ihre Elemente als *Borel-Mengen*.

Charakterisierung der Borel-σ-Algebra. Im Spezialfall eines separablen metrischen Raumes und insbesondere des euklidischen Raumes ist die Borel-σ-Algebra folgendermaßen charakterisiert.

---

[2] *Topologie, Offene Mengen, Topologischer Raum.* Eine Topologie über einer Grundmenge $\Omega \neq \emptyset$ ist ein System von Teilmengen $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ mit den folgenden Eigenschaften.

(i) *Grundmenge und leere Menge.* Es gilt

$$\Omega \in \mathscr{T}\,, \quad \emptyset \in \mathscr{T}\,.$$

(ii) *Beliebige Vereinigung.* Es sei $\mathscr{K}$ eine beliebige Indexmenge. Aus $T_k \in \mathscr{T}$ für $k \in \mathscr{K}$ folgt

$$\bigcup_{k \in \mathscr{K}} T_k \in \mathscr{T}\,.$$

(iii) *Endlicher Durchschnitt.* Aus $T_k \in \mathscr{T}$ für $k \in \{1, \dots, K\}$ mit $K \in \mathbb{N}$ folgt

$$\bigcap_{k=1}^{K} T_k \in \mathscr{T}\,.$$

Die Elemente von $\mathscr{T}$ werden als offene Mengen bezeichnet, und das Paar $(\Omega, \mathscr{T})$ heißt topologischer Raum.

Alternative Definition mittels abgeschlossenen Mengen. Das Komplement einer offenen Menge $\Omega \setminus T$ mit $T \in \mathscr{T}$ wird als abgeschlossene Menge bezeichnet. Die Grundmenge und die leere Menge sind abgeschlossen; weiters folgt mittels der Regel von De Morgan, daß die endliche Vereinigung und der beliebige Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen eine abgeschlossene Menge ist.

(i) Falls die Grundmenge $\Omega \neq \emptyset$ einen separablen metrischen Raum[3] (Ω, d) bildet, ist die durch die Metrik erzeugte Topologie durch die offenen Kugeln definiert; da jede offene Menge als abzählbare Vereinigung von offenen Kugeln darstellbar ist, ist die Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(\Omega)$ durch die von den offenen Kugeln erzeugte σ-Algebra gegeben.

(ii) Für die Menge der reellen Zahlen $\Omega = \mathbb{R}$ wird die zugehörige Topologie durch die offenen Intervalle mit rationalen Endpunkten

$$(a, b) \subset \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{Q},$$

definiert; die zugehörige Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ umfaßt insbesondere alle offenen und abgeschlossenen Intervalle.

(iii) Auf dem euklidischen Raum $\Omega = \mathbb{R}^d$ betrachtet man kartesische Produkte offener Intervalle mit rationalen Endpunkten

$$\prod_{j=1}^{d} (a_j, b_j) \subset \mathbb{R}, \quad a_j, b_j \in \mathbb{Q}, \quad j \in \{1, \dots, d\},$$

um die zugehörige Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ zu erzeugen.

Bezeichnung (Lebesgue–Borel-Maß, Lebesgue-meßbare Mengen, Lebesgue-Maß)**.** Für die Borel-σ-Algebra des euklidischen Raumes $\Omega = \mathbb{R}^d$, welche durch kartesische Produkte von Intervallen mit rationalen Endpunkten gegeben ist, ist das *Lebesgue–Borel-Maß*

$$\lambda : \mathscr{B}\big(\mathbb{R}^d\big) \longrightarrow [0, \infty]$$

durch die Vorgabe der Volumina

$$\lambda\Bigg(\prod_{j=1}^{d} \big[a_j, b_j\big] \Bigg) = \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j), \quad a_j, b_j \in \mathbb{Q}, \quad a_j < b_j, \quad j \in \{1, \dots, d\},$$

eindeutig bestimmt. Durch Vervollständigung des Lebesgue–Borel-Maßes ergibt sich das *Lebesgue-Maß* und die σ-Algebra der *Lebesgue-meßbaren Mengen.*

[3] *Abgeschlossene Hülle.* Für eine Teilmenge $M \subseteq \Omega$ eines topologischen Raumes heißt der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, welche M umfassen, die abgeschlossene Hülle von M

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{M \subseteq N \\ N \subseteq \Omega \text{ abgeschlossen}}} N.$$

Die abgeschlossene Hülle einer Menge ist insbesondere abgeschlossen.

Dichtheit, Separabilität. Eine Teilmenge $M \subseteq \Omega$ eines topologischen Raumes heißt dicht, wenn ihre abgeschlossene Hülle mit der Grundmenge übereinstimmt

$$\overline{M} = \Omega.$$

Ein topologischer Raum heißt separabel, wenn eine abzählbare dichte Teilmenge existiert.

Metrik, Metrischer Raum. Eine Metrik auf einer Menge Ω ist eine symmetrische und positiv-definite Funktion $d : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, welche zudem die Dreiecksungleichung erfüllt. Das Paar (Ω, d) heißt metrischer Raum.

Riemann-Integral. Vergleiche Vorlesung.

Lebesgue-Integral. Das Lebesgue-Integral verallgemeinert das Riemann-Integral und bildet eine wesentliche Grundlage moderner mathematischer Theorien; es erfordert geringere Regularitätseigenschaften des Integranden und ist zweckmäßiger als das Riemann-Integral, beispielsweise in Hinblick auf Grenzprozesse und Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge. Im Spezialfall einer auf einer kompakten Menge Riemann-integrierbaren Funktion stimmen die Werte von Lebesgue-Integral und Riemann-Integral überein. Zur Vereinfachung wird im Folgenden angenommen, daß der betrachtete Definitionsbereich ein beschränktes abgeschlossenes Intervall

$$X \subset \mathbb{R}$$

ist; ähnliche Überlegungen gelten für Lebesgue-meßbare Teilmengen der reellen Zahlen.

(i) *Charakteristische Funktion.* Die charakteristische Funktion einer beliebigen Teilmenge $M \subseteq X$ ist durch

$$\chi_M : X \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 1\,, & x \in M\,, \\ 0\,, & x \notin M\,, \end{cases}$$

definiert.

(ii) *Lebesgue-Maß.* Es bezeichnet $\lambda(M)$ das Lebesgue-Maß einer Lebesgue-meßbaren Menge $M \subseteq X$; inbesondere gilt für ein abgeschlossenes Intervall $[a, b] \subseteq X$ die Relation

$$\lambda\big([a, b]\big) = b - a\,.$$

(iii) *Elementare Funktion und Lebesgue-Integral.* Für $J \in \mathbb{N}$ bezeichnen $r_1, \dots, r_J \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen und $M_1, \dots, M_J \subseteq X$ paarweise disjunkte Lebesgue-meßbare Mengen. Eine reellwertige Funktion der Form

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sum_{j=1}^{J} r_j\, \chi_{M_j}(x)$$

wird als elementare Funktion oder Treppenfunktion bezeichnet. Das Lebesgue-Integral einer elementaren Funktion ist durch die folgende Relation

$$\begin{aligned} \int_X f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) &= \int_X \sum_{j=1}^{J} r_j\, \chi_{M_j}(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \sum_{j=1}^{J} r_j \int_X \chi_{M_j}(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \sum_{j=1}^{J} r_j \int_{M_j} 1\,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \sum_{j=1}^{J} r_j\, \lambda(M_j) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

definiert; man beachte, dass insbesondere die Eigenschaft der Linearität gilt, d.h. für Linearkombinationen von einfachen Funktionen folgt

$$\int_X \big(c\,f + d\,g\big)(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = c\int_X f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) + d\int_X g(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)\,.$$

(iv) *Lebesgue-Integral.* Eine reellwertige Funktion ist genau dann Lebesgue-meßbar, wenn sie punktweise durch eine Folge von elementaren Funktionen approximiert werden kann. Wählt man für eine nicht-negative Funktion in geeigneter Art und Weise eine solche Folge von elementaren Funktionen, so ist das zugehörige Lebesgue-Integral als Limes der entsprechenden Integrale gegeben; allgemeiner zerlegt man eine Funktionen in positive und negative Anteile. Meist wird auch für das Lebesgue-Integral die gebräuchliche Schreibweise

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}x = \int_X f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$$

verwendet.

Veranschaulichung. Vergleiche Vorlesung (Veranschaulichung von Riemann- und Lebesgue-Integral).

Literaturquelle. Detailierte Informationen zu Lebesgue-Maß und Lebesgue-Integral finden sich beispielsweise in folgender frei verfügbarer Literaturquelle

CHRISTIAN KANZOW
Kapitel zu *Lebesgue-Maß, Lebesgue-Integral, Hauptsätze zum Lebesgue-Integral*
Vorlesungsunterlagen, Wintersemester 2011/12
http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~kanzow/analysis3/Kapitel19.pdf
http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~kanzow/analysis3/Kapitel20.pdf
http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~kanzow/analysis3/Kapitel21.pdf

2.4 Zählmaß, Dirac-Maß, Gauß-Maß

Beispiele. Ein erstes Beispiel eines Maßes ist das *Zählmaß*; von besonderer Bedeutung für die Wahrscheinlichkeitstheorie ist das *Gauß-Maß*, welches als Spezialfall das *Dirac-Maß* einschließt. Man beachte, daß für allgemeine Maße die Bezeichnung μ gewählt wurde; im Zusammenhang mit Normalverteilungen ist es jedoch üblich, den Erwartungswert mit μ zu bezeichnen.

Zählmaß und Dirac-Maß. Es bezeichnet $(\Omega, \mathscr{A})$ einen meßbaren Raum.

(i) Das *Zählmaß* ordnet jeder endlichen Menge ihre Mächtigkeit und jeder unendlichen Menge den Wert Unendlich zu

$$\mathscr{A} \longrightarrow [0,\infty] : A \longmapsto \begin{cases} |A|, & A \text{ endliche Menge}, \\ \infty, & A \text{ unendliche Menge}. \end{cases}$$

(ii) Das *Dirac-Maß* an der Stelle $x \in \Omega$ ist durch

$$\delta_x : \mathscr{A} \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

definiert und bildet ein Wahrscheinlichkeitsmaß; inbesondere gilt

$$\delta_x(\Omega) = 1.$$

Gauß-Maß. Es seien $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in [0,\infty)$. Ein auf der Borel-σ-Algebra der reellen Zahlen definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß der Form

$$\mathbb{P} = N\big(\mu,\sigma^2\big) : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_A \mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\xi, & \sigma > 0, \\ \delta_\mu(A), & \sigma = 0, \end{cases}$$

heißt reelles *Gauß-Maß* oder eindimensionale *Normalverteilung* mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 bzw. Standardabweichung σ; im Spezialfall $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ spricht man von der *Standardnormalverteilung*. Der auftretende Integrand

$$\varrho : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty) : \xi \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

wird als zugehörige Dichtefunktion bezeichnet; Graphen von Dichtefunktionen sind in Abbildung 5.1 illustriert.

(i) *Normierungsbedingung.* Man beachte, daß die geforderte Normierungsbedingung

$$\sigma > 0: \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}\xi = 1$$

erfüllt ist. Zum Nachweis dieser Identität verwendet man eine lineare Transformation und Symmetrieüberlegungen

$$\begin{gathered} \eta = \tfrac{\xi-\mu}{\sigma}\,, \quad \xi = \sigma\,\eta + \mu\,, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}\,, \\ I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{\eta^2}{2}}\, \mathrm{d}\eta = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-\frac{\eta^2}{2}}\, \mathrm{d}\eta\,. \end{gathered}$$

Um das resultierende Integral zu bestimmen, betrachtet man das Quadrat und verwendet eine Transformation mittels Polarkoordinaten

$$\begin{gathered} \eta_1 \longleftrightarrow x\,, \quad \eta_2 \longleftrightarrow y\,, \quad \eta_1, x, \eta_2, y \in (0,\infty)\,, \\ I^2 = \tfrac{2}{\pi} \int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-\frac{\eta_1^2}{2}}\, \mathrm{d}\eta_1 \int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-\frac{\eta_2^2}{2}}\, \mathrm{d}\eta_2 = \tfrac{2}{\pi} \int_{(0,\infty)\times(0,\infty)} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, \mathrm{d}(x,y)\,, \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\,\cos(\varphi) \\ r\,\sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad r \in (0,\infty)\,, \quad \varphi \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right), \\ \Phi'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\,\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\,\cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \det\bigl(\Phi'(r,\varphi)\bigr) = r\left(\bigl(\cos(\varphi)\bigr)^2 + \bigl(\sin(\varphi)\bigr)^2\right) = r > 0\,, \\ I^2 = \tfrac{2}{\pi} \int_{(0,\infty)\times(0,\frac{\pi}{2})} r\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\, \mathrm{d}(r,\phi) = \int_{(0,\infty)} r\,\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\, \mathrm{d}r = \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_{r=\infty}^{0} = 1\,, \\ I = 1\,; \end{gathered}$$

insgesamt zeigt dies die angegebene Normierungsbedingung.

(ii) *Erwartungswert und Varianz.* Die verwendete Bezeichnungsweise erklärt sich wegen der Relationen

$$\begin{gathered} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{\mathbb{R}} \xi\,\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}\xi = \mu\,, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{\mathbb{R}} (\xi-\mu)^2\,\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}\xi = \sigma^2\,. \end{gathered}$$

Ähnlich wie zuvor zeigt man die erste Identität mittels der linearen Transformation

$$\begin{gathered} \eta = \tfrac{\xi-\mu}{\sigma}\,, \quad \xi = \sigma\,\eta + \mu\,, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}\,, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{\mathbb{R}} \xi\,\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\sigma\,\eta + \mu)\,\mathrm{e}^{-\frac{\eta^2}{2}}\, \mathrm{d}\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\sigma \int_{\mathbb{R}} \eta\,\mathrm{e}^{-\frac{\eta^2}{2}}\, \mathrm{d}\eta + \mu\,I = \mu\,; \end{gathered}$$

man beachte, daß die auftretenden Integrale existieren und die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \eta \longmapsto \eta\,\mathrm{e}^{-\frac{\eta^2}{2}}$$

ungerade ist. Die zweite Identität folgt mittels partieller Integration, denn

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{\mathbb{R}}(\xi-\mu)^2\,\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(\sigma\eta)^2\mathrm{e}^{-\frac{\eta^2}{2}}\,\mathrm{d}\eta \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\sigma^2\int_{\mathbb{R}}\eta\underbrace{\eta\,\mathrm{e}^{-\frac{\eta^2}{2}}}_{=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\mathrm{e}^{-\frac{\eta^2}{2}}}\,\mathrm{d}\eta = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\sigma^2\,\eta\,\mathrm{e}^{-\frac{\eta^2}{2}}\Big|_{\eta=-\infty}^{\infty}+\sigma^2 I \\
&= \sigma^2\,.
\end{aligned}$$

Vergleiche Erwartungswert und Varianz von kontinuierlichen Zufallsvariablen. ◇

2.5 Zufallsvariable, Induziertes Maß

Zufallsvariable. Eine Zufallsvariable ordnet den Ergebnissen eines Zufallsexperimentes Zahlenwerte zu; genauer, eine Zufallsvariable ist eine meßbare Funktion von einem Wahrscheinlichkeitsraum in einen meßbaren Raum. Es sei darauf hingewiesen, daß sprachlich meist nicht zwischen einer Zufallsvariable und dem induzierten Maß unterschieden wird. Beispielsweise bezeichnet man eine reellwertige Zufallsvariable, deren induziertes Maß normalverteilt ist, als normalverteilte Zufallsvariable; es ist auch zu beachten, daß für ein reelles Gauß-Maß die Bezeichnung Normalverteilung gebräuchlich ist.

Bezeichnung (Zufallsvariable, Induziertes Maß)**.** Es sei $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum; insbesondere bezeichnet

$$\mathbb{P} : \mathscr{A}_1 \longrightarrow [0,1] : A_1 \longmapsto \mathbb{P}(A_1)$$

das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß. Weiters sei $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ ein meßbarer Raum.

(i) *Zufallsvariable.* Eine *Zufallsvariable* ist eine meßbare Funktion

$$Z : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2 \,.$$

(ii) *Induziertes Maß.* Das durch Z auf Ω_2 *induzierte Maß* (induzierte Verteilung) ist durch

$$\mathbb{P}_Z : \mathscr{A}_2 \longrightarrow [0,1] : A_2 \longmapsto \mathbb{P}_Z(A_2) = \mathbb{P}\big(Z^{-1}(A_2)\big)$$

definiert, wobei $Z^{-1}(A_2)$ die Urbildmenge von A_2 unter Z bezeichnet; man beachte, daß dies der Zuordnung

$$A_2 \in \mathscr{A}_2 \xmapsto{Z^{-1}} A_1 = Z^{-1}(A_2) \in \mathscr{A}_1 \xmapsto{\mathbb{P}} \mathbb{P}(A_1)$$

entspricht. Da die geforderte Normierungsbedingung

$$\mathbb{P}_Z(\Omega_2) = \mathbb{P}(\Omega_1) = 1$$

erfüllt ist, führt das induzierte Maß insbesondere auf ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Diskrete versus kontinuierliche Zufallsvariable. In Hinblick auf die Mächtigkeit des Wertebereiches unterscheidet man diskrete Zufallsvariablen und kontinuierliche Zufallsvariablen; da allgemeine Mengen zugelassen sind, ist der ebenfalls gebräuchliche Begriff der stetigen Zufallsvariable vom Begriff der stetigen Funktion zu unterscheiden.

Bezeichnung (Diskrete Zufallsvariable, kontinuierliche Zufallsvariable)**.** Eine Zufallsvariable $Z : \Omega_1 \to \Omega_2$ heißt *diskret*, wenn sie höchstens abzählbar viele verschiedene Werte annimmt, d.h. der Wertebereich $Z(\Omega_1)$ endlich oder abzählbar unendlich ist; führt $Z(\Omega_1)$ jedoch auf eine überabzählbare Menge, so spricht man von einer *kontinuierlichen* (stetigen) Zufallsvariable.

Reellwertige Zufallsvariable. Im Spezialfall einer Zufallsvariable, deren Bildbereich die reellen Zahlen versehen mit der Borel-σ-Algebra sind, spricht man von einer reellwertigen Zufallsvariable; die Meßbarkeitsbedingung läßt sich in diesem Fall folgendermaßen vereinfachen. Vergleiche Vorlesung (numerische Approximation von bei Normalverteilungen auftretenden Integralen, Tabellierung).

Bezeichnung (Reellwertige Zufallsvariable, mehrdimensionale Zufallsvariable)**.** Es bezeichnet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ einen Wahrscheinlichkeitsraum; als Wertebereiche werden euklidische Räume $\mathbb{R}^d$ und die zugehörigen Borel-σ-Algebren $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ betrachtet.

(i) Eine Zufallsvariable

$$Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *reellwertige* (reelle, eindimensionale) Zufallsvariable; es reicht aus, halbabgeschlossene Intervalle der Form $(-\infty, r] \subset \mathbb{R}$ mit rationalen Endpunkten $r \in \mathbb{Q}$ zu betrachten und dafür die Gültigkeit der Meßbarkeitsbedingung

$$\begin{aligned} \forall r \in \mathbb{Q}: \quad & Z^{-1}\big((-\infty, r]\big) \in \mathscr{A} \quad \text{bzw.} \\ \forall r \in \mathbb{Q}: \quad & \big\{\omega \in \Omega : Z(\omega) \le r\big\} \in \mathscr{A} \end{aligned}$$

zu überprüfen.

(ii) Allgemeiner wird eine Zufallsvariable

$$Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

als *mehrdimensionale* oder präziser d-dimensionale Zufallsvariable bezeichnet.

(iii) Insbesondere im Bereich der Quantenphysik betrachtet man zudem komplexwertige (komplexe) Zufallsvariablen

$$Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{C};$$

in diesem Fall wird gefordert, daß Realteil $\Re Z$ und Imaginärteil $\Im Z$ reellwertige Zufallsvariablen sind.

Kontinuierliche reellwertige Zufallsvariable. Im Zusammenhang mit einer reellwertigen Zufallsvariablen und insbesondere mit einer normalverteilten Zufallsvariable wird der Begriff der kontinuierlichen Zufallsvariablen mit spezielleren Voraussetzungen verbunden; häufig nimmt man zusätzlich an, daß die Existenz einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und die Wohldefiniertheit der folgenden Relationen sichergestellt ist

$$\begin{gathered}
Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varrho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \\
\mathbb{P}\big(Z \in (z_0, z)\big) = \mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big((z_0, z)\big)\Big) = \int_{(z_0,z)} \varrho(\xi)\, \mathrm{d}\xi \in [0,1], \quad z_0, z \in \mathbb{R},
\end{gathered}$$

vergleiche Kapitel 3.1 und 3.4.

2.6 Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit

Stochastische Unabhängigkeit. Zwei zufällige Ereignisse heißen stochastisch unabhängig, wenn sich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das eine Ereignis eintritt, sich nicht dadurch ändert, daß das andere Ereignis eintritt oder nicht eintritt.

Bezeichnung (Bedingte Wahrscheinlichkeit, Stochastische Unabhängigkeit)**.** Es bezeichnet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ einen Wahrscheinlichkeitsraum.

(i) *Bedingte Wahrscheinlichkeit.* Für zwei Ereignisse $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ definiert die Relation

$$\mathbb{P}(A_1|A_2)\,\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_2|A_1)\,\mathbb{P}(A_1)$$

die *bedingten Wahrscheinlichkeiten* $\mathbb{P}(A_1|A_2)$ und $\mathbb{P}(A_2|A_1)$.

(ii) *Stochastische Unabhängigkeit.* Zwei Ereignisse $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ heißen *stochastisch unabhängig*, wenn folgende Identität gültig ist

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2)\,.$$

Folgerung. In der obigen Situation ist unter der zusätzlichen Voraussetzung $\mathbb{P}(A_2) \in (0,1)$ die stochastische Unabhängigkeit von $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ äquivalent zu

$$\mathbb{P}(A_1|A_2) = \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1|\Omega \setminus A_2)\,.$$

Erklärung. Mittels der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit erhält man einerseits

$$\mathbb{P}(A_1|A_2) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_2)} = \frac{\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(A_2)} = \mathbb{P}(A_1)\,;$$

andererseits ergibt sich mittels elementarer Relationen für Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{gathered}
\mathbb{P}\big(A_1 \cap (\Omega \setminus A_2)\big) = \mathbb{P}\big(A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)\big) = \mathbb{P}\big(A_1\big) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}\big(A_1\big) - \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2)\,,\\
\mathbb{P}(\Omega \setminus A_2) = 1 - \mathbb{P}(A_2)\,,\\
\mathbb{P}(A_1|\Omega \setminus A_2) = \frac{\mathbb{P}\big(A_1 \cap (\Omega \setminus A_2)\big)}{\mathbb{P}(\Omega \setminus A_2)} = \frac{\mathbb{P}(A_1)\,\big(1 - \mathbb{P}(A_2)\big)}{1 - \mathbb{P}(A_2)} = \mathbb{P}(A_1)
\end{gathered}$$

und somit das behauptete Resultat. ⋄

Stochastisch unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen. Die Begriffe der identischen Verteilung und der stochastischen Unabhängigkeit werden für allgemeine Zufallsvariablen eingeführt, jedoch in erster Linie für reellwertige Zufallsvariablen benötigt. Paarweise stochastisch unabhängige und identisch verteilte reellwertige Zufallsvariablen werden an späterer Stelle im Zusammenhang mit den Gesetzen der großen Zahlen betrachtet, vergleiche Kapitel 4.2.

Bezeichnung (Stochastisch unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen)**.** Es bezeichnen $(\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mathbb{P}_1)$ sowie $(\Omega_2, \mathscr{A}_2, \mathbb{P}_2)$ Wahrscheinlichkeitsräume; weiters sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein meßbarer Raum.

(i) Zwei Zufallsvariablen $Z_1 : \Omega_1 \to \Omega$ und $Z_2 : \Omega_2 \to \Omega$ heißen *identisch verteilt*, wenn die induzierten Maße (Verteilungen) gleich sind

$$\forall A \in \mathscr{A} : \quad \mathbb{P}_{Z_1}(A) = \mathbb{P}_1\big(Z_1^{-1}(A)\big) = \mathbb{P}_2\big(Z_2^{-1}(A)\big) = \mathbb{P}_{Z_2}(A)\,.$$

(ii) Zwei reellwertige Zufallsvariablen $Z_1, Z_2 : \Omega_1 \to \Omega$ heißen *stochastisch unabhängig*, wenn sämtliche Urbildmengen stochastisch unabhängig sind

$$\forall A_1, A_2 \in \mathscr{A} : \quad \mathbb{P}\big(Z_1^{-1}(A_1) \cap Z_2^{-1}(A_2)\big) = \mathbb{P}\big(Z_1^{-1}(A_1)\big)\,\mathbb{P}\big(Z_2^{-1}(A_2)\big)\,;$$

wegen $Z_1^{-1}(A_1), Z_2^{-1}(A_2) \in \mathscr{A}_1$ ist der Durchschnitt $Z_1^{-1}(A_1) \cap Z_2^{-1}(A_2) \in \mathscr{A}_1$ wohldefiniert.

(iii) Sind zwei reellwertige Zufallsvariablen stochastisch unabhängig und identisch verteilt, verwendet man häufig die Abkürzung i.i.d.[4]

[4] Abkürzung für die englische Bezeichnung *independent and identically distributed random variables*.

2.7 Erwartungswert, Varianz, Kovarianz

Erinnerung. Für die Definition einer unendlichen Reihe, deren Konvergenz und elementare Konvergenzkriterien sei auf Grundvorlesungen aus dem Bereich der Analysis verwiesen.

Bemerkung. Erwartungswert und Varianz zählen zu grundlegenden Größen bei der Charakterisierung von Zufallsvariablen und den zugehörigen induzierten Maßen. Bei der Einführung des Erwartungswertes und in Folge von Varianz, Kovarianz und Korrelation unterscheidet man diskrete und kontinuierliche Zufallsvariablen.

Bezeichnung (Erwartungswert, Varianz)**.** Es bezeichnet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ einen Wahrscheinlichkeitsraum und $Z: \Omega \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Zufallsvariable.

(i) *Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable.* Im Fall einer diskreten reellwertigen Zufallsvariable ist der Erwartungswert durch

$$E(Z) = \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega)\, \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = \sum_{z \in \mathbb{R}} z\, \mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big(\{z\}\big)\Big) = \sum_{z_k \in Z(\Omega)} z_k\, \mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big(\{z_k\}\big)\Big)$$

erklärt, sofern die Reihe konvergiert; man beachte, daß mittels Betrachtung der Bildelemente $z = Z(\omega) \in \mathbb{R}$ für $\omega \in \Omega$ und der zugehörigen Urbildmengen $Z^{-1}(\{z\})$ eine Einschränkung auf höchstens abzählbar viele Summanden möglich ist und die angegebene Reihe damit wohldefiniert ist. Es sei daran erinnert, daß die Komposition $\mathbb{P} \circ Z^{-1}$ dem von $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{R}$ induzierten Maß entspricht.

(ii) *Erwartungswert einer kontinuierlichen Zufallsvariable.* Falls das induzierte Maß einer kontinuierlichen Zufallsvariable eine Dichtefunktion besitzt

$$\mathbb{P}_Z : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \mathbb{P}\big(Z^{-1}(A)\big),$$
$$\varrho : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty),$$
$$\mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega : Z(\omega) \in A\}\big) = \mathbb{P}\big(Z^{-1}(A)\big) = \int_A \varrho(\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

ist der Erwartungswert durch

$$E(Z) = \int_\Omega Z(\omega)\, \mathrm{d}\mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = \int_\mathbb{R} z\, \mathrm{d}\mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big(\{z\}\big)\Big) = \int_\mathbb{R} z\, \varrho(z)\, \mathrm{d}z$$

gegeben, sofern das Integral als Riemann-Integral bzw. Lebesgue-Integral im uneigentlichen Sinn existiert.

(iii) *Varianz, Standardabweichung.* Varianz und Standardabweichung von Zufallsvariablen sind durch

$$V(Z) = E\Big(\big(Z - E(Z)\big)^2\Big) \geq 0, \quad S(Z) = \sqrt{V(Z)} \geq 0,$$

definiert; man beachte, daß die Varianz nichtnegativ ist und folglich die Standardabweichung eine nichtnegative reelle Zahl ist.

Bemerkung. Man beachte, daß aus der Existenz des Erwartungswertes $E(Z)$ im Allgemeinen nicht auf die Existenz von $E(|Z|)$ geschlossen werden kann; bei Existenz einer Dichtefunktion gilt

$$E\big(|Z|\big) = \int_\Omega \big|Z(\omega)\big| \,\mathrm{d}\mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = \int_\mathbb{R} |z| \,\mathrm{d}\mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big(\{z\}\big)\Big) = \int_\mathbb{R} |z|\,\varrho(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Bezeichnung (Kovarianz, Korrelation)**.** Es bezeichnet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ einen Wahrscheinlichkeitsraum, und es seien $Z_1, Z_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ reellwertige Zufallsvariablen.

(i) *Kovarianz.* Die Kovarianz von Z_1 und Z_2 ist durch

$$K(Z_1, Z_2) = E\Big(\big(Z_1 - E(Z_1)\big)\big(Z_2 - E(Z_2)\big)\Big)$$

gegeben, vorausgesetzt die Erwartungswerte $E(Z_1), E(Z_2), E(Z_1 Z_2)$ sind wohldefiniert; offensichtlich gilt

$$K(Z,Z) = V(Z)\,, \quad K(Z_1, Z_2) = K(Z_2, Z_1)\,.$$

(ii) *Korrelation.* Die Korrelation von Z_1 und Z_2 ist wie folgt definiert

$$\frac{K(Z_1, Z_2)}{S(Z_1)\,S(Z_2)}\,.$$

Bemerkung. Grundlegende Eigenschaften von Erwartungswert und Varianz sind im folgenden Resultat zusammengefaßt.

Resultat (Eigenschaften von Erwartungswert, Varianz, Kovarianz)**.** Es seien $Z_1, Z_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei reellwertige Zufallsvariablen.

(i) Als direkte Schlußfolgerungen aus der Definition ergibt sich die Linearität des Erwartungswertes

$$E(Z_1 + Z_2) = E(Z_1) + E(Z_2)\,, \quad E(cZ_1) = cE(Z_1)\,, \quad c \in \mathbb{R}\,;$$

bei Betrachtung der konstanten Eins-Funktion erhält man mittels der Normierungsbedingung für Wahrscheinlichkeitsmaße das Resultat

$$\begin{gathered} Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto 1\,, \\ E(Z) = \sum_{\omega\in\Omega} Z(\omega)\,\mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1\,, \\ E(Z) = \int_\Omega Z(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = \int_\Omega 1\,\mathrm{d}\mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1\,. \end{gathered}$$

(ii) Falls die Zufallsvariablen $Z_1, Z_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängig sind, d.h. die zugehörigen induzierten Maße stochastisch unabhängig sind, gilt die Identität

$$E(Z_1 Z_2) = E(Z_1)\, E(Z_2)\,;$$

stochastische Unabhängigkeit kann auch durch diese Bedingung an die Erwartungswerte eingeführt werden.

Erklärung. Im Fall von diskreten Zufallsvariablen setzt man $z_k = Z_k(\omega) \in \mathbb{R}$ für $\omega \in \Omega$ und $k \in \{1,2\}$, geht auf die zugehörigen Urbildmengen über und betrachtet den gemeinsamen Durchschnitt $\omega \in Z_1^{-1}(\{z_1\}) \wedge \omega \in Z_2^{-1}(\{z_2\})$; stochastische Unabhängigkeit impliziert $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\, \mathbb{P}(A_2)$ für $A_1 = Z_1^{-1}(\{z_1\})$ und $A_2 = Z_2^{-1}(\{z_2\})$. Insgesamt zeigt dies

$$\begin{aligned}
E(Z_1 Z_2) &= \sum_{\omega\in\Omega} Z_1(\omega)\, Z_2(\omega)\, \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big)\\
&= \sum_{z_1,z_2\in\mathbb{R}} z_1\, z_2\, \mathbb{P}\Big(Z_1^{-1}\big(\{z_1\}\big) \cap Z_2^{-1}\big(\{z_2\}\big)\Big)\\
&= \sum_{z_1,z_2\in\mathbb{R}} z_1\, z_2\, \mathbb{P}\Big(Z_1^{-1}\big(\{z_1\}\big)\Big)\, \mathbb{P}\Big(Z_2^{-1}\big(\{z_2\}\big)\Big)\\
&= \sum_{z_1\in\mathbb{R}} z_1\, \mathbb{P}\Big(Z_1^{-1}\big(\{z_1\}\big)\Big) \sum_{z_2\in\mathbb{R}} z_2\, \mathbb{P}\Big(Z_2^{-1}\big(\{z_2\}\big)\Big)\\
&= E(Z_1)\, E(Z_2)\,.
\end{aligned}$$

Ähnliche Überlegungen gelten für den kontinuierlichen Fall. ◇

(iii) Eine elementare Rechnung zeigt die Relation

$$V(Z) = E\Big(\big(Z - E(Z)\big)^2\Big) = E\Big(Z^2 - 2\,E(Z)\, Z + \big(E(Z)\big)^2\Big) = E\big(Z^2\big) - \big(E(Z)\big)^2\,.$$

(iv) Die Kovarianz vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned}
K(Z_1, Z_2) &= E\Big(\big(Z_1 - E(Z_1)\big)\,\big(Z_2 - E(Z_2)\big)\Big) = E\big(Z_1 Z_2 - E(Z_1) Z_2 - E(Z_2) Z_1 + E(Z_1) E(Z_2)\big)\\
&= E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)\, E(Z_2)\,.
\end{aligned}$$

Diese Relation zeigt insbesondere, daß die Kovarianz zweier unabhängiger Zufallsvariablen verschwindet

$$Z_1, Z_2 \text{ unabhängig} \quad\Longleftrightarrow\quad E(Z_1 Z_2) = E(Z_1)\, E(Z_2) \quad\Longrightarrow\quad K(Z_1, Z_2) = 0\,;$$

die Umkehrung ist im Allgemeinen jedoch nicht richtig.

(v) Die Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen ist durch

$$\begin{aligned}
V(Z_1 + Z_2) &= E\Big(\big(Z_1 + Z_2 - E(Z_1 + Z_2)\big)^2\Big)\\
&= E\Big((Z_1 + Z_2)^2 - 2\,E(Z_1 + Z_2)\,(Z_1 + Z_2) + \big(E(Z_1 + Z_2)\big)^2\Big)\\
&= E\big(Z_1^2 + 2\,Z_1 Z_2 + Z_2^2\big) - \big(E(Z_1) + E(Z_2)\big)^2\\
&= E\big(Z_1^2\big) - \big(E(Z_1)\big)^2 + E\big(Z_2^2\big) - \big(E(Z_2)\big)^2 + 2\,E(Z_1 Z_2) - 2\,E(Z_1)\, E(Z_2)\\
&= V(Z_1) + V(Z_2) + 2\,K(Z_1, Z_2)
\end{aligned}$$

gegeben. Im Fall unabhängiger Zufallsvariablen folgt somit

$$Z_1, Z_2 \text{ unabhängig} \quad \Longrightarrow \quad K(Z_1, Z_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad V(Z_1 + Z_2) = V(Z_1) + V(Z_2)\,.$$

Zusammenfassung. Erwartungswert und Varianz erfüllen folgende elementare Relationen

$$\begin{gathered}
Z_1, Z_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,, \\
E(c) = c\,, \\
V(c) = E\big(c^2\big) - \big(E(c)\big)^2 = 0\,, \\
E(c\,Z) = c\,E(Z)\,, \\
V(c\,Z) = E\big(c^2 Z^2\big) - \big(E(c\,Z)\big)^2 = c^2 E\big(Z^2\big) - \big(c\,E(Z)\big)^2 = c^2 \Big(E\big(Z^2\big) - \big(E(Z)\big)^2\Big) = c^2\,V(Z)\,, \\
E(Z + c) = E(Z) + c\,, \\
V(Z + c) = E\big(Z^2 + 2\,c\,Z + c^2\big) - \big(E(Z) + c\big)^2 = E\big(Z^2\big) - \big(E(Z)\big)^2 = V(Z)\,, \\
E(Z_1 + Z_2) = E(Z_1) + E(Z_2)\,, \\
V(Z_1 + Z_2) = E\big((Z_1 + Z_2)^2\big) - \big(E(Z_1 + Z_2)\big)^2 = V(Z_1) + V(Z_2) + 2\,\big(E(Z_1\,Z_2) - E(Z_1)\,E(Z_2)\big)\,, \\
Z_1, Z_2 \;\text{ stochastisch unabhängig}\,, \quad E(Z_1\,Z_2) = E(Z_1)\,E(Z_2)\,, \\
V(Z_1 + Z_2) = V(Z_1) + V(Z_2)\,.
\end{gathered}$$

Kapitel 3

Grundlegende Verteilungen

In diesem Kapitel werden grundlegende Verteilungen von diskreten und kontinuierlichen Zufallsvariablen erwähnt; zur Angabe und Veranschaulichung ist es zweckmäßig, die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einzuführen. Von besonderer Relevanz in Hinblick auf die Modellierung von Zufallsexperimenten und die Behandlung im Schulunterricht sind Gleichverteilung, Binomialverteilung und Normalverteilung.

Im Folgenden bezeichnet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ den zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum.

3.1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Bezeichnungsweisen. In der Literatur gibt es im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen keine einheitliche Bezeichnungsweise, unter anderem liest man von Wahrscheinlichkeitsdichten, Verteilungsdichten, Dichtefunktionen, oder Dichten; teilweise werden unterschiedliche Begriffe eingeführt, um den Fall diskreter und kontinuierlicher Zufallsvariablen zu unterscheiden. Im Folgenden wird die Bezeichnung Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und abkürzend Dichtefunktion verwendet.

Wahrscheinlichkeitsmaße und Verteilungen. Wie bereits an früherer Stelle erwähnt, tritt der Begriff *Verteilung* (induziertes Maß) auch im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsmaßen auf; gemeint ist dann der Spezialfall des von der identischen Funktion induzierten Maßes, welches mit dem zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsmaß übereinstimmt; etwa im kontinuierlichen Fall

$$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}), \quad \big(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})\big), \quad Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto \omega,$$
$$A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \quad Z^{-1}(A) = A \in \mathscr{A}, \quad \mathbb{P}(Z \in A) = \mathbb{P}\big(Z^{-1}(A)\big) = \mathbb{P}(A).$$

Bezeichnung (Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion).

(i) *Diskrete Zufallsvariable.* Für eine diskrete reellwertige Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ spiegelt die zugehörige Funktion

$$\varrho : Z(\Omega) \subset \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] : z \longmapsto \mathbb{P}(Z = z) = \mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big(\{z\}\big)\Big)$$

die wesentlichen Informationen betreffend das induzierte Maß wider und wird als *Wahrscheinlichkeitsdichtefunkion* oder abkürzend *Dichtefunkion* bezeichnet; wegen

$$z \notin Z(\Omega) : \quad Z^{-1}\big(\{z\}\big) = \emptyset, \quad \mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big(\{z\}\big)\Big) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0,$$

ist es naheliegend, die Dichtefunktion durch Null auf ganz $\mathbb{R}$ fortzusetzen

$$\varrho : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] : z \longmapsto \begin{cases} \mathbb{P}(Z = z) = \mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big(\{z\}\big)\Big), & z \in Z(\Omega), \\ 0, & z \notin Z(\Omega). \end{cases}$$

(ii) *Kontinuierliche Zufallsvariable.* Für eine kontinuierliche reellwertige Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ und insbesondere für eine normalverteilte Zufallsvariable nützt man folgenden Zusammenhang zwischen Werten der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und den Urbildern spezieller Borel-Mengen

$$\mathbb{P}\big(Z \in (z_0, z)\big) = \mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big((z_0, z)\big)\Big) = \int_{(z_0,z)} \varrho(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta \in [0,1], \quad z_0, z \in \mathbb{R},$$
$$\varrho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : z \longmapsto \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\, \mathbb{P}\big(Z \in (z_0, z)\big).$$

Aufgrund der Meßbarkeitseigenschaften von Zufallsvariablen ist sichergestellt, daß das induzierte Maß wohldefiniert ist; hier wird zusätzlich Differenzierbarkeit gefordert. Man beachte außerdem, daß aus den Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes folgt, daß eine Dichtefunktion nicht-negative Werte annimmt, auf der Menge der reellen Zahlen Riemann- bzw. allgemeiner Lebesgue-integrierbar ist und eine grundlegende Normierungsbedingung erfüllt

$$\varrho(z) \geq 0\,, \quad z \in \mathbb{R}\,,$$
$$\int_{\mathbb{R}} \varrho(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \mathbb{P}\big(Z^{-1}(\mathbb{R})\big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1\,.$$

Bemerkung.

(i) Im Fall einer kontinuierlichen reellwertigen Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ und insbesondere im Zusammenhang mit einer normalverteilten Zufallsvariable ist die Betrachtung von Wahrscheinlichkeiten in einzelnen Punkten nicht sinnvoll und spiegelt keine Information wider; eine Punktmenge bildet nämlich eine Nullmenge

$$\mathbb{P}(Z = z) = \mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big(\{z\}\big)\Big) = \int_{\{z\}} \varrho(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0\,, \quad z \in \mathbb{R}\,.$$

(ii) Im kontinuierlichen Fall ist es möglich, daß einzelne Funktionswerte größer als Eins sind, d.h. das Auftreten von Bildelementen $\varrho(z) > 1$ für gewisse Elemente $z \in \mathbb{R}$ ist nicht ausgeschlossen.

3.2 Gleichverteilung

Gleichverteilte diskrete Zufallsvariablen. Eine diskrete reellwertige Zufallsvariable heißt *gleichverteilt* (gleichmäßig verteilt), wenn der Wertebereich eine endliche Menge ist und alle Bildelemente auf dieselbe Wahrscheinlichkeit führen

$$Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad Z(\Omega) = \{z_1, \dots, z_J\}\,,$$
$$\mathbb{P}(Z = z_j) = \mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big(\{z_j\}\big)\Big) = \tfrac{1}{J}\,, \quad j \in \{1, \dots, J\}\,;$$

die Berechnung von Erwartungswert und Varianz ergibt

$$E(Z) = \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega)\,\mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = \sum_{j=1}^{J} z_j\,\mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big(\{z_j\}\big)\Big) = \tfrac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} z_j\,,$$
$$E\big(Z^2\big) = \sum_{\omega \in \Omega} \big(Z(\omega)\big)^2\,\mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = \sum_{j=1}^{J} z_j^2\,\mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big(\{z_j\}\big)\Big) = \tfrac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} z_j^2\,,$$
$$V(Z) = E\big(Z^2\big) - \big(E(Z)\big)^2 = \tfrac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} z_j^2 - \tfrac{1}{J^2}\sum_{j,k=1}^{J} z_j\,z_k\,.$$

Spezialfall. Mittels der Faulhaberschen Formeln

$$\sum_{j=1}^{J} j = \tfrac{1}{2}\,J\,(J+1)\,, \qquad \sum_{j=1}^{J} j^2 = \tfrac{1}{6}\,J\,(J+1)\,(2\,J+1)\,,$$

erhält man in einem relevanten Spezialfall die Identitäten

$$Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad Z(\Omega) = \{1, \dots, J\}\,, \quad \mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big(\{j\}\big)\Big) = \tfrac{1}{J}\,, \quad j \in \{1, \dots, J\}\,,$$
$$E(Z) = \tfrac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} j = \tfrac{1}{2}\,(J+1)\,,$$
$$V(Z) = \tfrac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} j^2 - \big(E(Z)\big)^2 = \tfrac{1}{6}\,(J+1)\,(2\,J+1) - \tfrac{1}{4}\,(J+1)^2 = \tfrac{1}{12}(J+1)\,(J-1) = \tfrac{1}{12}(J^2-1)\,.$$

Beispiel.

(i) Als einfaches Beispiel dient ein Laplace-Experiment wie der Wurf eines Würfels; in diesem Fall ist es naheliegend, Elementarereignisse mit Zahlenwerten zu identifizieren, d.h. als Zufallsvariable die identische Funktion zu betrachten

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}\,, \quad \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = \tfrac{1}{|\Omega|} = \tfrac{1}{6}\,, \quad \omega \in \Omega\,,$$
$$Z : \{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow \{1,2,3,4,5,6\} : \omega \longmapsto \omega\,, \quad J = |Z(\Omega)| = 6\,,$$
$$\mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big(\{j\}\big)\Big) = \mathbb{P}\big(\{j\}\big) = \tfrac{1}{6}\,, \quad j \in \{1, \dots, 6\}\,,$$
$$E(Z) = \tfrac{1}{2}\,(J+1) = \tfrac{7}{2}\,, \quad V(Z) = \tfrac{1}{12}(J^2-1) = \tfrac{35}{12}\,.$$

(ii) Man beachte, daß geeignete Modifikationen des Wahrscheinlichkeitsraumes auf dieselbe Verteilung führen, beispielsweise

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}\,, \quad \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = \tfrac{1}{|\Omega|} = \tfrac{1}{12}\,, \quad \omega \in \Omega\,,$$

$$Z : \Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} \longrightarrow \{1,2,3,4,5,6\} : \begin{cases} 1,7 & \longmapsto & 1\,, \\ 2,8 & \longmapsto & 2\,, \\ 3,9 & \longmapsto & 3\,, \\ 4,10 & \longmapsto & 4\,, \\ 5,11 & \longmapsto & 5\,, \\ 6,12 & \longmapsto & 6\,, \end{cases} \quad J = |Z(\Omega)| = 6\,,$$

$$\mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big(\{j\}\big)\Big) = \mathbb{P}\big(\{j, j+6\}\big) = \tfrac{2}{12} = \tfrac{1}{6}\,, \quad j \in \{1,\dots,6\}\,,$$

$$E(Z) = \tfrac{1}{2}(J+1) = \tfrac{7}{2}\,, \quad V(Z) = \tfrac{1}{12}(J^2-1) = \tfrac{35}{12}\,.$$

Illustration. Für den zuvor angegebenen Spezialfall ist der Graph der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$\varrho : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] : z \longmapsto \begin{cases} \mathbb{P}(Z=j) = \mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big(\{j\}\big)\Big) = \frac{1}{J}\,, & z = j \in \{1,\dots,J\}\,, \\ 0\,, & z \notin \{1,\dots,J\}\,, \end{cases}$$

in Abbildung 5.2 illustriert.

3.3 Binomialverteilung

Binomischer Lehrsatz. Es sei daran erinnert, daß der *Binomialkoeffizient* durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \{0,\dots,n\}\,,$$

definiert ist, vergleiche Pascal'sches Dreieck basierend auf der Relation

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

und Kapitel 1.5; der *Binomische Lehrsatz* besagt, daß Potenzen von Summen folgendermaßen dargestellt werden können

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}\,, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hilfsresultat. Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$. An späterer Stelle werden die Relationen

$$\begin{aligned}
S_1(n) &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\, p^k\,(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n\,(n-1)!}{(k-1)!\big((n-1)-(k-1)\big)!}\, p\, p^{k-1}\,(1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= n\,p \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}\,(1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= n\,p \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k}\,(1-p)^{(n-1)-k} \\
&= n\,p\big(p+(1-p)\big)^{n-1} \\
&= n\,p\,, \\
S_2(n) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k} \\
&= n\,p \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n-1}{k} p^{k}\,(1-p)^{(n-1)-k} \\
&= n\,p \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-1}{k} p^{k}\,(1-p)^{(n-1)-k} + n\,p \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k}\,(1-p)^{(n-1)-k} \\
&= n\,p\, S_1(n-1) + n\,p\big(p+(1-p)\big)^{n-1} \\
&= n^2 p^2 - n\,p^2 + n\,p\,,
\end{aligned}$$

welche man mittels Substitution $k-1 \leftrightarrow k$ sowie Anwendung des Binomischen Lehrsatzes erhält, benötigt.

Binomialverteilung. Eine diskrete reellwertige Zufallsvariable heißt *binomialverteilt* mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind

$$\begin{gathered} Z \sim \mathrm{Bin}(n,p)\,, \\ Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad Z(\Omega) = \{0,1,\dots,n\}\,, \\ \mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big(\{k\}\big)\Big) = \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}\,, \quad k \in \{0,1,\dots,n\}\,; \end{gathered}$$

die Berechnung von Erwartungswert und Varianz mittels des zuvor angegebenen Hilfsresultates führt auf

$$\begin{gathered} E(Z) = \sum_{\omega\in\Omega} Z(\omega)\,\mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big(\{k\}\big)\Big) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k} = n\,p\,, \\ E\big(Z^2\big) = \sum_{\omega\in\Omega} \big(Z(\omega)\big)^2\,\mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = \sum_{j=1}^{J} k^2\,\mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big(\{k\}\big)\Big) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k} = n^2 p^2 - n\,p^2 + n\,p\,, \\ V(Z) = E\big(Z^2\big) - \big(E(Z)\big)^2 = n^2 p^2 - n\,p^2 + n\,p - n^2 p^2 = n\,p\,(1-p)\,. \end{gathered}$$

Bernoulli-Experiment. Ein Zufallsexperiment, bei welchem man sich nur für zwei Ereignisse interessiert, bezeichnet man nach Jakob Bernoulli (1655–1705, der Erste) als *Bernoulli-Experiment*; der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum hat dabei die einfache Struktur

$$\begin{gathered} (\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})\,, \quad \mathscr{A} = \{\emptyset, A, \Omega\setminus A, \Omega\}\,, \\ \mathbb{P}(\emptyset) = 0\,, \quad \mathbb{P}(A) = p \in [0,1]\,, \quad \mathbb{P}(\Omega\setminus A) = 1-p\,, \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1\,. \end{gathered}$$

Beispielsweise in Hinblick auf Glücksspiele verbindet man das Ereignis A mit Erfolg und das Komplementärereignis $\Omega\setminus A$ mit Mißerfolg; die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten nennt man entsprechend Erfolgs- und Mißerfolgswahrscheinlichkeit.

Beispiel. Als Beispiel für das Auftreten von Binomialverteilungen dient die mehrfache Durchführung eines Bernoulli-Experimentes unter denselben Bedingungen. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses wird als bekannt vorausgesetzt

$$(\Omega_0,\mathscr{A}_0,\mathbb{P}_0)\,, \quad A \in \mathscr{A}_0\,, \quad \mathbb{P}_0(A) = p \in [0,1]\,;$$

zur Unterscheidung wird der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum indiziert. Einfache Situationen sind der Wurf einer Münze

$$\Omega_0 = \{0,1\}\,, \quad \textit{Ergebnis Kopf}\ A = \{1\}\,, \quad \mathbb{P}_0(A) = \tfrac{1}{2}\,,$$

oder der Wurf eines Würfels mit folgenden Alternativen

$$\Omega_0 = \{1,2,3,4,5,6\}\,, \quad \textit{Wurf einer geraden Zahl } A = \{2,4,6\}\,, \quad \mathbb{P}_0(A) = \tfrac{1}{2}\,,$$
$$\Omega_0 = \{1,2,3,4,5,6\}\,, \quad \textit{Wurf einer Sechs } A = \{6\}\,, \quad \mathbb{P}_0(A) = \tfrac{1}{6}\,.$$

Das Eintreten von A verbindet man mit Erfolg, d.h. man definiert eine reellwertige Zufallsvariable durch

$$Z_0 : \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{R} : \omega_0 \longmapsto \begin{cases} 1\,, & \omega_0 \in A\,,\\ 0\,, & \omega_0 \notin A\,;\end{cases}$$

der Index der Zufallsvariable steht hier für die einmalige Durchführung des Experimentes. Man interessiert sich für die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis A bei n-facher Wiederholung des Experimentes genau k-mal eintritt. In diesem Sinne erfolgreiche Versuchsergebnisse sind etwa die beiden Ereignisse

$$A^{(n)} = \big(\underbrace{A,\dots,A}_{k-\text{mal}},\underbrace{\Omega_0\setminus A,\dots,\Omega_0\setminus A}_{(n-k)-\text{mal}}\big) \in \mathscr{A}^{(n)}\,, \quad \mathbb{P}^{(n)}\big(A^{(n)}\big) = p^k\,(1-p)^{n-k}\,,$$
$$\widetilde{A}^{(n)} = \big(\underbrace{\Omega_0\setminus A,\dots,\Omega_0\setminus A}_{(n-k)-\text{mal}},\underbrace{A,\dots,A}_{k-\text{mal}}\big) \in \mathscr{A}^{(n)}\,, \quad \mathbb{P}^{(n)}\big(\widetilde{A}^{(n)}\big) = p^k\,(1-p)^{n-k}\,,$$
$$\big(\Omega,\mathscr{A}^{(n)},\mathbb{P}^{(n)}\big)\,, \quad \Omega = \Omega^{(n)} = \Omega_0^n\,,$$

wobei die jeweilige Komponente das Ergebnis bei der jeweiligen Durchführung des Zufallsexperimentes angibt; man beachte, daß der zugrundeliegende Ereignisraum als kartesisches Produkt gegeben ist und die zugehörige σ-Algebra $\mathscr{A}^{(n)}$ sowie das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^{(n)}$ ausgehend von $\mathscr{A}_0$ und $\mathbb{P}_0$ definiert werden, vergleiche Literatur. Die Funktionswerte einer entsprechenden mehrdimensionalen Zufallsvariable sind durch

$$\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n) \in \Omega \longmapsto (\underbrace{1,\dots,1}_{k-\text{mal}},\ \underbrace{0,\dots,0}_{(n-k)-\text{mal}}) \in \mathbb{R}^n\,, \quad \omega_1,\dots,\omega_k \in A\,, \quad \omega_{k+1},\dots,\omega_n \notin A\,,$$
$$\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n) \in \Omega \longmapsto (\underbrace{0,\dots,0}_{(n-k)-\text{mal}},\underbrace{1,\dots,1}_{k-\text{mal}}) \in \mathbb{R}^n\,, \quad \omega_1,\dots,\omega_{n-k} \notin A\,, \quad \omega_{n-k+1},\dots,\omega_n \in A\,,$$

gegeben. Um Erfolg bzw. Mißerfolg zu messen, sind Informationen zu den einzelnen Durchführungen des Experimentes nicht erforderlich; es reicht aus, eine reellwertige Zufallsvariable zu betrachten, welche die Summe der Komponenten wiedergibt

$$Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$
$$(\omega_1,\dots,\omega_n) \longmapsto k\,, \quad \begin{cases} \omega_1,\dots,\omega_k \in A,\ \omega_{k+1},\dots,\omega_n \notin A\,,\\ \omega_1,\dots,\omega_{n-k} \notin A,\ \omega_{n-k+1},\dots,\omega_n \in A\,.\end{cases}$$

Das Abzählen sämtlicher Möglichkeiten führt auf das Resultat

$$Z \sim \mathrm{Bin}(n,p)\,,$$
$$Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad Z(\Omega) = \{0,1,\dots,n\}\,,$$
$$\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big(\{k\}\big)\Big) = \binom{n}{k}\,p^k\,(1-p)^{n-k}\,, \quad k \in \{0,1,\dots,n\}\,,$$

vergleiche Überlegungen zur Anordnung von Tupeln in Kapitel 1.5. Man beachte, daß die Struktur des zugrundeliegenden Ergebnisraumes Ω durch die Wahl von Ω_0 beeinflußt wird, die Werte des induzierten Maßes jedoch allein durch die Vorgabe der Größen n, k und p festgelegt sind; in diesem Sinn kann man den Wurf einer Münze

$$\Omega_0 = \{0,1\}\,, \quad \textit{Ergebnis Kopf } A = \{1\}\,, \quad \mathbb{P}_0(A) = \tfrac{1}{2}\,,$$

und den Würfelwurf mit gerader Augenzahl

$$\Omega_0 = \{1,2,3,4,5,6\}\,, \quad \textit{Wurf einer geraden Zahl } A = \{2,4,6\}\,, \quad \mathbb{P}_0(A) = \tfrac{1}{2}\,,$$

identifizieren.

Illustration. Der Wert der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ bestimmt das qualitative Aussehen der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$Z \sim \mathrm{Bin}(n,p)\,,$$
$$\varrho : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] : z \longmapsto \begin{cases} \mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big(\{k\}\big)\Big) = \binom{n}{k}\, p^k\,(1-p)^{n-k}\,, & z = k \in \{0,1,\dots,n\}\,, \\ 0\,, & z \notin \{0,1,\dots,n\}\,, \end{cases}$$

vergleiche Abbildungen 5.3 und 5.4; zur graphischen Darstellung werden Stabdiagramme verwendet. Bei Werten $p \in (0, \frac{1}{2})$ spricht man von einer linkssteilen Funktion und bei $p \in (\frac{1}{2}, 1)$ entsprechend von einer rechtssteilen Funktion; für $p = \frac{1}{2}$ ist die Funktion symmetrisch bezüglich einer Achse. Im einfachsten Spezialfall führt die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerten und Varianzen auf

$$n = 5: \quad \mathbb{P}(Z=k) = \binom{n}{k}\, p^k\,(1-p)^{n-k} = \begin{cases} 1 \cdot (1-p)^5\,, & k = 0\,, \\ 5 \cdot p\,(1-p)^4\,, & k = 1\,, \\ 10 \cdot p^2\,(1-p)^3\,, & k = 2\,, \\ 10 \cdot p^3\,(1-p)^2\,, & k = 3\,, \\ 5 \cdot p^4\,(1-p)\,, & k = 4\,, \\ 1 \cdot p^5\,, & k = 5\,, \end{cases}$$

$$E(Z) = np = \begin{cases} 1\,, & p = \frac{1}{5}\,, \\ 4\,, & p = \frac{4}{5}\,, \\ \frac{5}{2}\,, & p = \frac{1}{2}\,, \end{cases} \qquad V(Z) = n\,p\,(1-p) = \begin{cases} \frac{4}{5}\,, & p \in \left\{\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right\}, \\ \frac{5}{4}\,, & p = \frac{1}{5}\,. \end{cases}$$

Bernoullisches Gesetz der großen Zahlen. Im Zusammenhang mit dem *Bernoullisches Gesetz der großen Zahlen* wird die Relevanz der Binomialverteilung nochmals deutlich; Grenzwertsätze ermöglichen Aussagen betreffend die Approximation von Binomialverteilungen durch Normalverteilungen. Vergleiche Kapitel 4.2.

3.4 Normalverteilung

Bemerkung. Das Gauß-Maß wurde bereits an früherer Stelle eingeführt, vergleiche Kapitel 2.4; als Synonym wird häufig der Begriff Normalverteilung verwendet. In diesem Kapitel wird an die Definition und Eigenschaften des Gauß-Maßes erinnert, und es werden die daraus folgenden Resultate für normalverteilte Zufallsvariablen angegeben. Kapitel 4.3 befaßt sich mit Grenzwertsätzen zur Approximation von Binomialverteilungen durch Normalverteilungen.

Bezeichnung (Gauß-Maß, Normalverteilung)**.** Es seien $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in (0,\infty)$.

(i) Das auf der Borel-σ-Algebra der reellen Zahlen definierte Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mathbb{P} = N(\mu,\sigma^2) : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1] : A \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_A \mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}\zeta$$

heißt reelles *Gauß-Maß* oder eindimensionale *Normalverteilung* mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2; im Spezialfall $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ spricht man von der Standardnormalverteilung.

(ii) Allgemeiner spricht man von einer *normalverteilten Zufallsvariable* mit Parametern μ und σ bzw. Erwartungswert μ und Varianz σ^2, falls folgende Relationen gelten

$$\begin{gathered} Z \sim N(\mu,\sigma^2)\,, \\ Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad Z(\Omega) = \mathbb{R}\,, \\ \mathbb{P}\big(Z \in (z_0,z)\big) = \mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big((z_0,z)\big)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{(z_0,z)} \mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}\zeta \in [0,1]\,, \quad z_0, z \in \mathbb{R}\,, \end{gathered}$$

und entsprechend im Spezialfall

$$\begin{gathered} Z \sim N(0,1)\,, \\ \mathbb{P}\big(Z \in (z_0,z)\big) = \mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big((z_0,z)\big)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(z_0,z)} \mathrm{e}^{-\frac{\zeta^2}{2}}\, \mathrm{d}\zeta \in [0,1]\,, \quad z_0, z \in \mathbb{R}\,, \end{gathered}$$

von einer *standardnormalverteilten Zufallsvariable*.

Illustration. Die zugehörige Dichtefunktion (*Gauß'sche Glockenkurve*)

$$\varrho : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty) : z \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, \mathrm{e}^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ist in Abbildung 5.5 illustriert. Im Spezialfall der Standardnormalverteilung erhält man eine symmetrische Funktion

$$\mu = 0\,, \quad \sigma = 1 : \quad \varrho_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} = \varrho_0(-z)\,, \quad z \in \mathbb{R}\,;$$

geometrische Überlegungen oder systematischer eine Kurvendiskussion zeigen die Existenz eines globalen Maximums und zweier Wendepunkte

$$\begin{gathered}
\mu = 0\,, \quad \sigma = 1\,, \\
\max_{z\in\mathbb{R}} \varrho_0(z) = \varrho_0(0) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,, \\
\varrho_0(z) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\,, \quad \varrho_0'(z) = -\,z\,\varrho_0(z)\,, \quad \varrho_0''(z) = \big(z^2-1\big)\,\varrho_0(z)\,, \\
\varrho_0'(0) = 0\,, \quad \varrho_0''(0) = -\,\varrho_0(0) < 0\,, \\
\varrho_0''(1) = 0 = \varrho_0''(-1)\,.
\end{gathered}$$

Unter Ausnützung der Relationen

$$\varrho(z) = \tfrac{1}{\sigma}\,\varrho_0\big(\tfrac{z-\mu}{\sigma}\big)\,, \quad \varrho_0(z) = \sigma\,\varrho(\mu+\sigma z)\,, \quad z \in \mathbb{R}\,,$$

folgt daraus für den allgemeinen Fall die Symmetrieeigenschaft

$$\varrho(\mu+z) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} = \varrho(\mu-z)\,, \quad z \in \mathbb{R}\,,$$

eine Aussage über das globale Maximum

$$\max_{z\in\mathbb{R}} \varrho(z) = \varrho(\mu) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$$

und das Vorliegen von Wendepunkten an den Stellen

$$z = \mu+\sigma\,, \quad z = \mu-\sigma\,.$$

Normierung, Erwartungswert, Varianz. An früherer Stelle wurde gezeigt, daß die von einem Wahrscheinlichkeitsmaß geforderte Normierungsbedingung

$$\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\zeta = 1$$

erfüllt ist und die Relationen

$$\begin{gathered}
\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{\mathbb{R}} \zeta\,\mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\zeta = \mu\,, \\
\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{\mathbb{R}} (\zeta-\mu)^2\,\mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\zeta = \sigma^2\,,
\end{gathered}$$

gültig sind; daraus folgt insbesondere

$$\begin{gathered}
E(Z) = \int_{\Omega} Z(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = \int_{\mathbb{R}} \zeta\,\mathrm{d}\mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big(\{\zeta\}\big)\Big) = \int_{\mathbb{R}} \zeta\,\mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\zeta = \mu\,, \\
V(Z) = E\big((Z-\mu)^2\big) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{\mathbb{R}} (\zeta-\mu)^2\,\mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\zeta = \sigma^2\,.
\end{gathered}$$

Standardisierung. Man beachte, daß die Anwendung der linearen Transformation

$$z \longleftrightarrow \tfrac{z-\mu}{\sigma}$$

hilfreich ist, da sie eine Reduktion auf die Standardnormalverteilung und eine Vereinfachung von Berechnungen ermöglicht; man spricht von einem Übergang auf eine *standardisierte Zufallsvariable*

$$Z \sim N\big(\mu,\sigma^2\big) \quad \Longleftrightarrow \quad Z_0 = \frac{Z-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)\,;$$

umgekehrt gilt die Äquivalenz

$$Z_0 \sim N(0,1) \quad \Longleftrightarrow \quad Z = \mu + \sigma\, Z_0 \sim N\big(\mu,\sigma^2\big)\,;$$

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten. Da die Dichtefunktionen von Normalverteilungen keine durch elementare Funktionen gegebene Stammfunktionen besitzen, ist es notwendig, zur Angabe von Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}\big(Z \in (z_0,z)\big) = \mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big((z_0,z)\big)\Big) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{(z_0,z)} \mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}\zeta \in [0,1]\,, \quad z_0, z \in \mathbb{R}\,,$$

die auftretenden bestimmte Integrale näherungsweise zu berechnen.

(i) *Reduktion auf Standardnormalverteilung.* Man nützt dafür die zuvor angegebene lineare Tranformation

$$\widetilde{\zeta} = \tfrac{\zeta-\mu}{\sigma}\,, \quad \zeta = \mu + \sigma\,\widetilde{\zeta}\,,$$

$$\mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big((z_0,z)\big)\Big) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{(z_0,z)} \mathrm{e}^{-\frac{(\zeta-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}\zeta = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\left(\frac{z_0-\mu}{\sigma},\frac{z-\mu}{\sigma}\right)} \mathrm{e}^{-\frac{\widetilde{\zeta}^2}{2}}\, \mathrm{d}\widetilde{\zeta} = \mathbb{P}\Big(Z_0^{-1}\Big(\Big\{\big(\tfrac{z_0-\mu}{\sigma}, \tfrac{z-\mu}{\sigma}\big)\Big\}\Big)\Big)\,;$$

in Abbildung 5.6 ist die Gültigkeit dieser Identität für ein spezielles Integrationsintervall illustriert

$$\mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big((z_0,z)\big)\Big) = \mathbb{P}\Big(Z_0^{-1}\Big(\Big\{\big(\tfrac{z_0-\mu}{\sigma}, \tfrac{z-\mu}{\sigma}\big)\Big\}\Big)\Big)\,,$$
$$z_0 = \mu - k\,\sigma\,, \quad \tfrac{z_0-\mu}{\sigma} = -\,k\,,$$
$$z = \mu + k\,\sigma\,, \quad \tfrac{z-\mu}{\sigma} = k\,.$$

(ii) *Verteilungsfunktion.* Da bis vor einigen Jahren keine geeigneten Hilfsmittel wie programmierbare Taschenrechner zur Verfügung standen, war es notwendig, Werte von bestimmten Integralen

$$\mathbb{P}\Big(Z_0^{-1}\big((z_0,z)\big)\Big) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(z_0,z)} \mathrm{e}^{-\frac{\zeta^2}{2}}\, \mathrm{d}\zeta\,, \quad z_0, z \in \mathbb{R}\,,$$

aus Tabellen abzulesen; zu diesem Zweck war es hilfreich, die zugehörige *Verteilungsfunktion*

$$\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] : z \longmapsto \Phi(z) = \mathbb{P}\Big(Z_0^{-1}\big((-\infty,z)\big)\Big) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(-\infty,z)} \mathrm{e}^{-\frac{\zeta^2}{2}}\, \mathrm{d}\zeta\,,$$

einzuführen und die Identität

$$\int_{z_0}^{z} = \int_{z_0}^{c} + \int_{c}^{z} = \int_{c}^{z} - \int_{c}^{z_0}\,, \quad \mathbb{P}\Big(Z_0^{-1}\big((z_0,z)\big)\Big) = \Phi(z) - \Phi(z_0)\,, \quad z_0, z \in \mathbb{R}\,,$$

auszunützen. Die Normierungseigenschaft des Gauß-Maßes sowie die Symmetrie des Integranden impliziert

$$\begin{aligned}
\Phi(\infty) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{\zeta^2}{2}}\, \mathrm{d}\zeta = 1\,, \\
\widetilde{\zeta} = -z\,, \quad \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(-\infty,z)} \mathrm{e}^{-\frac{\zeta^2}{2}}\, \mathrm{d}\zeta &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(-z,\infty)} \mathrm{e}^{-\frac{\widetilde{\zeta}^2}{2}}\, \mathrm{d}\widetilde{\zeta}\,, \quad z \in [0,\infty)\,, \\
\Phi(-z) + \Phi(z) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(-\infty,-z)} \mathrm{e}^{-\frac{\zeta^2}{2}}\, \mathrm{d}\zeta + \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(-\infty,z)} \mathrm{e}^{-\frac{\zeta^2}{2}}\, \mathrm{d}\zeta &= \Phi(\infty) = 1\,, \quad z \in [0,\infty)\,;
\end{aligned}$$

deshalb ist es ausreichend, die Werte der Verteilungsfunktion für positive Argumente näherungsweise zu berechnen, zu tabellieren und ansonsten die Relation

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)\,, \quad z \in [0,\infty)\,,$$

zu verwenden.

(iii) *Numerische Integration.* Die näherungsweise Berechnung von bestimmten Integralen mittels Riemann-Summen ist in Abbildung 5.7 illustriert, vergleiche Implementierung in MATLAB in Kapitel 5. Bei Linksregel und Rechtsregel sind die Stützstellen durch die linken bzw. rechten Grenzen der Teilintervalle gegeben; eine deutliche bessere Approximationsgüte erhält man bei Verwendung von Gauß-Quadraturformeln basierend auf einer speziellen Wahl der Stützstellen.

(iv) *k-σ-Regeln.* An späterer Stelle werden die *k-σ-Regeln* für allgemeine Verteilungen behandelt, vergleiche Kapitel 4.1; im Spezialfall von Normalverteilungen erhält man wie zuvor erläutert durch Reduktion auf die Standardnormalverteilung und numerische Integration die präziseren Ergebnisse

$$\begin{gathered}
Z \sim N\big(\mu,\sigma^2\big)\,, \quad Z_0 \sim N(0,1)\,, \\
\mathbb{P}\big(Z \in (\mu - \gamma\sigma, \mu + \gamma\sigma)\big) = \mathbb{P}\big(Z_0 \in (-\gamma,\gamma)\big) = 2\,\Phi(\gamma) - 1\,, \quad \gamma \in (0,\infty)\,, \\
\gamma = k = 1: \quad \mathbb{P}\big(Z \in (\mu - \sigma, \mu + \sigma)\big) = \mathbb{P}\big(Z_0 \in (-1,1)\big) \approx 0.6827\,, \\
\gamma = k = 2: \quad \mathbb{P}\big(Z \in (\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)\big) = \mathbb{P}\big(Z_0 \in (-2,2)\big) \approx 0.9545\,, \\
\gamma = k = 3: \quad \mathbb{P}\big(Z \in (\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)\big) = \mathbb{P}\big(Z_0 \in (-3,3)\big) \approx 0.9973\,,
\end{gathered}$$

vergleiche Abbildung 5.8.

3.5 Weitere Verteilungen

Vergleiche Vorlesung.

Kapitel 4

Grundlegende Resultate

In diesem Kapitel werden grundlegende Resultate der Wahrscheinlichkeitstheorie wie die Ungleichung von Chebyshev, Gesetze der großen Zahlen und Grenzwertsätze behandelt.

Im Folgenden bezeichnet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ den zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum.

4.1 Ungleichung von Chebyshev

Situation. Bei der Untersuchung von reellwertigen Zufallsvariablen interessiert man sich häufig für Aussagen über Wahrscheinlichkeiten der Form

$$Z:\Omega\longrightarrow\mathbb{R},\quad E(Z)=\mu,\quad V(Z)=\sigma^2,\quad \mu,\sigma\in\mathbb{R},\quad \sigma>0,$$
$$\mathbb{P}\big(\mu-c<Z<\mu+c\big)=\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega: Z(\omega)\in(\mu-c,\mu+c)\}\big),\quad c>0.$$

Falls Z vollständig vorgegeben ist, kann man die Wahrscheinlichkeit solcher Ereignisse (näherungsweise) berechnen; falls jedoch nur Erwartungswert und Varianz bekannt sind, ermöglicht die Ungleichung von Chebyshev (1821–1894) eine Abschätzung.

Resultat (Ungleichung von Chebyshev)**.** Eine reellwertige Zufallsvariable mit gegebenem Erwartungswert und Varianz

$$Z:\Omega\longrightarrow\mathbb{R},\quad E(Z)=\mu,\quad V(Z)=\sigma^2,\quad \mu,\sigma\in\mathbb{R},\quad \sigma>0,$$

erfüllt für beliebiges $c>0$ die Abschätzungen

$$\mathbb{P}\big(|Z-\mu|\geq c\big)=\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega: Z(\omega)\in(-\infty,\mu-c]\cup[\mu+c,\infty)\}\big)\leq\tfrac{\sigma^2}{c^2},$$
$$\mathbb{P}\big(|Z-\mu|< c\big)=\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega: Z(\omega)\in(\mu-c,\mu+c)\}\big)\geq 1-\tfrac{\sigma^2}{c^2}.$$

Erklärung. Im Fall einer kontinuierlichen Zufallsvariable mit zugehöriger Wahrscheinlichkeitsfunktion $\varrho:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ ist die Varianz durch die folgende Relation gegeben

$$\int_{\mathbb{R}}(\zeta-\mu)^2\,\varrho(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=\sigma^2.$$

Da der Integrand nicht-negative Werte annimmt, impliziert dies die erste Abschätzung

$$\begin{aligned}\sigma^2&\geq\int_{\zeta\in(-\infty,\mu-c]\cup[\mu+c,\infty)}(\zeta-\mu)^2\,\varrho(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\\&\geq c^2\int_{\zeta\in(-\infty,\mu-c]\cup[\mu+c,\infty)}\varrho(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\\&=c^2\,\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega: Z(\omega)\in(-\infty,\mu-c]\cup[\mu+c,\infty)\}\big);\end{aligned}$$

da dies äquivalent zur Relation

$$-\,\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega: Z(\omega)\in(-\infty,\mu-c]\cup[\mu+c,\infty)\}\big)\geq-\tfrac{\sigma^2}{c^2}$$

ist, erhält man mittels Komplementbildung die zweite Abschätzung

$$\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega: Z(\omega)\in(-\infty,\mu-c]\cup[\mu+c,\infty)\}\big)+\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega: Z(\omega)\in(\mu-c,\mu+c)\}\big)=1,$$
$$\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega: Z(\omega)\in(\mu-c,\mu+c)\}\big)=1-\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega: Z(\omega)\in(-\infty,\mu-c]\cup[\mu+c,\infty)\}\big),$$
$$\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega: Z(\omega)\in(\mu-c,\mu+c)\}\big)\geq 1-\tfrac{\sigma^2}{c^2}.$$

Analoge Überlegungen gelten für diskrete Zufallsvariablen. ◇

Folgerung. Das Einsetzen spezieller Werte in die Ungleichung von Chebyshev führt auf

$$\begin{aligned} c = \sigma\gamma, \quad \gamma > 0, \\ \mathbb{P}\big(|Z-\mu| \geq \sigma\gamma\big) \leq \tfrac{1}{\gamma^2}, \\ \mathbb{P}\big(|Z-\mu| < \sigma\gamma\big) \geq 1 - \tfrac{1}{\gamma^2}; \end{aligned}$$

da üblicherweise die Bezeichnungen $\sigma = V(Z)$ sowie $\gamma = k$ verwendet wurden, sind diese Relationen auch als *k-σ-Regeln* bekannt. Insbesondere für $\gamma = k \in \{2,3\}$ zeigen sie

$$\begin{aligned} k = 2: \quad \mathbb{P}\big(|Z-\mu| < 2\sigma\big) \geq 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}, \\ k = 3: \quad \mathbb{P}\big(|Z-\mu| < 3\sigma\big) \geq 1 - \tfrac{1}{9} = \tfrac{8}{9}; \end{aligned}$$

mit dem Intervall $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ sind also zumindest 75% abgedeckt.

Normalverteilung. Man beachte, daß die obigen Aussagen für allgemeine Zufallsvariablen gelten. Im Spezialfall einer normalverteilten Zufallsvariable

$$\begin{gathered} Z \sim N\big(\mu, \sigma^2\big), \quad \mu, \sigma \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0, \\ Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varrho : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty) : \xi \longmapsto \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, \mathrm{e}^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \\ \mathbb{P}(Z \in A) = \mathbb{P}\big(Z^{-1}(A)\big) = \int_A \varrho(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \in [0,1], \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \end{gathered}$$

ist es zweckmäßig, zunächst eine Transformation auf die Standardnormalverteilung und anschließend Methoden der numerischen Integration anzuwenden; damit erhält man die präziseren Ergebnisse

$$\begin{aligned} k = 1: \quad \mathbb{P}\big(|Z-\mu| < \sigma\big) \approx 0.683, \\ k = 2: \quad \mathbb{P}\big(|Z-\mu| < 2\sigma\big) \approx 0.954, \\ k = 3: \quad \mathbb{P}\big(|Z-\mu| < 3\sigma\big) \approx 0.997. \end{aligned}$$

Vergleiche Kapitel 3.4.

4.2 Gesetze der großen Zahlen

Situation. Es sei daran erinnert, daß reellwertige Zufallsvariablen

$$Z_1, \dots, Z_N : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad N \in \mathbb{N},$$

paarweise stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind, wenn die Bedingung

$$\begin{gathered}\forall\, A_1, A_2 \in \mathscr{B}(\mathbb{R}): \quad \mathbb{P}\big(Z_m^{-1}(A_1) \cap Z_n^{-1}(A_2)\big) = \mathbb{P}\big(Z_m^{-1}(A_1)\big)\, \mathbb{P}\big(Z_n^{-1}(A_2)\big), \\ m, n \in \{1, \dots, N\}, \quad m \neq n,\end{gathered}$$

erfüllt ist und alle induzierten Maße gleich sind

$$\begin{gathered}\forall\, A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}): \quad \mathbb{P}\big(Z_m^{-1}(A)\big) = \mathbb{P}\big(Z_n^{-1}(A)\big), \\ m, n \in \{1, \dots, N\};\end{gathered}$$

insbesondere impliziert dies, daß Erwartungswerte und Varianzen übereinstimmen

$$E(Z_n) = \mu, \quad V(Z_n) = E\big(Z_n^2\big) - \big(E(Z_n)\big)^2 = \sigma^2, \quad \mu, \sigma \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0, \quad n \in \{1, \dots, N\}.$$

Arithmetisches Mittel. Das arithmetische Mittel der Zufallsvariablen

$$Z = \tfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

hat denselben Erwartungswert

$$E(Z) = \tfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} E(Z_n) = \mu;$$

aus der geforderten paarweisen stochastischen Unabhängigkeit

$$E(Z_m\, Z_n) = E\big(Z_m\big)\, E\big(Z_n\big) = \mu^2, \quad m, n \in \{1, \dots, N\}, \quad m \neq n,$$

und wegen der elementaren Identitäten

$$\begin{gathered}\big(Z_1 + \dots + Z_N\big)^2 = Z_1^2 + \dots + Z_N^2 + 2\, Z_1\, Z_2 + \dots + 2\, Z_1\, Z_N + \dots + 2\, Z_{N-1}\, Z_N, \\ Z^2 = \tfrac{1}{N^2} \sum_{m,n=1}^{N} Z_m\, Z_n = \tfrac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N} Z_n^2 + \tfrac{2}{N^2} \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{n=m+1}^{N} Z_m\, Z_n, \\ \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{n=m+1}^{N} 1 = \sum_{m=1}^{N-1} (N-m) = N\,(N-1) - \tfrac{1}{2}\,(N-1)\,N = \tfrac{1}{2}\,(N-1)\,N,\end{gathered}$$

folgt für die Varianz des Mittels die Relation

$$\begin{aligned}
V(Z) &= E\big(Z^2\big) - \big(E(Z)\big)^2 \\
&= E\bigg(\tfrac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N} Z_n^2\bigg) + E\bigg(\tfrac{2}{N^2} \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{n=m+1}^{N} Z_m Z_n\bigg) - \mu^2 \\
&= \tfrac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N} E\big(Z_n^2\big) + \tfrac{2}{N^2} \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{n=m+1}^{N} E\big(Z_m\big) E\big(Z_n\big) - \mu^2 \\
&= \tfrac{1}{N} \big(\sigma^2 + \mu^2\big) + \mu^2 \tfrac{1}{N} (N-1) - \mu^2 \\
&= \tfrac{1}{N} \sigma^2 .
\end{aligned}$$

Schwaches Gesetz der großen Zahlen. Bei Anwendung der Ungleichung von Chebyshev

$$\mathbb{P}\big(\big\{\omega \in \Omega : Z(\omega) \in (-\infty, E(Z) - \varepsilon] \cup [E(Z) + \varepsilon, \infty)\big\}\big) \leq \tfrac{1}{\varepsilon^2} V(Z) ,$$

ergibt sich für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Abschätzung für das Mittel

$$0 \leq \mathbb{P}\bigg(\bigg|\tfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_n - \mu\bigg| \geq \varepsilon\bigg) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 N} .$$

Der Grenzübergang $N \to \infty$ mittels Einschließungssatz zeigt das *schwaches Gesetz der großen Zahlen.*

Resultat (Schwaches Gesetz der großen Zahlen)**.** Das arithmetische Mittel von identisch verteilten und paarweise stochastisch unabhängigen reellwertigen Zufallsvariablen

$$\begin{gathered}
Z_1, \dots, Z_N : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} , \\
E(Z_n) = \mu , \quad V(Z_n) = \sigma^2 , \quad \mu, \sigma \in \mathbb{R} , \quad \sigma > 0 , \quad n \in \{1, \dots, N\} , \\
\tfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} ,
\end{gathered}$$

konvergiert in folgendem Sinn gegen den Erwartungswert

$$\begin{gathered}
\forall \varepsilon > 0 : \quad \lim_{N \to \infty} \mathbb{P}\bigg(\bigg|\tfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_n - \mu\bigg| \geq \varepsilon\bigg) = 0 , \\
\forall \varepsilon > 0 : \quad \lim_{N \to \infty} \mathbb{P}\bigg(\bigg\{\omega \in \Omega : \tfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_n(\omega) \in (-\infty, \mu - \varepsilon] \cup [\mu + \varepsilon, \infty)\bigg\}\bigg) = 0 ;
\end{gathered}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß das Mittel Werte im Intervall $(\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)$ annimmt, konvergiert somit gegen Eins.

Starkes Gesetz der großen Zahlen. Dem *schwachen Gesetz der großen Zahlen* wird das *starke Gesetz der großen Zahlen* gegenübergestellt; für eine Herleitung sei auf die angegebene Literatur und die Quelle

https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/mawi.inst.110/lehre/ws12/WR/Skript_10.pdf

verwiesen.

Resultat (Starkes Gesetz der großen Zahlen)**.** Für das arithmetische Mittel von paarweise stochastisch unabhängigen reellwertigen Zufallsvariablen mit übereinstimmenden Erwartungswerten gilt

$$Z_1, \dots, Z_N : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad E(Z_n) = \mu\,, \quad \mu \in \mathbb{R}\,, \quad \tfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$
$$\mathbb{P}\Big(\lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_n = \mu \Big) = 1\,,$$
$$\mathbb{P}\Big(\Big\{ \omega \in \Omega : \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_n(\omega) = \mu \Big\} \Big) = 1\,.$$

Bernoullisches Gesetz der großen Zahlen. Im Zusammenhang mit Zufallsexperimenten ist man an der folgenden Fragestellung interessiert; vergleiche dazu Binomialverteilung, frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff nach VON MISES und Durchführung eines Münzwurfes. Bei der einmaligen Ausführung eines Experimentes tritt ein Ereignis mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ein

$$A \in \mathscr{A}\,, \quad \mathbb{P}(A) = p \in [0,1]\,;$$

dabei verbindet man das Eintreten des Ereignisses mit Erfolg und das Eintreten des Komplementärereignisses mit Mißerfolg, d.h. man definiert eine reellwertige Zufallsvariable durch

$$Z_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto \begin{cases} 1\,, & \omega \in A\,, \\ 0\,, & \omega \notin A\,. \end{cases}$$

Der Index steht dabei für die erstmalige Ausführung des Experimentes; offensichtlich ergibt die Berechnung von Erwartungswert und Varianz

$$E(Z_1) = \sum_{\omega\in\Omega} Z_1(\omega)\,\mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = \sum_{z\in\mathbb{R}} z\,\mathbb{P}\Big(Z_1^{-1}\big(\{z\}\big)\Big) = \sum_{z\in\{0,1\}} z\,\mathbb{P}\Big(Z_1^{-1}\big(\{z\}\big)\Big) = \mathbb{P}\Big(Z_1^{-1}\big(\{1\}\big)\Big) = \mathbb{P}(A) = p\,,$$
$$Z_1^2 = Z_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto \big(Z_1(\omega)\big)^2 = Z_1(\omega)\,,$$
$$V(Z_1) = E\big(Z_1^2\big) - \big(E(Z_1)\big)^2 = p - p^2 = p\,(1-p)\,.$$

Nun untersucht man die Versuchsausgänge bei insgesamt N-facher Wiederholung des Zufallsexperimentes und definiert dazu die identisch verteilten Zufallsvariablen

$$Z_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto \begin{cases} 1\,, & \omega \in A \text{ bei } n\text{-ter Durchführung}\,, \\ 0\,, & \omega \notin A \text{ bei } n\text{-ter Durchführung}\,, \end{cases}$$
$$E(Z_n) = p\,, \quad V(Z_n) = p\,(1-p)\,,$$
$$n \in \{1, \dots, N\}\,;$$

man setzt dabei voraus, daß das Experiment unter denselben Bedingungen ausgeführt wird, also paarweise stochastische Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $Z_1, \dots, Z_N$ gegeben ist. Das arithmetische Mittel gibt die relative Häufigkeit für das Eintreten des Ereignisses A bei N-facher Ausführung des Experimentes an; wie zuvor begründet, erfüllt es die Relationen

$$Z = \tfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$
$$E(Z) = E(Z_n) = p\,, \quad V(Z) = \tfrac{1}{N}\,V(Z_n) = \tfrac{1}{N}\,p\,(1-p)\,,$$
$$n \in \{1, \dots, N\}\,.$$

Da der Graph der auftretenden quadratische Polynomfunktion einer nach unten geöffneten Parabel entspricht, zeigen einfache Symmetrieüberlegungen oder Methoden der Differentialrechnung, daß ein globales Maximum existiert und somit die Abschätzung

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : p \longmapsto p\,(1-p)\,, \quad f(0) = 0 = f(1)\,,$$
$$f'(p) = 1 - 2\,p\,, \quad f'\big(\tfrac{1}{2}\big) = 0\,, \quad f''(p) = -2 < 0\,, \quad p \in (0,1)\,,$$
$$f(p) \leq \max_{p \in [0,1]} f(p) = f\big(\tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{1}{4}\,, \quad p \in [0,1]\,,$$

gültig ist, vergleiche Abbildung 5.9. Ähnlich wie zuvor erhält man mit Hilfe der Ungleichung von Chebyshev die Abschätzung

$$\mathbb{P}\bigg(\bigg\{\omega \in \Omega : \tfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_n(\omega) \in (-\infty, p-\varepsilon] \cup [p+\varepsilon, \infty)\bigg\}\bigg) \leq \tfrac{1}{N\varepsilon^2}\,p\,(1-p) \leq \tfrac{1}{4N\varepsilon^2}\,,$$
$$\mathbb{P}\bigg(\bigg|\tfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_n - p\bigg| \geq \varepsilon\bigg) \leq \tfrac{1}{4N\varepsilon^2}\,,$$

und folglich das als *Bernoullisches Gesetz der großen Zahlen* bekannte Resultat.

Resultat (Bernoullisches Gesetz der großen Zahlen). Für paarweise stochastisch unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen

$$A \in \mathscr{A}\,, \quad \mathbb{P}(A) = p \in [0,1]\,,$$
$$Z_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \longmapsto \begin{cases} 1\,, & \omega \in A \text{ bei } n\text{-ter Durchführung}\,, \\ 0\,, & \omega \notin A \text{ bei } n\text{-ter Durchführung}\,, \end{cases}$$
$$E(Z_n) = p\,, \quad V(Z_n) = p\,(1-p)\,,$$
$$n \in \{1, \dots, N\}\,,$$

welche das Eintreten eines Ereignisses $A \in \mathscr{A}$ in der n-ten Durchführung eines Zufallsexperimentes beschreiben, erfüllt das arithmetische Mittel, welches die entsprechende relative Häufigkeit für das Eintreten des Ereignisses angibt, für beliebiges $\varepsilon > 0$ die Relation

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Z_n - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4N\varepsilon^2},$$

und somit gilt für den Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Z_n - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

4.3 Grenzwertsätze

Grenzwertsätze. Unter gewissen Voraussetzungen ist es sinnvoll, Binomialverteilungen

$$Z \sim \mathrm{Bin}(N,p)\,, \quad N \in \mathbb{N}\,, \quad p \in [0,1]\,,$$
$$E(Z) = Np\,, \quad V(Z) = Np\,(1-p)\,,$$

durch Normalverteilungen zu approximieren, vergleiche Kapitel 3.3 und 3.4. Ein als *lokaler Grenzwertsatz von de Moivre–Laplace* bekanntes Resultat präzisiert die betrachtete Situation; durch Summation und Integration folgt daraus ein globales Approximationsresultat. Die Annahmen

$$Np \geq 5\,, \quad N(1-p) \geq 5\,, \quad N \in \mathbb{N}\,, \quad p \in [0,1]\,,$$
$$p = \tfrac{1}{2}: \quad N \geq 10\,,$$

gelten dabei als Faustregel.

Resultat (Approximationssatz)**.** Es sei $Z: \Omega \to \mathbb{R}$ eine binomialverteilte Zufallsvariable

$$Z \sim \mathrm{Bin}(N,p)\,, \quad N \in \mathbb{N}\,, \quad p \in [0,1]\,.$$

(i) *Lokaler Grenzwertsatz von de Moivre–Laplace.* Betreffend die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer binomialverteilten Zufallsvariable gilt folgende punktweise Approximation durch die Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsvariable mit entsprechendem Erwartungswert und Varianz

$$N\big(\mu,\sigma^2\big)\,, \quad \mu = E(Z) = Np\,, \quad \sigma^2 = V(Z) = Np\,(1-p)\,,$$
$$\varrho_{\mathrm{Bin}(N,p)}(k) = \binom{N}{k} p^k\,(1-p)^{N-k} \approx \varrho_{\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)}(k) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\mathrm{e}^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,, \quad k \in \{0,\dots,N\}\,.$$

(ii) *Globale Approximation.* Es seien $K_0, K \in \{0,1,\dots,N\}$ mit $K_0 < K$.

(a) *Naheliegende Approximation.* Durch Summation bzw. Integration erhält man Approximationen für Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}\big(Z \in [K_0,K]\big) = \mathbb{P}\Big(Z^{-1}\big([K_0,K]\big)\Big) = \sum_{k=K_0}^{K} \varrho_{\mathrm{Bin}(N,p)}(k)$$
$$\approx \int_{(K_0,K)} \varrho_{\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\left(\frac{K_0-\mu}{\sigma},\frac{K-\mu}{\sigma}\right)} \mathrm{e}^{-\frac{\zeta^2}{2}}\,\mathrm{d}\zeta = \Phi\big(\tfrac{K-\mu}{\sigma}\big) - \Phi\big(\tfrac{K_0-\mu}{\sigma}\big)\,.$$

(b) *Stetigkeitskorrektur.* Es zeigt sich, daß es von Vorteil ist, eine als *Stetigkeitskorrektur* bekannte Modifikation zu berechnen. Man kann dies anschaulich so verstehen, daß eine Riemann-Summe betrachtet wird, welche folgende Knoten und Stützstellen hat

$$\begin{gathered}
J = K - K_0 + 1\,, \\
\xi_j = K_0 + j - 1\,, \quad j \in \{1, \dots, J\}\,, \quad \xi_1 = K_0\,, \quad \xi_J = K_0 + J - 1 = K\,, \\
x_j = \xi_{j+1} - \tfrac{1}{2}\,, \quad j \in \{0, 1, \dots, J-1\}\,, \quad x_J = \xi_J + \tfrac{1}{2} = K + \tfrac{1}{2}\,, \\
x_j - x_{j-1} = 1\,, \quad j \in \{1, \dots, J\}\,, \\
\sum_{k=K_0}^{K} \varrho_{\mathrm{Bin}(N,p)}(k) = \sum_{j=1}^{J} \varrho_{\mathrm{Bin}(N,p)}(\xi_j)\,(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{J} \varrho_{\mathrm{Bin}(N,p)}(\xi_j)\,;
\end{gathered}$$

das ursprüngliche Intervall wird deshalb durch ein vergrößertes Intervall ersetzt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(Z \in [K_0, K]\big) &= \sum_{k=K_0}^{K} \varrho_{\mathrm{Bin}(N,p)}(k) \\
&\approx \int_{(K_0 - \frac{1}{2}, K + \frac{1}{2})} \varrho_{\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \Phi\Big(\tfrac{K + \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\tfrac{K_0 - \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}\Big)\,, \quad K_0, K \in \{0, 1, \dots, N\}\,.
\end{aligned}$$

Illustration. Für die Spezialfälle

$$\begin{gathered}
p = \tfrac{1}{2}\,, \quad \mu = \tfrac{N}{2}\,, \quad \sigma^2 = \tfrac{N}{4}\,, \\
N \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20, 25\}\,,
\end{gathered}$$

sind die Graphen von Dichtefunktionen der Binomialverteilung und der entsprechenden Normalverteilungen zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in Abbildungen 5.10 und 5.11 illustriert; Abbildung 5.12 veranschaulicht die Approximationsfehler.

Erinnerung. An dieser Stelle sei an elementare Relationen für Erwartungswert und Varianz erinnert

$$\begin{gathered}
Z_1, Z_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,, \\
E(c) = c\,, \\
V(c) = E\big(c^2\big) - \big(E(c)\big)^2 = 0\,, \\
E(cZ) = c\,E(Z)\,, \\
V(cZ) = E\big(c^2 Z^2\big) - \big(E(cZ)\big)^2 = c^2 E\big(Z^2\big) - \big(c\,E(Z)\big)^2 = c^2 \Big(E\big(Z^2\big) - \big(E(Z)\big)^2\Big) = c^2\,V(Z)\,, \\
E(Z + c) = E(Z) + c\,, \\
V(Z + c) = E\big(Z^2 + 2\,c\,Z + c^2\big) - \big(E(Z) + c\big)^2 = E\big(Z^2\big) - \big(E(Z)\big)^2 = V(Z)\,, \\
E(Z_1 + Z_2) = E(Z_1) + E(Z_2)\,, \\
V(Z_1 + Z_2) = E\big((Z_1 + Z_2)^2\big) - \big(E(Z_1 + Z_2)\big)^2 = V(Z_1) + V(Z_2) + 2\,\big(E(Z_1\,Z_2) - E(Z_1)\,E(Z_2)\big)\,, \\
Z_1, Z_2 \ \text{stochastisch unabhängig}\,, \quad E(Z_1\,Z_2) = E(Z_1)\,E(Z_2)\,, \\
V(Z_1 + Z_2) = V(Z_1) + V(Z_2)\,,
\end{gathered}$$

vergleiche Kapitel 2.7.

Verallgemeinerung. Das zuvor angegebene Resultat läßt sich in folgender Art und Weise erweitern; eine Faustregel besagt, daß $N \geq 30$ Summanden betrachtet werden sollten. Ausgehend von reellwertigen Zufallsvariablen mit den Eigenschaften

$$Z_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad E(Z_n) = \mu\,, \quad V(Z_n) = \sigma^2\,, \quad n \in \{1, \dots, N\}\,,$$

erkennt man als geeignete Verschiebung und Skalierung

$$E(Z_n - \mu) = 0\,, \quad E\big(\tfrac{1}{\sigma}(Z_n - \mu)\big) = 0\,, \quad V\big(\tfrac{1}{\sigma}(Z_n - \mu)\big) = 1\,, \quad n \in \{1, \dots, N\}\,;$$

aufgrund der geforderten paarweisen stochastischen Unabhängigkeit zeigt dies

$$E\bigg(\tfrac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{\sigma}(Z_n - \mu)\bigg) = 0\,, \quad V\bigg(\tfrac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{\sigma}(Z_n - \mu)\bigg) = \tfrac{1}{N}\, V\bigg(\sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{\sigma}(Z_n - \mu)\bigg) = 1\,,$$

vergleiche Erinnerung und Erklärung.

Resultat (Zentraler Grenzwertsatz von Lindeberg–Levy)**.** Für paarweise stochastisch unabhängige und identisch verteilte reellwertige Zufallsvariablen ist die *standardisierte Summe* näherungsweise standardnormalverteilt

$$Z_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad E(Z_n) = \mu\,, \quad V(Z_n) = \sigma^2\,, \quad n \in \{1, \dots, N\}\,,$$
$$S_N = \tfrac{1}{\sqrt{N}\sigma} \bigg(\sum_{n=1}^{N} Z_n - N\mu\bigg) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad E(S_N) = 0\,, \quad V(S_N) = 1\,,$$
$$S_N \approx S \sim N(0,1)\,;$$

genauer, die Verteilungsfunktion von S_N konvergiert für $N \to \infty$ punktweise gegen die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

$$\Psi_N : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] : z \longmapsto \Psi_N(z) = \mathbb{P}\Big(S_N^{-1}\big((-\infty, z)\big)\Big)\,,$$
$$\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] : z \longmapsto \Phi(z) = \mathbb{P}\Big(Z_0^{-1}\big((-\infty, z)\big)\Big) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(-\infty,z)} \mathrm{e}^{-\frac{\zeta^2}{2}}\, \mathrm{d}\zeta\,,$$
$$\lim_{N \to \infty} \Psi_N(z) = \Phi(z)\,, \quad z \in \mathbb{R}\,.$$

In diesem Sinn gelten die Approximationen

$$S_N = \tfrac{1}{\sqrt{N}\sigma} \bigg(\sum_{n=1}^{N} Z_n - N\mu\bigg) \approx N(0,1)\,,$$
$$\sum_{n=1}^{N} Z_n = N\mu + \sqrt{N}\sigma\, S_N \approx N\big(N\mu, N\sigma^2\big)\,,$$
$$\tfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_n = \mu + \tfrac{1}{\sqrt{N}}\sigma\, S_N \approx N\big(\mu, \tfrac{\sigma^2}{N}\big)\,.$$

Erklärung. Die zuvor angegebenen Relationen erklären die gewählte Skalierung

$$E(S_N) = \frac{1}{\sqrt{N}\sigma} E\left(\sum_{n=1}^{N} Z_n - N\mu\right) = \frac{1}{\sqrt{N}\sigma}\left(\sum_{n=1}^{N} E(Z_n) - N\mu\right) = 0\,,$$
$$V\left(\sum_{n=1}^{N} Z_n\right) = \sum_{n=1}^{N} V(Z_n) = N\sigma^2\,,$$
$$V(S_N) = \frac{1}{N\sigma^2} V\left(\sum_{n=1}^{N} Z_n - N\mu\right) = \frac{1}{N\sigma^2}\sum_{n=1}^{N} V(Z_n) = 1\,.$$

Für eine Herleitung des Resultates sei auf die angegebene Literatur verwiesen. ◇

Kapitel 5

Graphiken und Implementierungen

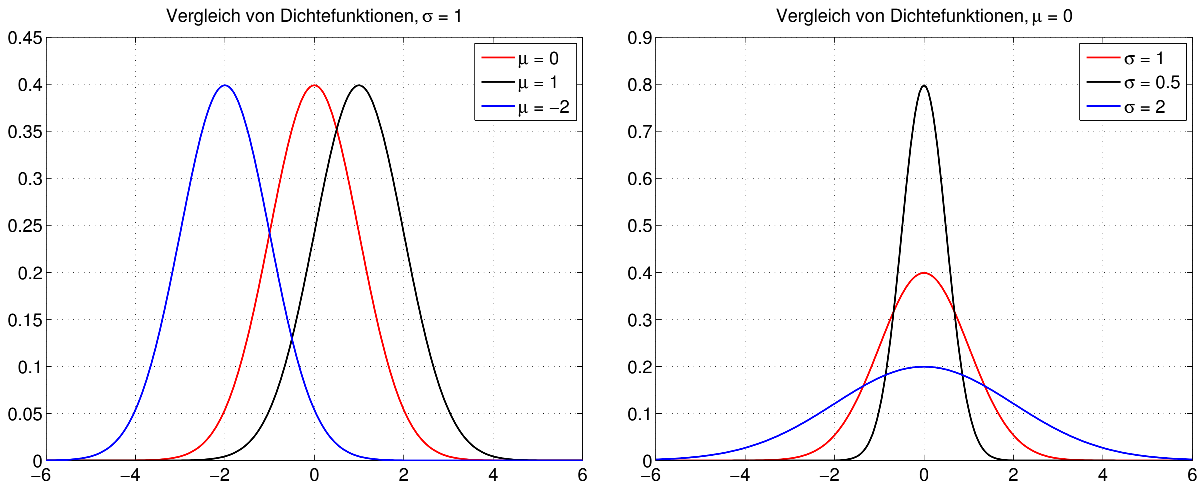


Abbildung 5.1: Gauß-Maß. Graphische Darstellung zugehöriger Dichtefunktionen.

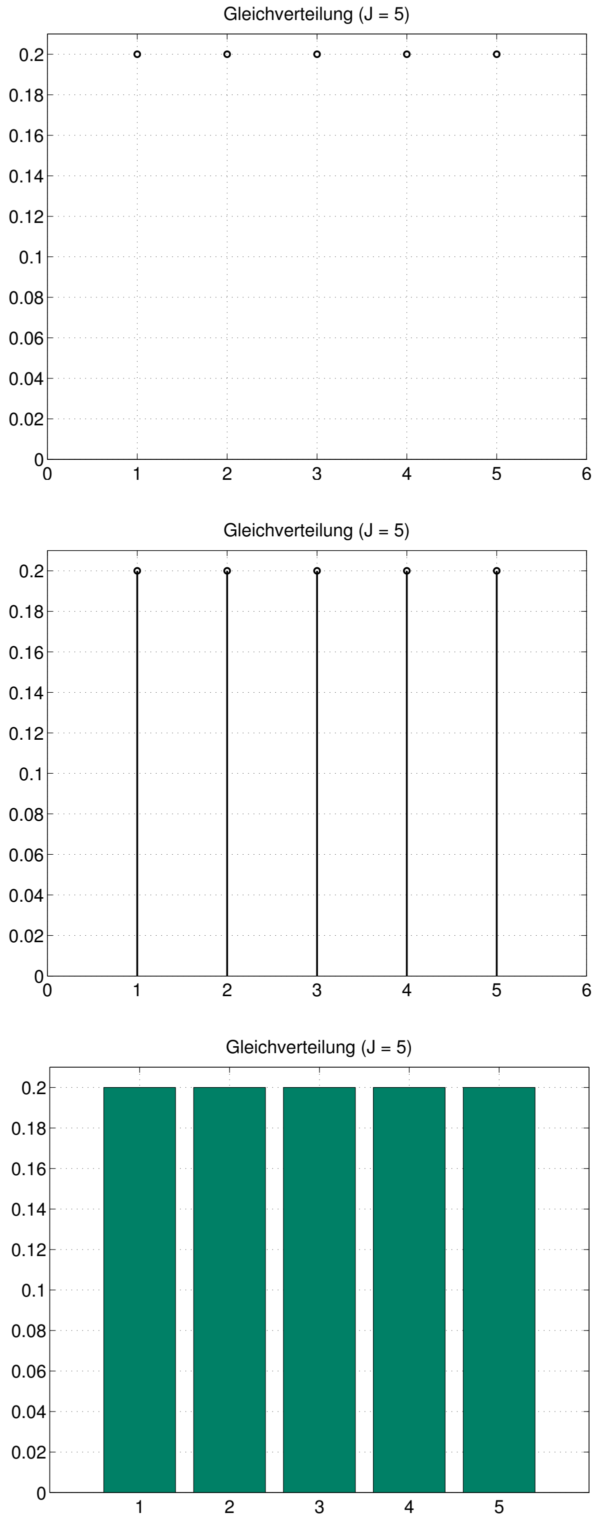


Abbildung 5.2: Graph der Dichtefunktion einer Gleichverteilung ($J = 5$). Unterschiedliche Darstellungsformen u.a. mittels Stabdiagramm (rechte Graphik).

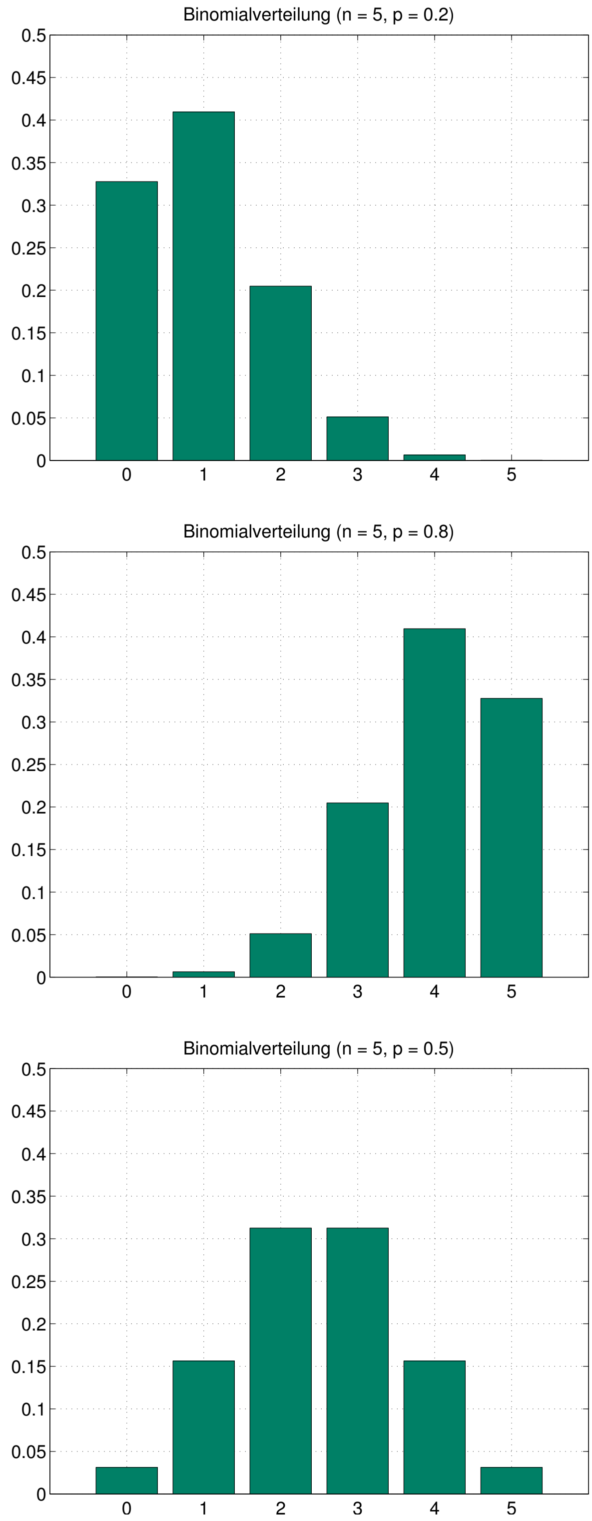


Abbildung 5.3: Graphen der Dichtefunktionen von Binomialverteilungen ($n = 5$).

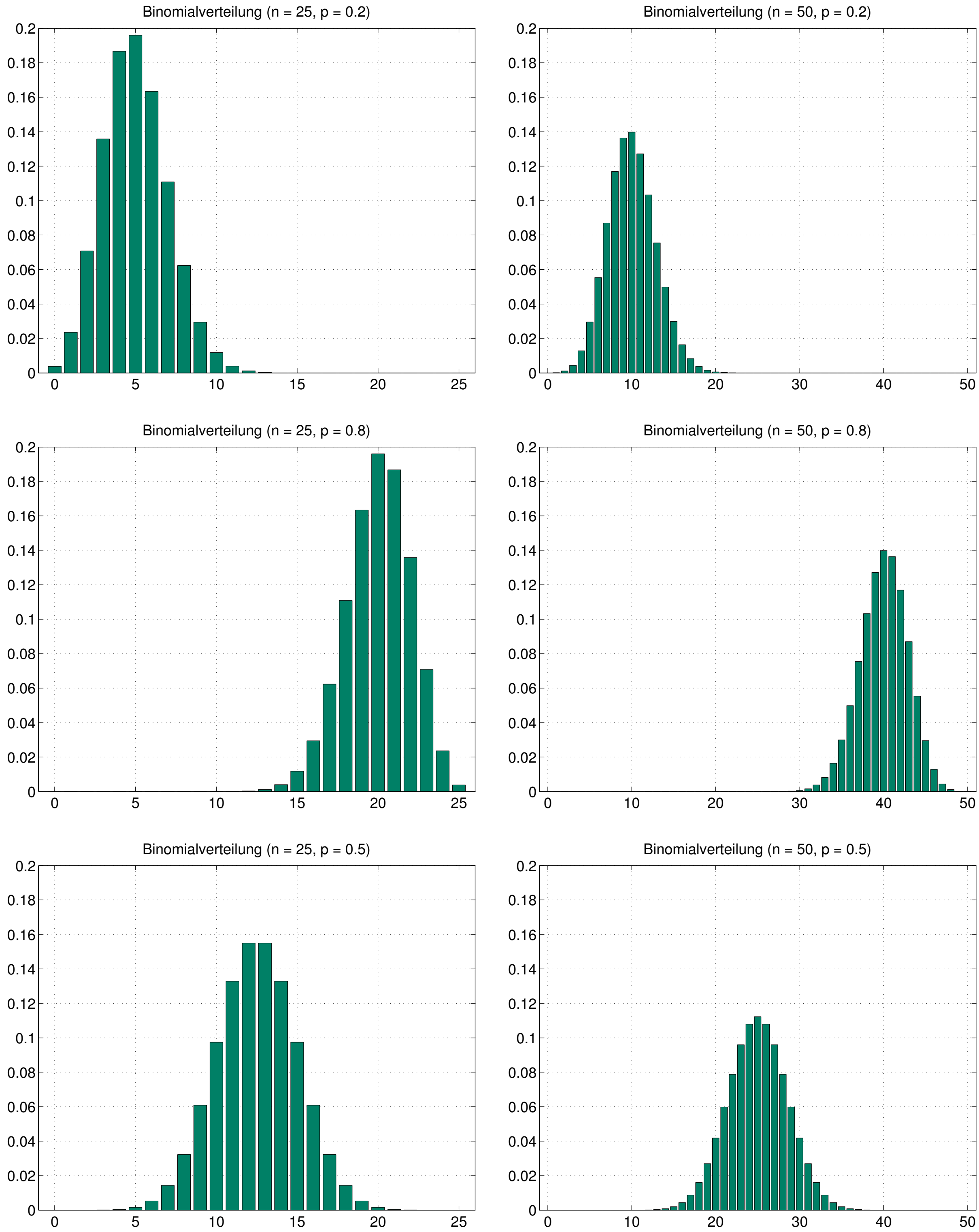


Abbildung 5.4: Graphen der Dichtefunktionen von Binomialverteilungen ($n \in \{25, 50\}$).

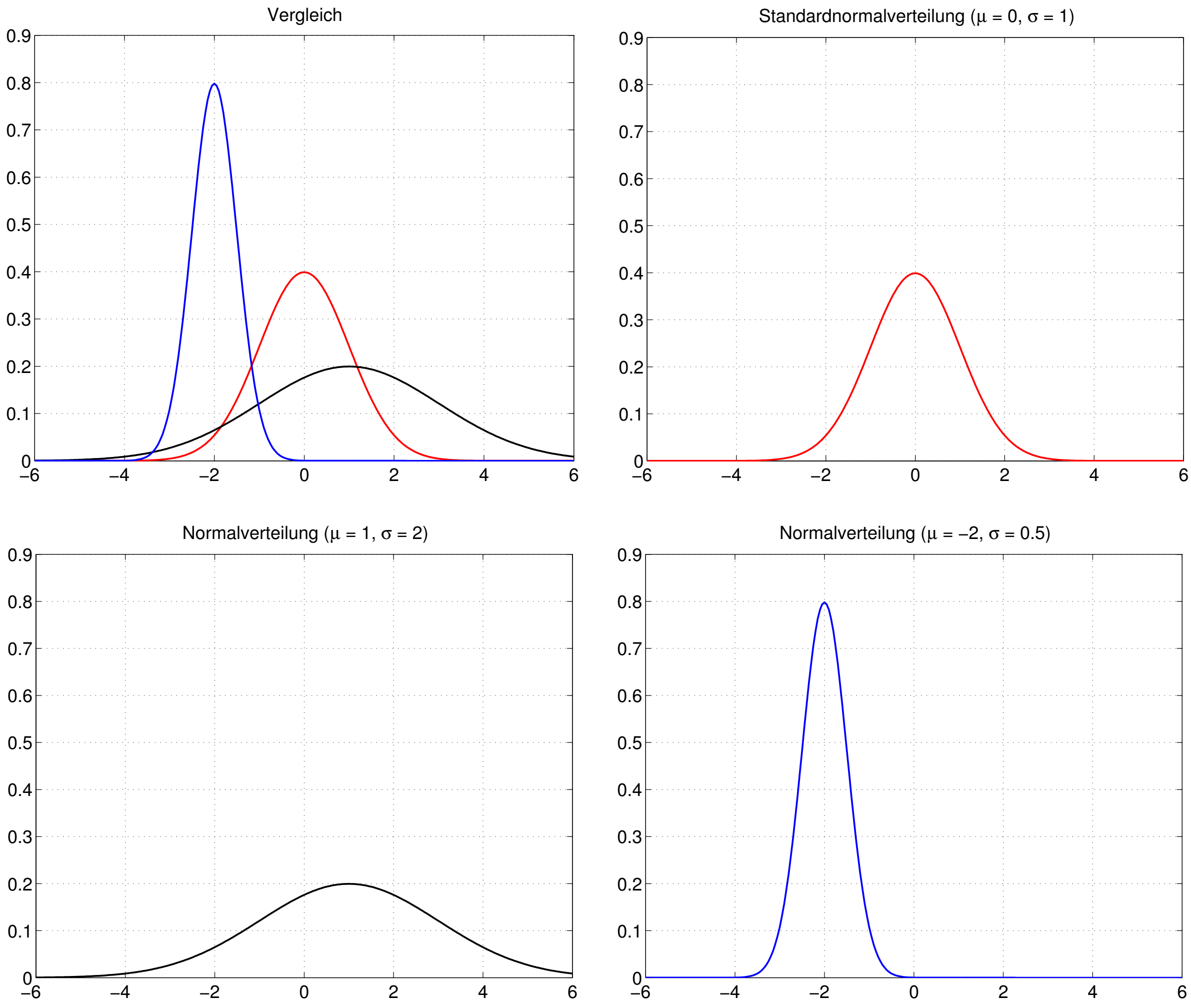


Abbildung 5.5: Graphen der Dichtefunktionen von Normalverteilungen.

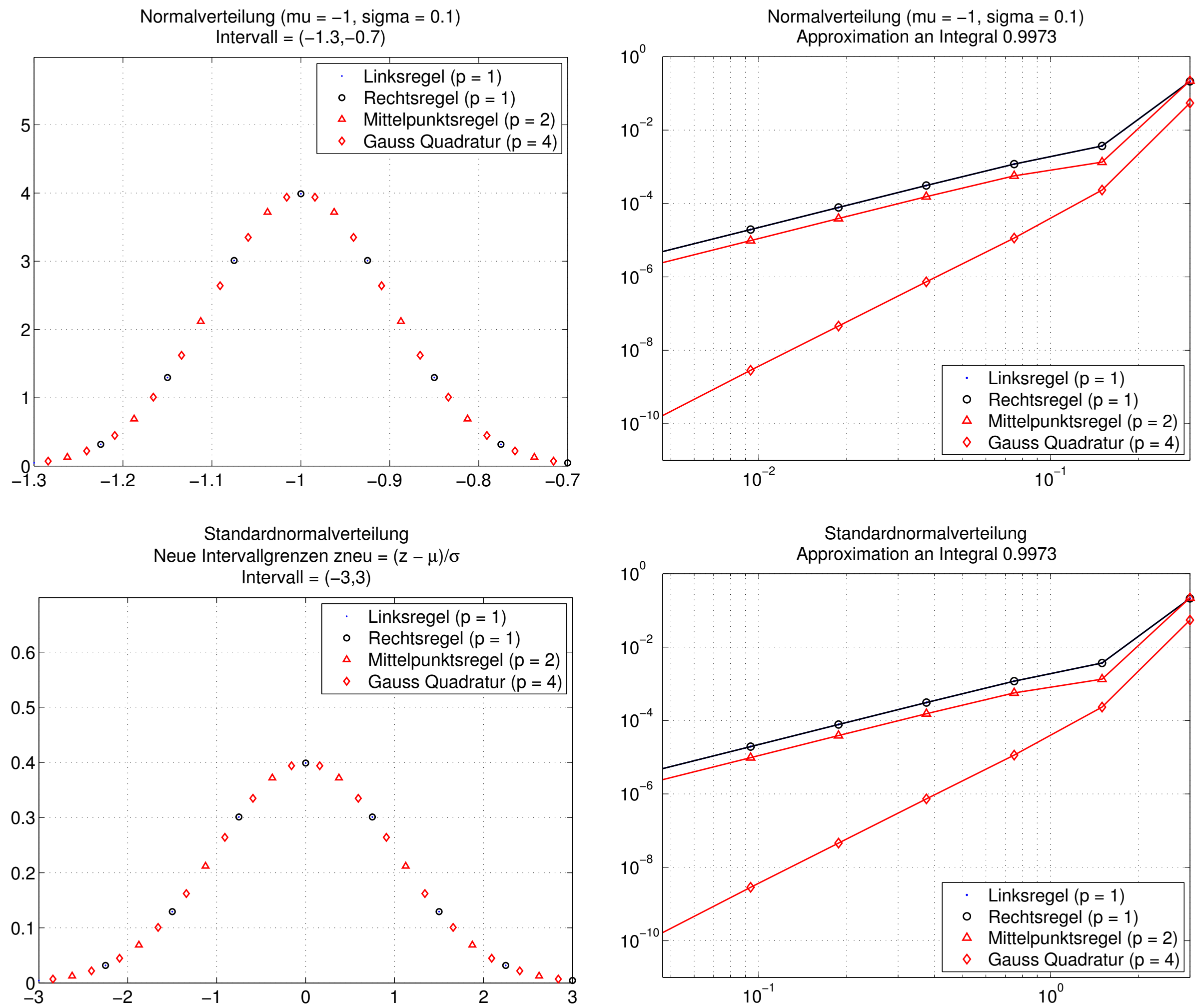


Abbildung 5.6: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mittels numerischer Integration. Reduktion von Normalverteilung auf Standardnormalverteilung.

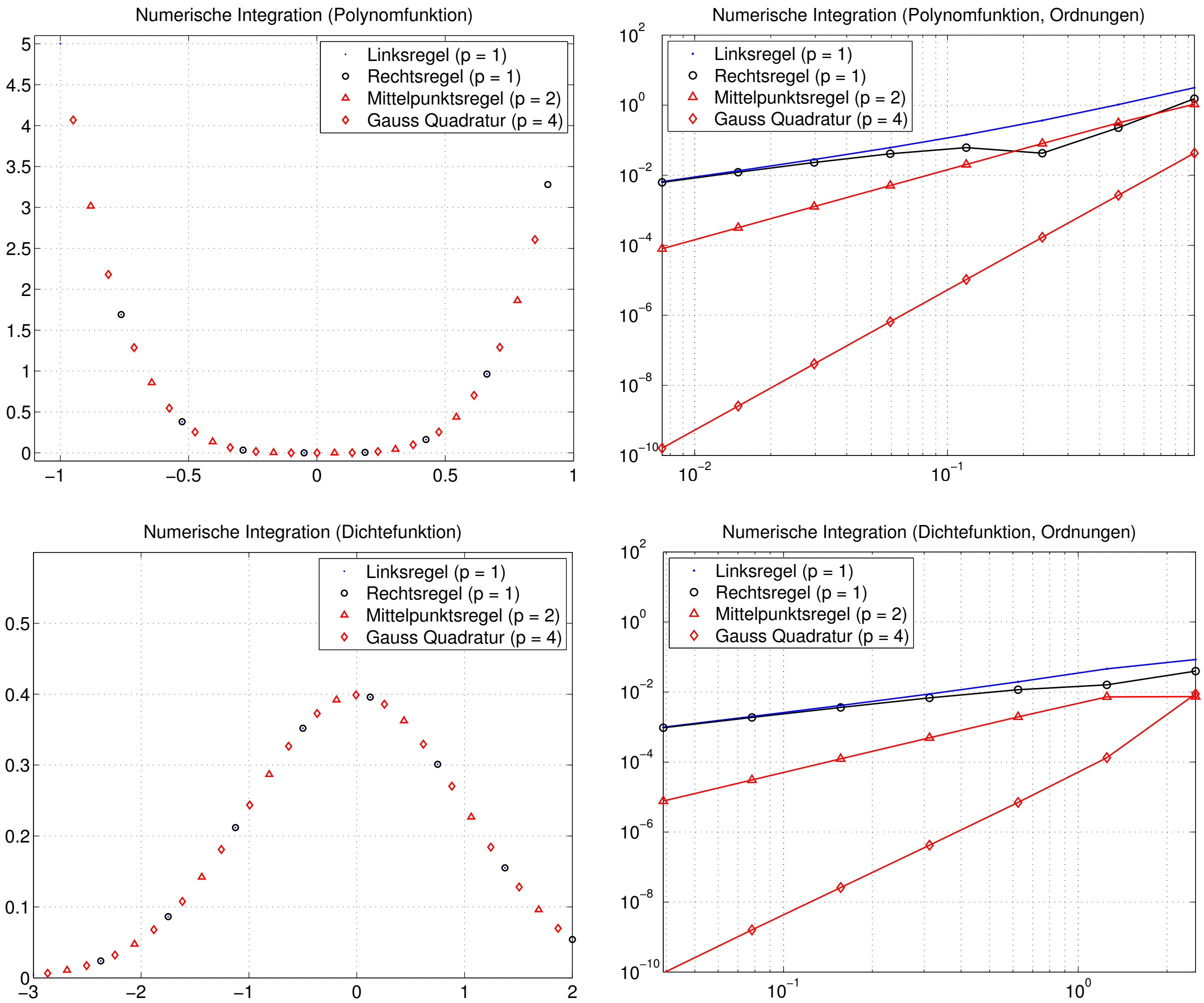


Abbildung 5.7: Numerische Integration für Polynomfunktion und Dichtefunktion der Standardnormalverteilung.

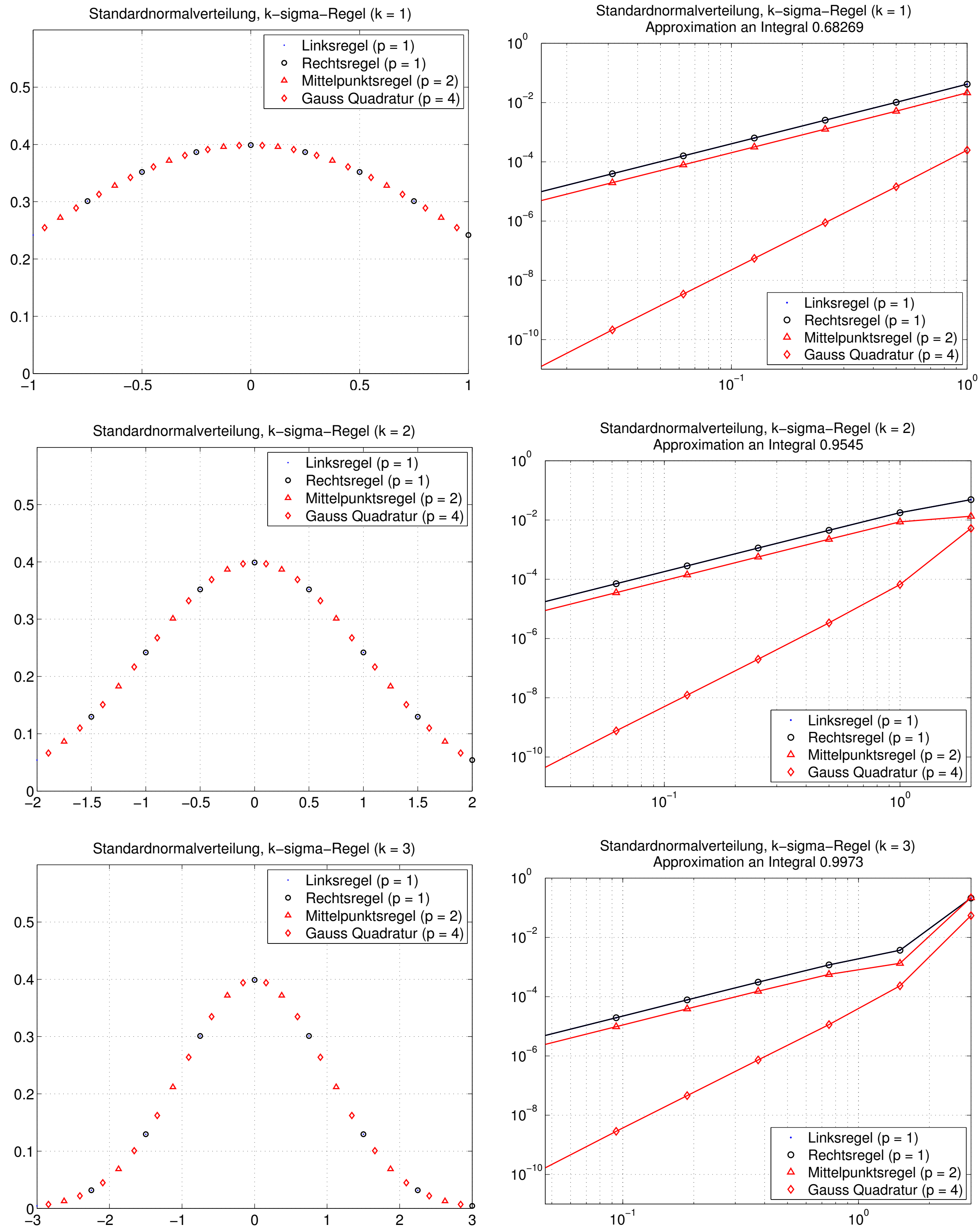


Abbildung 5.8: Verifizierung der k-σ-Regeln für Standardnormalverteilung mittels numerischer Integration.

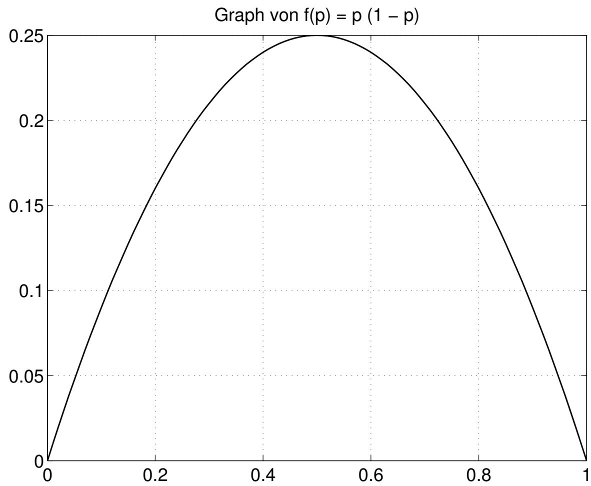


Abbildung 5.9: Graph und Maximum der Polynomfunktion $f : [0,1] \to \mathbb{R} : p \mapsto p\,(1-p)$

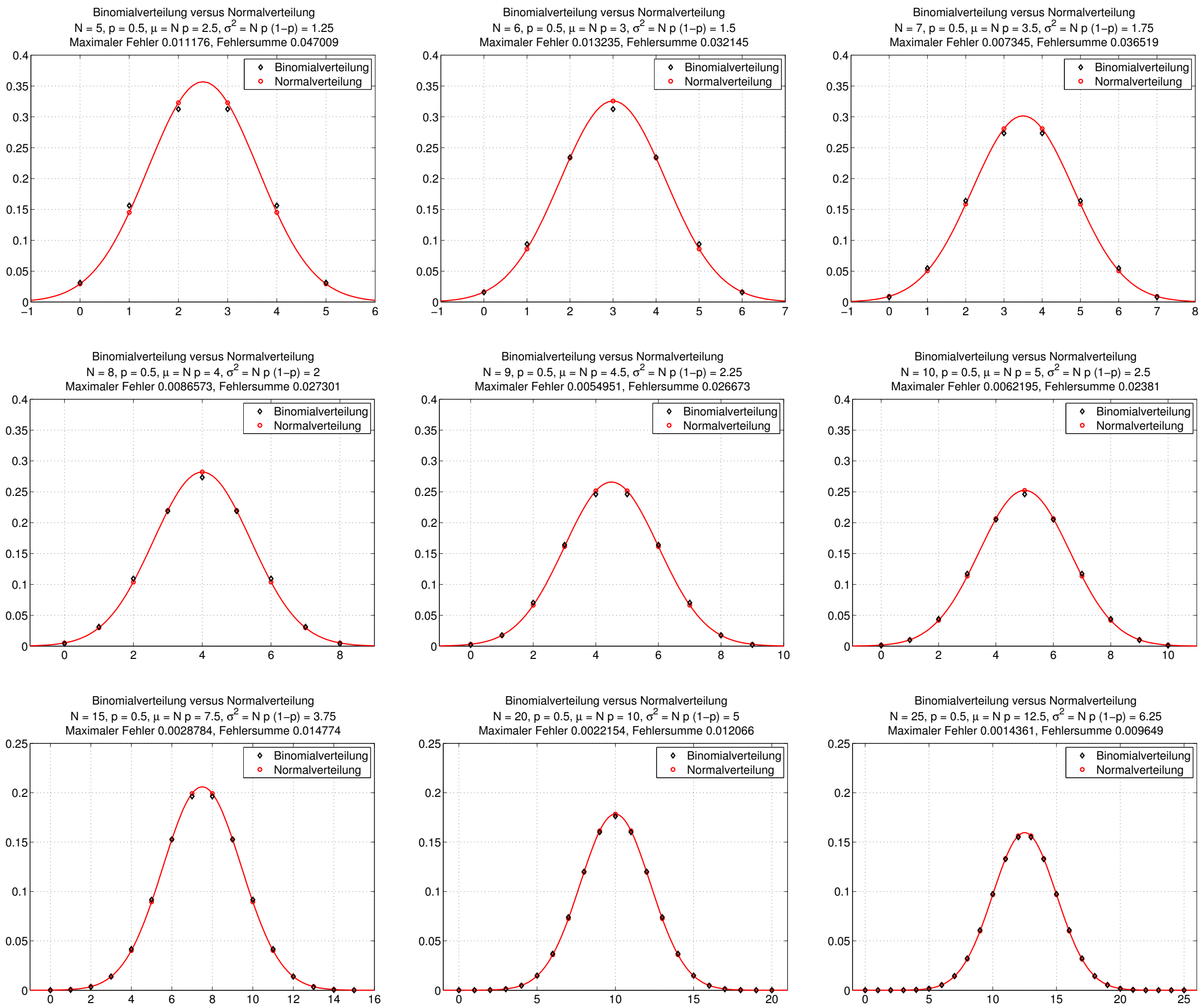


Abbildung 5.10: Graphen der Dichtefunktionen von Binomialverteilungen und Approximationen durch Normalverteilungen.

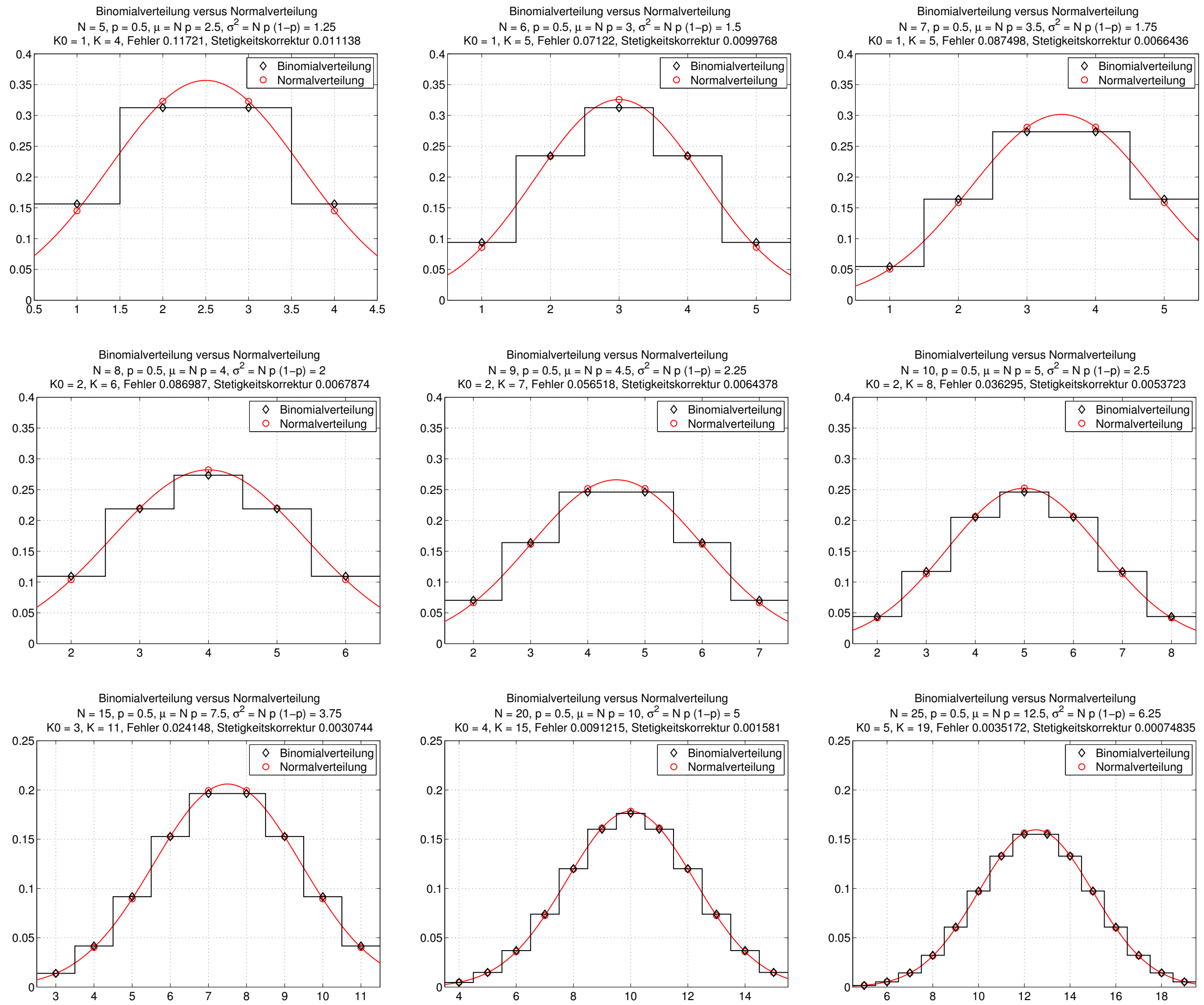


Abbildung 5.11: Graphen der Dichtefunktionen von Binomialverteilungen und Approximationen durch Normalverteilungen. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mittels Stetigkeitskorrektur.

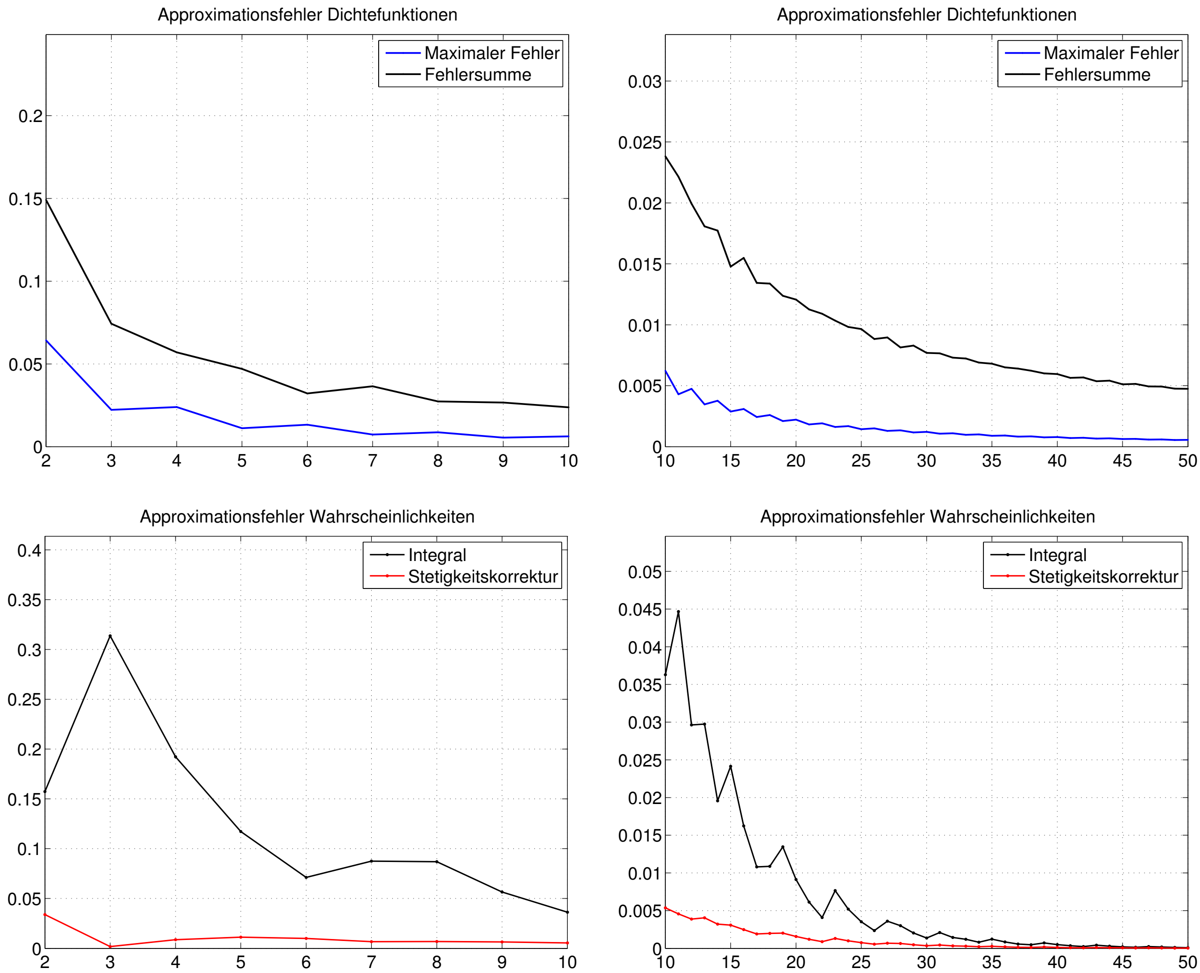


Abbildung 5.12: Binomialverteilungen mit Parameter N und $p = \frac{1}{2}$. Approximationsfehler entsprechender Normalverteilungen in Abhängigkeit von N.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Kombinatorik
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
clc

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Variationen / Permutationen (n-Tupel)
% Variationen / Kombinationen (k-Tupel)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

n = 10

VariationenMitWiederholungSpezialfall = n^n
% Permutationen ohne Wiederholung
VariationenOhneWiederholungSpezialfall = factorial(n)
k = [1,2,3,4];
if abs(n - sum(k)) > 0
    error('Inkonsistenz')
end

Faktorielle = 1;
for j = 1:length(k)
    Faktorielle = Faktorielle*factorial(k(j));
end
PermutationenMitWiederholung = factorial(n)/Faktorielle

pause

for k = 1:n
    clc
    n = 10
    Tupel = k
    VariationenMitWiederholung = n^k
    VariationenOhneWiederholung = factorial(n)/factorial(n-k)
    KombinationenMitWiederholung ...
        = factorial(n+k-1)/(factorial(k)*factorial(n-1))
    KombinationenOhneWiederholung ...
        = factorial(n)/(factorial(k)*factorial(n-k))
    pause
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Kombinatorik (n-Tupel)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
clc

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Variationen mit Wiederholung (Spezialfall k = n)
% Ziehen unterscheidbarer Kugeln mit Zuruecklegen (n Kugeln aus n Kugeln)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

disp('1. Variationen mit Wiederholung (Spezialfall k = n)')
n = 3

% Bestimmung der Elementarereignisse
Element = [10,20,30];
counter = 0;
for i1 = 1:n
    for i2 = 1:n
        for i3 = 1:n
            counter = counter + 1;
            omega{counter} = [Element(i1),Element(i2),Element(i3)];
        end
    end
end
% Ausgabe
for j = 1:counter
    Zaehler = j
    Elementarereignis = omega{j}
end

VariationenMitWiederholungSpezialfall = n^n

pause

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Permutationen ohne Wiederholung
% Variationen ohne Wiederholung (Spezialfall k = n)
% Ziehen unterscheidbarer Kugeln ohne Zuruecklegen (n Kugeln aus n Kugeln)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
clc

disp('2. Permutationen ohne Wiederholung')
disp('Variationen ohne Wiederholung (Spezialfall k = n)')
n = 3

% Bestimmung der Elementarereignisse
Element = [10,20,30];
counter = 0;
for i1 = 1:n
    for i2 = 1:n
        for i3 = 1:n
            if i2 == i1 | i3 == i1 | i3 == i2
                % nichts tun
            else
```

```
                counter = counter + 1;
                omega{counter} = [Element(i1),Element(i2),Element(i3)];
            end
        end
    end
end
% Ausgabe
for j = 1:counter
    Zaehler = j
    Elementarereignis = omega{j}
end

VariationenOhneWiederholungSpezialfall = factorial(n)

pause

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Permutationen mit Wiederholung
% Ziehen nicht notwendigerweise unterscheidbarer Kugeln ohne Zuruecklegen
% (n Kugeln aus n Kugeln)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
clc

disp('3. Variationen mit Wiederholung (Spezialfall k = n)')
n = 3
k1 = 1;
k2 = 2;

% Bestimmung der Elementarereignisse
Element = [10,20,20];
A = [];
for i1 = 1:n
    for i2 = 1:n
        for i3 = 1:n
            if i2 == i1 | i3 == i1 | i3 == i2
                % nichts tun
            else
                Indizes = [i1,i2,i3];
                NeuesElement = [Element(i1),Element(i2),Element(i3)];
                A = [A;NeuesElement];
            end
        end
    end
end
A

% Redundanzen von erster Zeile weglassen
Behalten = [1];
for j = 2:size(A,1)
    if abs(max(A(j,:) - A(1,:))) > 0
        Behalten = [Behalten,j];
    end
end
Behalten
A = A(Behalten,:)

% Redundanzen von zweiter Zeile weglassen
Behalten = [1,2];
```

```
for j = 3:size(A,1)
    if abs(max(A(j,:) - A(2,:))) > 0
        Behalten = [Behalten,j];
    end
end
Behalten
A = A(Behalten,:)

% Redundanzen von dritter Zeile weglassen
Behalten = [1,2,3];
for j = 4:size(A,1)
    if abs(max(A(j,:) - A(3,:))) > 0
        Behalten = [Behalten,j];
    end
end
Behalten
A = A(Behalten,:)

% Ausgabe
for j = 1:size(A,1)
    Zaehler = j
    Elementarereignis = A(j,:)
end

PermutationenMitWiederholung = factorial(n)/(factorial(k1)*factorial(k2))

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Kombinatorik (n-Tupel)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
clc

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Variationen mit Wiederholung (Spezialfall k = n)
% Ziehen unterscheidbarer Kugeln mit Zuruecklegen (n Kugeln aus n Kugeln)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

disp('1. Variationen mit Wiederholung (Spezialfall k = n)')
n = 5

% Bestimmung der Elementarereignisse
Element = [10:10:n*10];
counter = 0;
for i1 = 1:n
    for i2 = 1:n
        for i3 = 1:n
            for i4 = 1:n
                for i5 = 1:n
                    counter = counter + 1;
                    omega{counter} = [Element(i1),Element(i2),...
                        Element(i3),Element(i4),Element(i5)];
                end
            end
        end
    end
end
% Ausgabe
for j = 1:counter
    Zaehler = j
    Elementarereignis = omega{j}
end

VariationenMitWiederholungSpezialfall = n^n

pause

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Permutationen ohne Wiederholung
% Variationen ohne Wiederholung (Spezialfall k = n)
% Ziehen unterscheidbarer Kugeln ohne Zuruecklegen (n Kugeln aus n Kugeln)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
clc

disp('2. Permutationen ohne Wiederholung')
disp('Variationen ohne Wiederholung (Spezialfall k = n)')
n = 5

% Bestimmung der Elementarereignisse
Element = [10:10:n*10];
counter = 0;
for i1 = 1:n
```

```
    for i2 = 1:n
        for i3 = 1:n
            for i4 = 1:n
                for i5 = 1:n
                    if i2 == i1 | i3 == i1 | i4 == i1 | i5 == i1 ...
                            | i3 == i2 | i4 == i2 | i5 == i2 ...
                            | i4 == i3 | i5 == i3 ...
                            | i5 == i4
                    else
                        counter = counter + 1;
                        omega{counter} = [Element(i1),Element(i2),...
                            Element(i3),Element(i4),Element(i5)];
                    end
                end
            end
        end
    end
end
% Ausgabe
for j = 1:counter
    Zaehler = j
    Elementarereignis = omega{j}
end

VariationenOhneWiederholungSpezialfall = factorial(n)

pause

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Permutationen mit Wiederholung
% Ziehen nicht notwendigerweise unterscheidbarer Kugeln ohne Zuruecklegen
% (n Kugeln aus n Kugeln)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
clc

disp('3. Permutationen mit Wiederholung (Spezialfall k = n)')
k = [1,2,1,2];
n = sum(k)
if abs(n - sum(k)) > 0
    error('Implementierung fuer n = 6')
end

% Bestimmung der Elementarereignisse
Element = [];
for j = 1:length(k)
    Element = [Element,j*10*ones(1,k(j))];
end
Element
pause

A = [];
for i1 = 1:n
for i2 = 1:n
for i3 = 1:n
for i4 = 1:n
for i5 = 1:n
for i6 = 1:n
    if i2 == i1 | i3 == i1 | i4 == i1 | i5 == i1 | i6 == i1 ...
```

```
        | i3 == i2 | i4 == i2 | i5 == i2 | i6 == i2 ...
        | i4 == i3 | i5 == i3 | i6 == i3 ...
        | i5 == i4 | i6 == i4 ...
        | i6 == i5
    % nichts tun
    else
        Indizes = [i1,i2,i3,i4,i5,i6];
        A = [A;Element(i1),Element(i2),Element(i3),...
               Element(i4),Element(i5),Element(i6)];
    end
end
end
end
end
end
end

Zwischenergebnis = size(A,1)
pause

% Redundante Zeilen weglassen
zeile = 0;
while zeile < size(A,1)
    zeile = zeile + 1;
    Behalten = 1:zeile;
    for j = zeile+1:size(A,1)
        if abs(max(A(j,:) - A(zeile,:))) > 0
            Behalten = [Behalten,j];
        end
    end
    A = A(Behalten,:);
    Zwischenergebnis = size(A,1)
end
pause

% Ausgabe
for zeile = 1:size(A,1)
    Zaehler = zeile
    Elementarereignis = A(zeile,:)
end

% Anzahl M^glichkeiten
Faktorielle = 1;
for j = 1:length(k)
    Faktorielle = Faktorielle*factorial(k(j));
end
PermutationenMitWiederholung = factorial(n)/Faktorielle

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Kombinatorik (n-Tupel)
% Schrittweise Reduktion der zugelassenen Moeglichkeiten
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
clc

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Permutationen ohne Wiederholung
% Variationen ohne Wiederholung (Spezialfall k = n)
% Ziehen unterscheidbarer Kugeln ohne Zuruecklegen (n Kugeln aus n Kugeln)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
clc

disp('Permutationen ohne Wiederholung')
n = 6

% Bestimmung der Elementarereignisse
% S‰mtliche Permutationen von [10,20,30,40,50,60]
Element = [10:10:n*10];
A = [];
for i1 = 1:n
for i2 = 1:n
for i3 = 1:n
for i4 = 1:n
for i5 = 1:n
for i6 = 1:n
    if i2 == i1 | i3 == i1 | i4 == i1 | i5 == i1 | i6 == i1 ...
        | i3 == i2 | i4 == i2 | i5 == i2 | i6 == i2 ...
        | i4 == i3 | i5 == i3 | i6 == i3 ...
        | i5 == i4 | i6 == i4 ...
        | i6 == i5
    else
        A = [A;Element(i1),Element(i2),Element(i3), ...
               Element(i4),Element(i5),Element(i6)];
    end
end
end
end
end
end
end
A

Anzahl = size(A,1)

VariationenOhneWiederholungSpezialfall = factorial(n)

pause

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Permutationen mit Wiederholung
% Ziehen nicht notwendigerweise unterscheidbarer Kugeln ohne Zuruecklegen
% (n Kugeln aus n Kugeln)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
clc

disp('Identifikation von Eintr‰gen')
% Ausgabe
for zeile = 1:size(A,1)
    for spalte = 1:size(A,2)
        if A(zeile,spalte) == 20
            A(zeile,spalte) = 10;
        end
        if A(zeile,spalte) == 40
            A(zeile,spalte) = 30;
        end
        if A(zeile,spalte) == 60
            A(zeile,spalte) = 50;
        end
    end
end
Zwischenergebnis = A
k = [2,2,2]

pause

% Redundante Zeilen weglassen
zeile = 0;
while zeile < size(A,1)
    zeile = zeile + 1;
    Behalten = 1:zeile;
    for j = zeile+1:size(A,1)
        if abs(max(A(j,:) - A(zeile,:))) > 0
            Behalten = [Behalten,j];
        end
    end
    A = A(Behalten,:);
    Zwischenergebnis = size(A,1);
end
A
pause

Anzahl = size(A,1)

% Anzahl Mˆglichkeiten
Faktorielle = 1;
for j = 1:length(k)
    Faktorielle = Faktorielle*factorial(k(j));
end
PermutationenMitWiederholung = factorial(n)/Faktorielle

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Kombinatorik (k-Tupel)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
clc

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Variationen mit Wiederholung
% Ziehen unterscheidbarer Kugeln mit Zuruecklegen (k Kugeln aus n Kugeln)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

disp('1. Variationen mit Wiederholung')
n = 5
k = 3

% Bestimmung der Elementarereignisse
Element = [10:10:n*10]
counter = 0;
for i1 = 1:n
    for i2 = 1:n
        for i3 = 1:n
            counter = counter + 1;
            omega{counter} = [Element(i1),Element(i2),Element(i3)];
        end
    end
end
% Zusaetzliche Ausgabe als Matrix
A = [];
for j = 1:counter
    Zaehler = j
    Elementarereignis = omega{j}
    A = [A;omega{j}];
end

VariationenMitWiederholung = n^k

pause

A

pause

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Variationen ohne Wiederholung
% Ziehen unterscheidbarer Kugeln ohne Zuruecklegen (k Kugeln aus n Kugeln)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
clc

disp('2. Variationen ohne Wiederholung')
n = 5
k = 3

% Bestimmung der Elementarereignisse
Element = [10:10:n*10]
counter = 0;
```

```
for i1 = 1:n
    for i2 = 1:n
        for i3 = 1:n
            if i2 == i1 | i3 == i1 | i3 == i2
            else
                counter = counter + 1;
                omega{counter} = [Element(i1),Element(i2),Element(i3)];
            end
        end
    end
end
% Zusaetzliche Ausgabe als Matrix
A = [];
for j = 1:counter
    Zaehler = j
    Elementarereignis = omega{j}
    A = [A;omega{j}];
end

VariationenOhneWiederholung = factorial(n)/factorial(n-k)

pause

A

pause

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Kombinationen mit Wiederholung
% Ziehen ev. ununterscheidbarer Kugeln mit Zuruecklegen
% Ohne Beachtung der Reihenfolge, d.h. Identifikation von Ereignissen
% (k Kugeln aus n Kugeln)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
clc

disp('3. Kombinationen mit Wiederholung')
n = 5
k = 3

% Bestimmung der Elementarereignisse
Element = [10:10:n*10]
counter = 0;
for i1 = 1:n
    for i2 = i1:n
        for i3 = i2:n
            counter = counter + 1;
            omega{counter} = [Element(i1),Element(i2),Element(i3)];
        end
    end
end
% Zusaetzliche Ausgabe als Matrix
A = [];
for j = 1:counter
    Zaehler = j
    Elementarereignis = omega{j}
    A = [A;omega{j}];
end
```

```
KombinationenMitWiederholung ...
    = factorial(n+k-1)/(factorial(k)*factorial(n-1))

pause

A

pause

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Kombinationen ohne Wiederholung
% Ziehen ev. ununterscheidbarer Kugeln ohne Zuruecklegen
% Ohne Beachtung der Reihenfolge, d.h. Identifikation von Ereignissen
% (k Kugeln aus n Kugeln)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
clc

disp('4. Kombinationen ohne Wiederholung')
n = 5
k = 3

% Bestimmung der Elementarereignisse
Element = [10:10:n*10]
counter = 0;
for i1 = 1:n
    for i2 = i1+1:n
        for i3 = i2+1:n
            counter = counter + 1;
            omega{counter} = [Element(i1),Element(i2),Element(i3)];
        end
    end
end
% Zusaetzliche Ausgabe als Matrix
A = [];
for j = 1:counter
    Zaehler = j
    Elementarereignis = omega{j}
    A = [A;omega{j}];
end

KombinationenOhneWiederholung ...
    = factorial(n)/(factorial(k)*factorial(n-k))

pause

A

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Graphen von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

pause off

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Gauss-Mass (siehe Normalverteilung)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
close all
clc

format long e
FontSize = 15;
LineWidth = 1.5;
MarkerSize = 5;

rho = inline('1/(sqrt(2*pi)*sigma)*exp(-(xi-mu).^2/(2*sigma^2))',...
    'xi','mu','sigma');

a = 6;
Argumente = [-a:0.05:a]';

x1 = Argumente(1);
x2 = Argumente(end);
y1 = 0;
y2 = 0.9;

close all
sigma = 1;
for mu = [0,1,-2]
    Bildelemente = rho(Argumente,mu,sigma);
    if mu == 0
        plot(Argumente,Bildelemente,'r',...
            'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
    end
    if mu == 1
        plot(Argumente,Bildelemente,'k',...
            'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
    end
    if mu == -2
        plot(Argumente,Bildelemente,'b',...
            'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
    end
    hold on
    axis([x1,x2,0,0.45])
    grid on
end
set(gca,'FontSize',FontSize);
legend('\mu = 0','\mu = 1','\mu = -2')
title({['Vergleich von Dichtefunktionen, \sigma = ',num2str(sigma),]})
print -f1 -r600 -depsc GaussMass1
pause

close all
mu = 0;
for sigma = [1,1/2,2]
    Bildelemente = rho(Argumente,mu,sigma);
```

```
    if sigma == 1
        plot(Argumente,Bildelemente,'r',...
            'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
    end
    if sigma == 1/2
        plot(Argumente,Bildelemente,'k',...
            'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
    end
    if sigma == 2
        plot(Argumente,Bildelemente,'b',...
            'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
    end
    hold on
    axis([x1,x2,y1,y2])
    grid on
end
set(gca,'FontSize',FontSize);
legend('\sigma = 1','\sigma = 0.5','\sigma = 2')
title({['Vergleich von Dichtefunktionen, \mu = ',num2str(mu)]})
print -f1 -r600 -depsc GaussMass2
pause

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Gleichverteilung
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
close all
clc

format long e
FontSize = 15;
LineWidth = 1.5;
MarkerSize = 5;

rho = inline('1/J*ones(length(Argumente),1)','Argumente','J');

J = 5;
Argumente = [1:J]';
Bildelemente = rho(Argumente,J);
x1 = Argumente(1) - 1;
x2 = Argumente(end) + 1;
y1 = 0;
y2 = 1/J+0.01;

plot(Argumente,Bildelemente,'ko',...
    'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
axis([x1,x2,y1,y2])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
colormap summer
title({['Gleichverteilung (J = ',num2str(J),')']})
print -f1 -r600 -depsc Gleichverteilung1
pause

close all
plot(Argumente,Bildelemente,'ko',...
    'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
hold on
for j = 1:length(Argumente)
```

```
    plot([j,j],[0,Bildelemente(j)],'k',...
        'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
end
axis([x1,x2,y1,y2])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
colormap summer
title({['Gleichverteilung (J = ',num2str(J),')']})
print -f1 -r600 -depsc Gleichverteilung2
pause

close all
bar(Argumente,Bildelemente)
axis([x1,x2,y1,y2])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
colormap summer
title({['Gleichverteilung (J = ',num2str(J),')']})
print -f1 -r600 -depsc Gleichverteilung3
pause

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Binomialverteilung
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
close all
clc

format long e
FontSize = 15;

Koeffizienten = inline(...
    'factorial(n)./(factorial(k).*factorial(n-k))','k','n');

rho = inline(...
    'factorial(n)./(factorial(k).*factorial(n-k)).*p.^k.*(1-p).^(n-k)',...
    'k','n','p');

n = 5;
Argumente = [0:n]';
x1 = Argumente(1) - 1;
x2 = Argumente(end) + 1;
y1 = 0;
y2 = 0.5;

Binomialkoeffizienten = Koeffizienten(Argumente,n)

p = 0.2;
Bildelemente = rho(Argumente,n,p)
bar(Argumente,Bildelemente)
axis([x1,x2,y1,y2])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
colormap summer
title({['Binomialverteilung (n = ',num2str(n),', p = ',num2str(p),')']})
print -f1 -r600 -depsc Binomialverteilung1
pause

close all
```

```
p = 0.5;
Bildelemente = rho(Argumente,n,p)
bar(Argumente,Bildelemente)
axis([x1,x2,y1,y2])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
colormap summer
title({['Binomialverteilung (n = ',num2str(n),', p = ',num2str(p),')']})
print -f1 -r600 -depsc Binomialverteilung2
pause

close all
p = 0.8;
Bildelemente = rho(Argumente,n,p);
bar(Argumente,Bildelemente)
axis([x1,x2,y1,y2])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
colormap summer
title({['Binomialverteilung (n = ',num2str(n),', p = ',num2str(p),')']})
print -f1 -r600 -depsc Binomialverteilung3
pause

n = 25;
Argumente = [0:n]';
x1 = Argumente(1) - 1;
x2 = Argumente(end) + 1;
y1 = 0;
y2 = 0.2;

close all
p = 0.2;
Bildelemente = rho(Argumente,n,p);
bar(Argumente,Bildelemente)
axis([x1,x2,y1,y2])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
colormap summer
title({['Binomialverteilung (n = ',num2str(n),', p = ',num2str(p),')']})
print -f1 -r600 -depsc Binomialverteilung4
pause

close all
p = 0.5;
Bildelemente = rho(Argumente,n,p);
bar(Argumente,Bildelemente)
axis([x1,x2,y1,y2])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
colormap summer
title({['Binomialverteilung (n = ',num2str(n),', p = ',num2str(p),')']})
print -f1 -r600 -depsc Binomialverteilung5
pause

close all
p = 0.8;
Bildelemente = rho(Argumente,n,p);
bar(Argumente,Bildelemente)
axis([x1,x2,y1,y2])
grid on
```

```
set(gca,'FontSize',FontSize);
colormap summer
title({['Binomialverteilung (n = ',num2str(n),', p = ',num2str(p),')']})
print -f1 -r600 -depsc Binomialverteilung6
pause

n = 50;
Argumente = [0:n]';
x1 = Argumente(1) - 1;
x2 = Argumente(end) + 1;
y1 = 0;
y2 = 0.2;

close all
p = 0.2;
Bildelemente = rho(Argumente,n,p);
bar(Argumente,Bildelemente)
axis([x1,x2,y1,y2])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
colormap summer
title({['Binomialverteilung (n = ',num2str(n),', p = ',num2str(p),')']})
print -f1 -r600 -depsc Binomialverteilung7
pause

close all
p = 0.5;
Bildelemente = rho(Argumente,n,p);
bar(Argumente,Bildelemente)
axis([x1,x2,y1,y2])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
colormap summer
title({['Binomialverteilung (n = ',num2str(n),', p = ',num2str(p),')']})
print -f1 -r600 -depsc Binomialverteilung8
pause

close all
p = 0.8;
Bildelemente = rho(Argumente,n,p);
bar(Argumente,Bildelemente)
axis([x1,x2,y1,y2])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
colormap summer
title({['Binomialverteilung (n = ',num2str(n),', p = ',num2str(p),')']})
print -f1 -r600 -depsc Binomialverteilung9
pause

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Normalverteilung
% Erwartungswert mu, Standardabweichung sigma, Varianz sigma^2
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
close all
clc

format long e
FontSize = 15;
```

```
LineWidth = 1.5;
MarkerSize = 5;

rho = inline('1/(sqrt(2*pi)*sigma)*exp(-(xi-mu).^2/(2*sigma^2))',...
    'xi','mu','sigma');

a = 6;
Argumente = [-a:0.05:a]';

x1 = Argumente(1);
x2 = Argumente(end);
y1 = 0;
y2 = 0.9;

% Normalverteilungen

mu = 0;
sigma = 1;
Bildelemente = rho(Argumente,mu,sigma);
plot(Argumente,Bildelemente,'r',...
    'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
axis([x1,x2,y1,y2])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
title({['Standardnormalverteilung (\mu = ',num2str(mu),...
    ', \sigma = ',num2str(sigma),')']})
print -f1 -r600 -depsc Normalverteilung1
Aux1 = Bildelemente;
pause

close all
mu = 1;
sigma = 2;
Bildelemente = rho(Argumente,mu,sigma);
plot(Argumente,Bildelemente,'k',...
    'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
axis([x1,x2,y1,y2])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
title({['Normalverteilung (\mu = ',num2str(mu),...
    ', \sigma = ',num2str(sigma),')']})
print -f1 -r600 -depsc Normalverteilung2
Aux2 = Bildelemente;
pause

close all
mu = -2;
sigma = 1/2;
Bildelemente = rho(Argumente,mu,sigma);
plot(Argumente,Bildelemente,'b',...
    'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
axis([x1,x2,y1,y2])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
title({['Normalverteilung (\mu = ',num2str(mu),...
    ', \sigma = ',num2str(sigma),')']})
print -f1 -r600 -depsc Normalverteilung3
Aux3 = Bildelemente;
pause
```

```
close all
Bildelemente = Aux1;
plot(Argumente,Bildelemente,'r',...
    'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
hold on
Bildelemente = Aux2;
plot(Argumente,Bildelemente,'k',...
    'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
Bildelemente = Aux3;
plot(Argumente,Bildelemente,'b',...
    'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
axis([x1,x2,y1,y2])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
title({['Vergleich']})
print -f1 -r600 -depsc Normalverteilung4
pause

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Numerische Integration
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
close all
clc

format long e
FontSize = 15;
LineWidth = 1.2;
MarkerSize = 5;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Linksregel, Rechtsregel
% Gauss Quadratur s = 1, p = 2s = 2 (Mittelpunktsregel)
% Gauss Quadratur s = 2, p = 2s = 4
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

LoopMax = 8;
% Gauss Quadratur s = 2, p = 2s = 4
c = [1/2*(1 - 1/sqrt(3)),1/2*(1 + 1/sqrt(3))]';
% Fehler, Ordnung
Fehler = inline('abs(Approximation - ExakterWert)',...
    'Approximation','ExakterWert');
Ordnung = inline(...
    'log(Fehler(1:end-1)./Fehler(2:end))./log(h(1:end-1)./h(2:end))',...
    'Fehler','h');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Testbeispiel (Polynomfunktion)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

a = -1;
b = 0.9;
rho = inline('5*x.^4');
rhoIntegral = inline('x.^5');
ExakterWert = rhoIntegral(b) - rhoIntegral(a)

for loop = 1:LoopMax
    N(loop,1) = 2^loop;
    h(loop,1) = (b - a)/N(loop);
    x = [a:h(loop):b]';
    % Linksregel
    xLinks = x(1:end-1);
    Links(loop,1) = h(loop)*sum(rho(xLinks));
    % Rechtsregel
    xRechts = x(2:end);
    Rechts(loop,1) = h(loop)*sum(rho(xRechts));
    % Gauss Quadratur s = 1, p = 2s = 2 (Mittelpunktsregel)
    xMitte = (x(1:end-1) + x(2:end))/2;
    Mitte(loop,1) = h(loop)*sum(rho(xMitte));
    % Gauss Quadratur s = 2, p = 2s = 4
    xGauss = [];
    for j = 1:length(x)-1
        xGauss = [xGauss;x(j)+h(loop)*c];
    end
    Gauss(loop,1) = h(loop)/2*sum(rho(xGauss));
    if loop == 3
        plot(xLinks,rho(xLinks),'b.',...
```

```
            'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
        axis([a-1/10,b+1/10,min(rho(x))-1/10,max(rho(x))+1/10])
        grid on
        pause
        hold on
        plot(xRechts,rho(xRechts),'ko',...
            'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
        pause
        plot(xMitte,rho(xMitte),'r^',...
            'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
        pause
        plot(xGauss,rho(xGauss),'rd',...
            'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
        pause
        set(gca,'FontSize',FontSize);
        legend('Linksregel (p = 1)','Rechtsregel (p = 1)',...
            'Mittelpunktsregel (p = 2)','Gauss Quadratur (p = 4)',1)
        set(gca,'FontSize',FontSize);
        title({['Numerische Integration (Polynomfunktion)']})
        print -f1 -r600 -depsc NumerischeIntegration1
        pause
    end
end

% Fehler der numerischen Approximation
% Fehler(h) approx C h^p
% ln(Fehler(h1)/Fehler(h2)) approx ln((h1/h2)^p) = p ln(h1/h2)
% p approx ln(Fehler(h1)/Fehler(h2))/ln(h1/h2)
FehlerLinksregel = Fehler(Links,ExakterWert)
OrdnungLinksregel = Ordnung(FehlerLinksregel,h)
pause
FehlerRechtsregel = Fehler(Rechts,ExakterWert)
OrdnungRechtsregel = Ordnung(FehlerRechtsregel,h)
pause
FehlerMittelpunktsregel = Fehler(Mitte,ExakterWert)
OrdnungMittelpunktsregel = Ordnung(FehlerMittelpunktsregel,h)
pause
FehlerGaussQuadratur = Fehler(Gauss,ExakterWert)
OrdnungGaussQuadratur = Ordnung(FehlerGaussQuadratur,h)

close all
loglog(h,FehlerLinksregel,'b.','Linewidth',LineWidth)
hold on
loglog(h,FehlerRechtsregel,'ko','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerMittelpunktsregel,'r^','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerGaussQuadratur,'rd','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerLinksregel,'b','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerRechtsregel,'k','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerMittelpunktsregel,'r','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerGaussQuadratur,'r','Linewidth',LineWidth)
axis([h(end),h(1),1e-10,1e2])
grid on
legend('Linksregel (p = 1)','Rechtsregel (p = 1)',...
    'Mittelpunktsregel (p = 2)','Gauss Quadratur (p = 4)',2)
set(gca,'FontSize',FontSize);
title({['Numerische Integration (Polynomfunktion, Ordnungen)']})
print -f1 -r600 -depsc NumerischeIntegration2
pause

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Dichtefunktion der Standardnormalverteilung
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clc
close all
a = -3;
b = 2;
rho = inline('1/sqrt(2*pi)*exp(-x.^2/2)');

for loop = 1:LoopMax
    N(loop,1) = 2^loop;
    h(loop,1) = (b - a)/N(loop);
    x = [a:h(loop):b]';
    % Linksregel
    xLinks = x(1:end-1);
    Links(loop,1) = h(loop)*sum(rho(xLinks));
    % Rechtsregel
    xRechts = x(2:end);
    Rechts(loop,1) = h(loop)*sum(rho(xRechts));
    % Gauss Quadratur s = 1, p = 2s = 2 (Mittelpunktsregel)
    xMitte = (x(1:end-1) + x(2:end))/2;
    Mitte(loop,1) = h(loop)*sum(rho(xMitte));
    % Gauss Quadratur s = 2, p = 2s = 4
    xGauss = [];
    for j = 1:length(x)-1
        xGauss = [xGauss;x(j)+h(loop)*c];
    end
    Gauss(loop,1) = h(loop)/2*sum(rho(xGauss));
    if loop == 3
        plot(xLinks,rho(xLinks),'b.',...
            'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
        axis([a,b,0,0.6])
        grid on
        pause
        hold on
        plot(xRechts,rho(xRechts),'ko',...
            'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
        pause
        plot(xMitte,rho(xMitte),'r^',...
            'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
        pause
        plot(xGauss,rho(xGauss),'rd',...
            'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
        pause
        set(gca,'FontSize',FontSize);
        legend('Linksregel (p = 1)','Rechtsregel (p = 1)',...
            'Mittelpunktsregel (p = 2)','Gauss Quadratur (p = 4)',1)
        set(gca,'FontSize',FontSize);
        title({['Numerische Integration (Dichtefunktion)']})
        print -f1 -r600 -depsc NumerischeIntegration3
        pause
    end
end
ExakterWert = Gauss(end);
h = h(1:end-1);
Links = Links(1:end-1);
Rechts = Rechts(1:end-1);
Mitte = Mitte(1:end-1);
Gauss = Gauss(1:end-1);
```

```
% Fehler der numerischen Approximation
% Fehler(h) approx C h^p
% ln(Fehler(h1)/Fehler(h2)) approx ln((h1/h2)^p) = p ln(h1/h2)
% p approx ln(Fehler(h1)/Fehler(h2))/ln(h1/h2)
FehlerLinksregel = Fehler(Links,ExakterWert)
OrdnungLinksregel = Ordnung(FehlerLinksregel,h)
pause
FehlerRechtsregel = Fehler(Rechts,ExakterWert)
OrdnungRechtsregel = Ordnung(FehlerRechtsregel,h)
pause
FehlerMittelpunktsregel = Fehler(Mitte,ExakterWert)
OrdnungMittelpunktsregel = Ordnung(FehlerMittelpunktsregel,h)
pause
FehlerGaussQuadratur = Fehler(Gauss,ExakterWert)
OrdnungGaussQuadratur = Ordnung(FehlerGaussQuadratur,h)

close all
loglog(h,FehlerLinksregel,'b.','Linewidth',LineWidth)
hold on
loglog(h,FehlerRechtsregel,'ko','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerMittelpunktsregel,'r^','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerGaussQuadratur,'rd','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerLinksregel,'b','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerRechtsregel,'k','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerMittelpunktsregel,'r','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerGaussQuadratur,'r','Linewidth',LineWidth)
axis([h(end),h(1),1e-10,1e2])
grid on
legend('Linksregel (p = 1)','Rechtsregel (p = 1)',...
    'Mittelpunktsregel (p = 2)','Gauss Quadratur (p = 4)',2)
set(gca,'FontSize',FontSize);
title({['Numerische Integration (Dichtefunktion, Ordnungen)']})
print -f1 -r600 -depsc NumerischeIntegration4

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Dichtefunktion der Standardnormalverteilung
% k-sigma-Regeln
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
close all
clc

format long e
FontSize = 15;
LineWidth = 1.2;
MarkerSize = 5;

rho = inline('1/sqrt(2*pi)*exp(-x.^2/2)');
mu = 0;
sigma = 1;

LoopMax = 8;
% Gauss Quadratur s = 2, p = 2s = 4
c = [1/2*(1 - 1/sqrt(3)),1/2*(1 + 1/sqrt(3))]';
% Fehler, Ordnung
Fehler = inline('abs(Approximation - ExakterWert)',...
    'Approximation','ExakterWert');
Ordnung = inline(...
    'log(Fehler(1:end-1)./Fehler(2:end))./log(h(1:end-1)./h(2:end))',...
```

```
    'Fehler','h');

for k = [1:3]
    close all
    a = mu - k*sigma;
    b = mu + k*sigma;
    for loop = 1:LoopMax
        N(loop,1) = 2^loop;
        h(loop,1) = (b - a)/N(loop);
        x = [a:h(loop):b]';
        % Linksregel
        xLinks = x(1:end-1);
        Links(loop,1) = h(loop)*sum(rho(xLinks));
        % Rechtsregel
        xRechts = x(2:end);
        Rechts(loop,1) = h(loop)*sum(rho(xRechts));
        % Gauss Quadratur s = 1, p = 2s = 2 (Mittelpunktsregel)
        xMitte = (x(1:end-1) + x(2:end))/2;
        Mitte(loop,1) = h(loop)*sum(rho(xMitte));
        % Gauss Quadratur s = 2, p = 2s = 4
        xGauss = [];
        for j = 1:length(x)-1
            xGauss = [xGauss;x(j)+h(loop)*c];
        end
        Gauss(loop,1) = h(loop)/2*sum(rho(xGauss));
        if loop == 3
            plot(xLinks,rho(xLinks),'b.',...
            'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
            axis([a,b,0,0.6])
            grid on
            pause
            hold on
            plot(xRechts,rho(xRechts),'ko',...
            'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
            pause
            plot(xMitte,rho(xMitte),'r^',...
            'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
            pause
            plot(xGauss,rho(xGauss),'rd',...
            'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
            pause
            set(gca,'FontSize',FontSize);
            legend('Linksregel (p = 1)','Rechtsregel (p = 1)',...
                'Mittelpunktsregel (p = 2)','Gauss Quadratur (p = 4)',1)
            set(gca,'FontSize',FontSize);
            title({['Standardnormalverteilung, k-sigma-Regel (k = ',...
                num2str(k),')']})
            if k == 1
                print -f1 -r600 -depsc KSigmaRegel1
            end
            if k == 2
                print -f1 -r600 -depsc KSigmaRegel3
            end
            if k == 3
                print -f1 -r600 -depsc KSigmaRegel5
            end
            pause
        end
    end
    ExakterWert = Gauss(end);
```

```
    h = h(1:end-1);
    Links = Links(1:end-1);
    Rechts = Rechts(1:end-1);
    Mitte = Mitte(1:end-1);
    Gauss = Gauss(1:end-1);

    % Fehler der numerischen Approximation
    % Fehler(h) approx C h^p
    % ln(Fehler(h1)/Fehler(h2)) approx ln((h1/h2)^p) = p ln(h1/h2)
    % p approx ln(Fehler(h1)/Fehler(h2))/ln(h1/h2)
    FehlerLinksregel = Fehler(Links,ExakterWert)
    OrdnungLinksregel = Ordnung(FehlerLinksregel,h)
    pause
    FehlerRechtsregel = Fehler(Rechts,ExakterWert)
    OrdnungRechtsregel = Ordnung(FehlerRechtsregel,h)
    pause
    FehlerMittelpunktsregel = Fehler(Mitte,ExakterWert)
    OrdnungMittelpunktsregel = Ordnung(FehlerMittelpunktsregel,h)
    pause
    FehlerGaussQuadratur = Fehler(Gauss,ExakterWert)
    OrdnungGaussQuadratur = Ordnung(FehlerGaussQuadratur,h)

    close all
    loglog(h,FehlerLinksregel,'b.','Linewidth',LineWidth)
    hold on
    loglog(h,FehlerRechtsregel,'ko','Linewidth',LineWidth)
    loglog(h,FehlerMittelpunktsregel,'r^','Linewidth',LineWidth)
    loglog(h,FehlerGaussQuadratur,'rd','Linewidth',LineWidth)
    loglog(h,FehlerLinksregel,'b','Linewidth',LineWidth)
    loglog(h,FehlerRechtsregel,'k','Linewidth',LineWidth)
    loglog(h,FehlerMittelpunktsregel,'r','Linewidth',LineWidth)
    loglog(h,FehlerGaussQuadratur,'r','Linewidth',LineWidth)
    axis([h(end),h(1),1e-11,1])
    grid on
    legend('Linksregel (p = 1)','Rechtsregel (p = 1)',...
        'Mittelpunktsregel (p = 2)','Gauss Quadratur (p = 4)',4)
    set(gca,'FontSize',FontSize);
    title({['Standardnormalverteilung, k-sigma-Regel (k = ',...
        num2str(k),')'];...
        ['Approximation an Integral ',num2str(ExakterWert)]})
    if k == 1
        print -f1 -r600 -depsc KSigmaRegel2
    end
    if k == 2
        print -f1 -r600 -depsc KSigmaRegel4
    end
    if k == 3
        print -f1 -r600 -depsc KSigmaRegel6
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Berechnung der Wahrscheinlichkeit fuer Normalverteilung
% Reduktion auf Standardnormalverteilung durch Integraltransformation
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
close all
clc
```

```
format long e
FontSize = 15;
LineWidth = 1.2;
MarkerSize = 5;

% Normalverteilung
mu = -1;
sigma = 1/10;
rho1 = inline('1/(sqrt(2*pi)*sigma)*exp(-(x-mu).^2/(2*sigma^2))',...
    'x','mu','sigma');
a1 = mu - 3*sigma;
b1 = mu + 3*sigma;

% Reduktion auf Standardnormalverteilung
rho0 = inline('1/sqrt(2*pi)*exp(-x.^2/2)');
a0 = (a1 - mu)/sigma;
b0 = (b1 - mu)/sigma;

LoopMax = 8;
% Gauss Quadratur s = 2, p = 2s = 4
c = [1/2*(1 - 1/sqrt(3)),1/2*(1 + 1/sqrt(3))]';
% Fehler, Ordnung
Fehler = inline('abs(Approximation - ExakterWert)',...
    'Approximation','ExakterWert');
Ordnung = inline(...
    'log(Fehler(1:end-1)./Fehler(2:end))./log(h(1:end-1)./h(2:end))',...
    'Fehler','h');

for loop = 1:LoopMax
    N(loop,1) = 2^loop;

    % Normalverteilung
    h1(loop,1) = (b1 - a1)/N(loop);
    x = [a1:h1(loop):b1]';
    % Linksregel
    xLinks = x(1:end-1);
    Links1(loop,1) = h1(loop)*sum(rho1(xLinks,mu,sigma));
    % Rechtsregel
    xRechts = x(2:end);
    Rechts1(loop,1) = h1(loop)*sum(rho1(xRechts,mu,sigma));
    % Gauss Quadratur s = 1, p = 2s = 2 (Mittelpunktsregel)
    xMitte = (x(1:end-1) + x(2:end))/2;
    Mitte1(loop,1) = h1(loop)*sum(rho1(xMitte,mu,sigma));
    % Gauss Quadratur s = 2, p = 2s = 4
    xGauss = [];
    for j = 1:length(x)-1
        xGauss = [xGauss;x(j)+h1(loop)*c];
    end
    Gauss1(loop,1) = h1(loop)/2*sum(rho1(xGauss,mu,sigma));
    if loop == 3
        close all
        plot(xLinks,rho1(xLinks,mu,sigma),'b.',...
            'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
        axis([a1,b1,0,max(rho1(x,mu,sigma))+2])
        grid on
        pause
        hold on
        plot(xRechts,rho1(xRechts,mu,sigma),'ko',...
            'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
        pause
```

```
    plot(xMitte,rho1(xMitte,mu,sigma),'r^',...
        'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
    pause
    plot(xGauss,rho1(xGauss,mu,sigma),'rd',...
        'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
    pause
    set(gca,'FontSize',FontSize);
    legend('Linksregel (p = 1)','Rechtsregel (p = 1)',...
        'Mittelpunktsregel (p = 2)','Gauss Quadratur (p = 4)',1)
    set(gca,'FontSize',FontSize);
    title({['Normalverteilung (mu = ',num2str(mu),...
        ', sigma = ',num2str(sigma),')'];...
        ['Intervall = (',num2str(a1),',',num2str(b1),')']})
    print -f1 -r600 -depsc NormalverteilungStandardnormalverteilung1
    pause
end

% Standardnormalverteilung
h0(loop,1) = (b0 - a0)/N(loop);
x = [a0:h0(loop):b0]';
% Linksregel
xLinks = x(1:end-1);
Links0(loop,1) = h0(loop)*sum(rho0(xLinks));
% Rechtsregel
xRechts = x(2:end);
Rechts0(loop,1) = h0(loop)*sum(rho0(xRechts));
% Gauss Quadratur s = 1, p = 2s = 2 (Mittelpunktsregel)
xMitte = (x(1:end-1) + x(2:end))/2;
Mitte0(loop,1) = h0(loop)*sum(rho0(xMitte));
% Gauss Quadratur s = 2, p = 2s = 4
xGauss = [];
for j = 1:length(x)-1
    xGauss = [xGauss;x(j)+h0(loop)*c];
end
Gauss0(loop,1) = h0(loop)/2*sum(rho0(xGauss));
if loop == 3
    close all
    plot(xLinks,rho0(xLinks),'b.',...
        'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
    axis([a0,b0,0,max(rho0(x))+0.3])
    grid on
    pause
    hold on
    plot(xRechts,rho0(xRechts),'ko',...
        'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
    pause
    plot(xMitte,rho0(xMitte),'r^',...
        'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
    pause
    plot(xGauss,rho0(xGauss),'rd',...
        'LineWidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
    pause
    set(gca,'FontSize',FontSize);
    legend('Linksregel (p = 1)','Rechtsregel (p = 1)',...
        'Mittelpunktsregel (p = 2)','Gauss Quadratur (p = 4)',1)
    set(gca,'FontSize',FontSize);
    title({['Standardnormalverteilung'];...
        ['Neue Intervallgrenzen zneu = (z - \mu)/\sigma'];...
        ['Intervall = (',num2str(a0),',',num2str(b0),')']})
```

```
        print -f1 -r600 -depsc NormalverteilungStandardnormalverteilung2
        pause
    end
end

close all
ExakterWert = Gauss1(end);
h = h1(1:end-1);
Links = Links1(1:end-1);
Rechts = Rechts1(1:end-1);
Mitte = Mitte1(1:end-1);
Gauss = Gauss1(1:end-1);
FehlerLinksregel = Fehler(Links,ExakterWert)
OrdnungLinksregel = Ordnung(FehlerLinksregel,h)
pause
FehlerRechtsregel = Fehler(Rechts,ExakterWert)
OrdnungRechtsregel = Ordnung(FehlerRechtsregel,h)
pause
FehlerMittelpunktsregel = Fehler(Mitte,ExakterWert)
OrdnungMittelpunktsregel = Ordnung(FehlerMittelpunktsregel,h)
pause
FehlerGaussQuadratur = Fehler(Gauss,ExakterWert)
OrdnungGaussQuadratur = Ordnung(FehlerGaussQuadratur,h)
loglog(h,FehlerLinksregel,'b.','Linewidth',LineWidth)
hold on
loglog(h,FehlerRechtsregel,'ko','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerMittelpunktsregel,'r^','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerGaussQuadratur,'rd','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerLinksregel,'b','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerRechtsregel,'k','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerMittelpunktsregel,'r','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerGaussQuadratur,'r','Linewidth',LineWidth)
axis([h(end),h(1),1e-11,1])
grid on
legend('Linksregel (p = 1)','Rechtsregel (p = 1)',...
    'Mittelpunktsregel (p = 2)','Gauss Quadratur (p = 4)',4)
set(gca,'FontSize',FontSize);
title({['Normalverteilung (mu = ',num2str(mu),...
    ', sigma = ',num2str(sigma),')'];...
    ['Approximation an Integral ',num2str(ExakterWert)]})
print -f1 -r600 -depsc NormalverteilungStandardnormalverteilung3
pause

close all
ExakterWert = Gauss0(end);
h = h0(1:end-1);
Links = Links0(1:end-1);
Rechts = Rechts0(1:end-1);
Mitte = Mitte0(1:end-1);
Gauss = Gauss0(1:end-1);
FehlerLinksregel = Fehler(Links,ExakterWert)
OrdnungLinksregel = Ordnung(FehlerLinksregel,h)
pause
FehlerRechtsregel = Fehler(Rechts,ExakterWert)
OrdnungRechtsregel = Ordnung(FehlerRechtsregel,h)
pause
FehlerMittelpunktsregel = Fehler(Mitte,ExakterWert)
OrdnungMittelpunktsregel = Ordnung(FehlerMittelpunktsregel,h)
pause
FehlerGaussQuadratur = Fehler(Gauss,ExakterWert)
```

```
OrdnungGaussQuadratur = Ordnung(FehlerGaussQuadratur,h)
loglog(h,FehlerLinksregel,'b.','Linewidth',LineWidth)
hold on
loglog(h,FehlerRechtsregel,'ko','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerMittelpunktsregel,'r^','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerGaussQuadratur,'rd','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerLinksregel,'b','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerRechtsregel,'k','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerMittelpunktsregel,'r','Linewidth',LineWidth)
loglog(h,FehlerGaussQuadratur,'r','Linewidth',LineWidth)
axis([h(end),h(1),1e-11,1])
grid on
legend('Linksregel (p = 1)','Rechtsregel (p = 1)',...
    'Mittelpunktsregel (p = 2)','Gauss Quadratur (p = 4)',4)
set(gca,'FontSize',FontSize);
title({['Standardnormalverteilung'];...
    ['Approximation an Integral ',num2str(ExakterWert)]})
print -f1 -r600 -depsc NormalverteilungStandardnormalverteilung4

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Grenwertsaetze
% Approximation von Binomialverteilungen durch Normalverteilungen
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Dichtefunktionen
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

pause off

clear all
close all
clc

format long e
FontSize = 15;
LineWidth = 1.5;
MarkerSize = 5;

rhoBinomialverteilung = inline(...
    'factorial(N)./(factorial(k).*factorial(N-k)).*p.^k.*(1-p).^(N-k)',...
    'k','N','p');
rhoNormalverteilung = inline(...
    '1/(sqrt(2*pi)*sigma)*exp(-(xi-mu).^2/(2*sigma^2))',...
    'xi','mu','sigma');

p = 1/2;

for N = 1:50
    close all
    Argumente = [0:N]';
    x1 = Argumente(1) - 1;
    x2 = Argumente(end) + 1;
    y1 = 0;
    if N < 11
        y2 = 0.4;
    else
        y2 = 0.25;
    end
    Binomialverteilung = rhoBinomialverteilung(Argumente,N,p);
    mu = N*p;
    sigma = sqrt(N*p*(1-p));
    Normalverteilung = rhoNormalverteilung(Argumente,mu,sigma);
    x = [x1:0.1:x2]';
    rhox = rhoNormalverteilung(x,mu,sigma);
    % Approxmationsfehler
    NN(N,1) = N;
    Fehler = abs(Normalverteilung - Binomialverteilung);
    FehlerMaximum(N,1) = max(Fehler);
    FehlerSumme(N,1) = sum(Fehler);
    % Graphik
    if N == 5 | N == 6 | N == 7 | N == 8 | N == 9 | N == 10 ...
            | N == 15 | N == 20 | N == 25
        plot(Argumente,Binomialverteilung,'kd',...
            'Linewidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
        hold on
        plot(Argumente,Normalverteilung,'ro',...
            'Linewidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
        plot(x,rhox,'r','Linewidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
```

```
        plot(Argumente,Binomialverteilung,'kd',...
            'Linewidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
        axis([x1,x2,y1,y2])
        grid on
        set(gca,'FontSize',FontSize);
        legend('Binomialverteilung','Normalverteilung')
        title({['Binomialverteilung versus Normalverteilung'];...
            ['N = ',num2str(N),', p = ',num2str(p),...
            ', \mu = N p = ',num2str(mu),...
            ', \sigma^2 = N p (1-p) = ',num2str(sigma^2)];...
            ['Maximaler Fehler ',num2str(FehlerMaximum(N)),...
            ', Fehlersumme ',num2str(FehlerSumme(N))]})
        pause
        if N == 5
            print -f1 -r600 -depsc GrenzwertsaetzeLokal1
        end
        if N == 6
            print -f1 -r600 -depsc GrenzwertsaetzeLokal2
        end
        if N == 7
            print -f1 -r600 -depsc GrenzwertsaetzeLokal3
        end
        if N == 8
            print -f1 -r600 -depsc GrenzwertsaetzeLokal4
        end
        if N == 9
            print -f1 -r600 -depsc GrenzwertsaetzeLokal5
        end
        if N == 10
            print -f1 -r600 -depsc GrenzwertsaetzeLokal6
        end
        if N == 15
            print -f1 -r600 -depsc GrenzwertsaetzeLokal7
        end
        if N == 20
            print -f1 -r600 -depsc GrenzwertsaetzeLokal8
        end
        if N == 25
            print -f1 -r600 -depsc GrenzwertsaetzeLokal9
        end
    end
end

close all
NN1 = NN(2:10);
FehlerMaximum1 = FehlerMaximum(2:10);
FehlerSumme1 = FehlerSumme(2:10);
plot(NN1,FehlerMaximum1,'b.-',...
    'Linewidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
hold on
plot(NN1,FehlerSumme1,'k.-',...
    'Linewidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
axis([min(NN1),max(NN1),0,max(FehlerSumme1)+1/10])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
legend('Maximaler Fehler','Fehlersumme')
title({['Approximationsfehler Dichtefunktionen']})
print -f1 -r600 -depsc GrenzwertsaetzeLokal10
pause
```

```
close all
NN2 = NN(10:end);
FehlerMaximum2 = FehlerMaximum(10:end);
FehlerSumme2 = FehlerSumme(10:end);
plot(NN2,FehlerMaximum2,'b.-',...
    'Linewidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
hold on
plot(NN2,FehlerSumme2,'k.-',...
    'Linewidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
axis([min(NN2),max(NN2),0,max(FehlerSumme2)+1/100])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
legend('Maximaler Fehler','Fehlersumme')
title({['Approximationsfehler Dichtefunktionen']})
print -f1 -r600 -depsc GrenzwertsaetzeLokal11
pause

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Wahrscheinlichkeiten
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
close all
clc

format long e
FontSize = 15;
LineWidth = 1.2;
MarkerSize = 8;

rhoBinomialverteilung = inline(...
    'factorial(N)./(factorial(k).*factorial(N-k)).*p.^k.*(1-p).^(N-k)',...
    'k','N','p');
rhoNormalverteilung = inline(...
    '1/(sqrt(2*pi)*sigma)*exp(-(xi-mu).^2/(2*sigma^2))',...
    'xi','mu','sigma');

p = 1/2;

c = [1/2*(1 - 1/sqrt(3)),1/2*(1 + 1/sqrt(3))]';

for N = 1:50
    close all
    N
    K0 = round(N/5);
    K = round(3*N/4);
    Argumente = [K0:K]';
    x1 = Argumente(1) - 1/2;
    x2 = Argumente(end) + 1/2;
    y1 = 0;
    if N < 11
        y2 = 0.4;
    else
        y2 = 0.25;
    end
    % Binomialverteilung, Summation
    Binomialverteilung = rhoBinomialverteilung(Argumente,N,p);
    Summe = sum(rhoBinomialverteilung(Argumente,N,p));
    % Normalverteilung, Numerische Integration (Gauss Quadratur p = 4)
    mu = N*p;
```

```
sigma = sqrt(N*p*(1-p));
Normalverteilung = rhoNormalverteilung(Argumente,mu,sigma);
h = (Argumente(2)-Argumente(1))/1000;
x = [Argumente(1):h:Argumente(end)]';
rhox = rhoNormalverteilung(x,mu,sigma);
xGauss = [];
for j = 1:length(x)-1
    xGauss = [xGauss;x(j)+h*c];
end
Integral = h/2*sum(rhoNormalverteilung(xGauss,mu,sigma));
% Stetigkeitskorrektur
Konstante{1} = [];
Konstante{2} = [];
for j = 1:length(Argumente)
    Konstante{1} = [Konstante{1};Argumente(j)-1/2;Argumente(j)+1/2];
    Aux = rhoBinomialverteilung(Argumente(j),N,p);
    Konstante{2} = [Konstante{2};Aux;Aux];
end
h = (x2-x1)/1000;
x = [x1:h:x2]';
rhox = rhoNormalverteilung(x,mu,sigma);
xGauss = [];
for j = 1:length(x)-1
    xGauss = [xGauss;x(j)+h*c];
end
Stetigkeitskorrektur = h/2*sum(rhoNormalverteilung(xGauss,mu,sigma));
% Approxmationsfehler
NN(N,1) = N;
Fehler(N,1) = abs(Integral - Summe);
FehlerStetigkeitskorrektur(N,1) = abs(Stetigkeitskorrektur - Summe);
pause
% Graphik
if N == 5 | N == 6 | N == 7 | N == 8 | N == 9 | N == 10 ...
        | N == 15 | N == 20 | N == 25
    plot(Argumente,Binomialverteilung,'kd',...
        'Linewidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
    hold on
    plot(Argumente,Normalverteilung,'ro',...
        'Linewidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
    plot(x,rhox,'r','Linewidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
    plot(Argumente,Binomialverteilung,'kd',...
        'Linewidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
    plot(Konstante{1},Konstante{2},'k',...
        'Linewidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
    axis([x1,x2,y1,y2])
    grid on
    set(gca,'FontSize',FontSize);
    legend('Binomialverteilung','Normalverteilung')
    title({['Binomialverteilung versus Normalverteilung'];...
        ['N = ',num2str(N),', p = ',num2str(p),...
        ', \mu = N p = ',num2str(mu),...
        ', \sigma^2 = N p (1-p) = ',num2str(sigma^2)];...
        ['K0 = ',num2str(K0),', K = ',num2str(K),...
        ', Fehler ',num2str(Fehler(N)),...
        ', Stetigkeitskorrektur ',...
        num2str(FehlerStetigkeitskorrektur(N))]})
    pause
    if N == 5
        print -f1 -r600 -depsc GrenzwertsaetzeGlobal1
    end
```

```
        if N == 6
            print -f1 -r600 -depsc GrenzwertsaetzeGlobal2
        end
        if N == 7
            print -f1 -r600 -depsc GrenzwertsaetzeGlobal3
        end
        if N == 8
            print -f1 -r600 -depsc GrenzwertsaetzeGlobal4
        end
        if N == 9
            print -f1 -r600 -depsc GrenzwertsaetzeGlobal5
        end
        if N == 10
            print -f1 -r600 -depsc GrenzwertsaetzeGlobal6
        end
        if N == 15
            print -f1 -r600 -depsc GrenzwertsaetzeGlobal7
        end
        if N == 20
            print -f1 -r600 -depsc GrenzwertsaetzeGlobal8
        end
        if N == 25
            print -f1 -r600 -depsc GrenzwertsaetzeGlobal9
        end
    end
end

close all
NN1 = NN(2:10);
Fehler1 = Fehler(2:10);
FehlerStetigkeitskorrektur1 = FehlerStetigkeitskorrektur(2:10);
plot(NN1,Fehler1,'k.-','Linewidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
hold on
plot(NN1,FehlerStetigkeitskorrektur1,...
    'r.-','Linewidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
axis([min(NN1),max(NN1),0,max(Fehler1)+1/10])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
legend('Integral','Stetigkeitskorrektur')
title({['Approximationsfehler Wahrscheinlichkeiten']})
print -f1 -r600 -depsc GrenzwertsaetzeGlobal10
pause

close all
NN2 = NN(10:end);
Fehler2 = Fehler(10:end);
FehlerStetigkeitskorrektur2 = FehlerStetigkeitskorrektur(10:end);
plot(NN2,Fehler2,'k.-','Linewidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
hold on
plot(NN2,FehlerStetigkeitskorrektur2,...
    'r.-','Linewidth',LineWidth,'MarkerSize',MarkerSize)
axis([min(NN2),max(NN2),0,max(Fehler2)+1/100])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
legend('Integral','Stetigkeitskorrektur')
title({['Approximationsfehler Wahrscheinlichkeiten']})
print -f1 -r600 -depsc GrenzwertsaetzeGlobal11
pause

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Teil II

Statistik

Kapitel 6

Grundlegende Begriffe

6.1 Statistische Erhebung, Grundgesamtheit

Analogien zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Um die Analogien zwischen grundlegenden Begriffen der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik offensichtlich zu machen, werden im Folgenden dieselben Bezeichnungen verwendet, siehe auch Tabelle 6.1.

Statistische Erhebung. Bei einer *statistischen Erhebung* werden Objekte, welche zumindest eine gemeinsame Eigenschaft verbindet, untersucht; für diese Objekte werden Informationen in Form von Daten gesammelt. Eine statistische Erhebung ist das Analogon zum *Zufallsexperiment.*

Totalerhebung, Teilerhebung. Falls bei einer statistischen Erhebung ein vollständiger Datensatz erfaßt wird, d.h. sämtliche geforderten Informationen für alle untersuchten Objekte zur Verfügung stehen, handelt es sich um eine *Totalerhebung*; falls nur für einen Teil der untersuchten Objekte Daten vorliegen, spricht man von einer *Teilerhebung* (Stichprobenerhebung).

Bemerkung. Bei einer umfangreichen statistischen Erhebung muss man davon ausgehen, dass der verfügbare Datensatz unvollständig ist und gewisse unvorhersehbare Einflüsse (*Zufälligkeiten*) eine Rolle spielen; bei einer seriösen statistischen Darstellung und Analyse wird der (geschätzte) Anteil fehlender und möglicherweise fehlerbehafteter Daten miteinbezogen.

Grundgesamtheit. Die Zusammenfassung aller Objekte, welche im Zusammenhang mit einer statistischen Erhebung auftreten, wird als *Grundgesamtheit* (statistische Masse) bezeichnet; man setzt dabei voraus, daß die betrachteten Objekte sachliche, räumliche und zeitliche Kriterien erfüllen, die eine Abgrenzung von anderen Objekten und somit eine sinnvolle Fest-

Zufallsexperiment	Statistische Erhebung
Ereignisraum	Grundgesamtheit, statistische Masse
Elementarereignis	Merkmalsträger, statistische Einheit
	Merkmale
	Merkmalsausprägungen

Tabelle 6.1: Analogien zwischen Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

legung der Grundgesamtheit ermöglichen

$$\Omega = \big\{\omega \text{ erfüllt vorgegebene Abgrenzungskriterien}\big\}\,.$$

Die Grundgesamtheit ist das Analogon zum Ereignisraum.

Merkmalsträger. Ein bei einer statischen Erhebung untersuchtes Objekt heißt ein *Merkmalsträger* (statistische Einheit)

$$\omega \in \Omega\,;$$

die Bezeichnung erklärt sich dadurch, daß ein solches Objekt Träger der Information ist, für welche man sich interessiert. Merkmalsträger sind häufig natürliche Einheiten wie etwa Personen, können jedoch auch künstliche Einheiten wie etwa Familien, Haushalte, Unternehmen oder Straßen sein. Ein Merkmalsträger ist das Analogon zum Elementarereignis.

Merkmal. Die bei einer statistischen Erhebung untersuchten Eigenschaften eines Merkmalsträgers werden *Merkmale* genannt; die auftretenden Werte heißen *Merkmalsausprägungen*. Im Allgemeinen identifiziert man einen Merkmalsträger und dessen Merkmale

$$\text{Merkmalsträger } \omega \in \Omega\,,$$
$$\big(\text{erstes Merkmal von } \omega, \dots, d\text{-tes Merkmal von } \omega\big) \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d\,.$$

In Analogie zu Zufallsvariablen ist es oft zweckmäßig, Merkmalsausprägungen Zahlenwerte zuzuordnen

$$Z = (Z_1, \dots, Z_d) : \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d \longrightarrow \mathbb{R}^d\,,$$

wobei hier zur Vereinfachung angenommen wird, daß eine Eigenschaft einer einzigen reellen Zahl entspricht.

Beispiele.

(i) Vielfältige Beispiele für statistische Erhebungen finden sich unter

Statistik Austria
https://www.statistik.at

(ii) *Volkszählung.* Eine Volkszählung (Zensus) ist eine gesetzlich angeordnete Erhebung statistischer Bevölkerungsdaten in einem Staat, etwa in Österreich. Die untersuchten Personen verbindet die Eigenschaft *Einwohnerin bzw. Einwohner von Österreich*; diese Charakterisierung dient als sachliche Abgrenzung von anderen Personen wie etwa Touristinnen oder Touristen. Die räumliche Abgrenzung erfolgt durch die Beschränkung auf einen Staat; die zeitliche Abgrenzung entspricht der Festlegung eines bestimmten Zeitpunktes. Bei einer Volkszählung sind die Merkmalsträger durch natürliche Einheiten, nämlich die Einwohnerinnen und Einwohner eines Staates, gegeben. Es ist naheligend, Merkmale wie Geschlecht und Geburtsjahr zu erheben; weitere Merkmale können etwa Geburtsort oder Beruf sein. Für eine konkrete Person wären entsprechende Merkmalsausprägungen beispielsweise *weiblich, 2000, Innsbruck, kein Beruf (Studentin).*

Laut WIKIPEDIA und STATISTIK AUSTRIA hatte Österreich zu Jahresbeginn 2018 folgende Einwohnerzahl

$$\Omega = \big\{\text{Einwohnerin oder Einwohner in Österreich am 1.1.2018}\big\}\,,$$
$$|\Omega| = 8\,822\,267\,.$$

Detailierte Angaben der STATISTIK AUSTRIA betreffend die österreichische Bevölkerung zu Jahresbeginn 2018 findet man beispielsweise unter

www.statistik.at/wcm/idc/idcplg?IdcService=GET_FILE&dID=354032&dDocName=080904;

die berechnete Gesamtzahl basiert auf statistischen Erhebungen für einzelne Gemeinden.

6.2 Klassifizierung von Merkmalen

Kriterien zur Klassifizierung von Merkmalen. Zur Klassifizierung von Merkmalen werden üblicherweise folgende Kriterien betreffend die Struktur und Mächtigkeit der zugehörigen Ausprägungen verwendet.

Quantitative versus qualitative Merkmale. Ein Merkmal heißt *quantitativ*, wenn dessen Ausprägungen und insbesondere Unterschiede zwischen Ausprägungen meßbare Größen sind; den Merkmalsausprägungen liegt somit ein mit einer Ordnungsrelation versehener Zahlenbereich zugrunde, etwa die Menge der natürlichen, ganzen, rationalen oder reellen Zahlen. Ein Merkmal heißt *qualitativ*, wenn Unterschiede zwischen Merkmalsausprägungen keine meßbaren Größen sind; die Zuordnung von Zahlen ist zweckmäßig, Rechenoperationen und insbesondere Differenzbildungen sind jedoch nicht sinnvoll.

Diskrete versus kontinuierliche Merkmale. Man nennt ein Merkmal *diskret*, wenn es endlich viele oder höchstens abzählbar unendlich viele Ausprägungen hat; bei überabzählbar vielen Ausprägungen spricht man von einem *kontinuierlichen* (stetigen) Merkmal.

Beispiele.

(i) Zu quantitativen Merkmalen zählen das Lebensalter (natürliche Zahl) und das Geburtsjahr (ganze Zahl) mit endlich vielen Ausprägungen; weitere Beispiele sind die Körpergröße und das Körpergewicht, wo unter der (theoretischen) Annahme beliebig hoher Meßgenauigkeit reelle Zahlen in einem gewissen Intervall betrachtet werden und somit überabzählbar viele Ausprägungen auftreten können.

(ii) Zu qualitativen Merkmalen zählen das Geschlecht, der Geburtsort, der Beruf und die Lieblingsfarbe; in den ersten Fällen gibt es nur endliche viele Ausprägungen, im Fall von Farben könnte man (theoretisch) beliebig feine Abstufungen zulassen.

Skalen. Bei der Erfassung von quantitativen und qualitativen Merkmalen unterscheidet man folgende Skalen; bei quantitativen Merkmalen ist zu beachten, daß den Merkmalsausprägungen im Allgemeinen physikalische Einheiten zugrundeliegen.

Kardinalskala. Kardinalskalen dienen zur Erfassung von quantitativen Merkmalen. Die Ausprägungen eines Merkmales sind durch Werte in einem gewissen Intervall gegeben, es liegt eine natürlichen Ordnung der Merkmalsausprägungen vor und Abstände zwischen Merkmalsausprägungen können zahlenmäßig in Relation gesetzt werden; gleiche Differenzen von Merkmalsausprägungen spiegeln dabei gleiche Differenzen auf der Skala wider.

(i) *Verhältnisskala.* Bei einer Verhältnisskala sind Verhältnisse von Ausprägungen sinnvoll, und es gibt einen natürlichen Nullpunkt, welcher nicht unterschritten wird.

(ii) *Intervallskala.* Bei einer Intervallskala sind Verhältnisse von Ausprägungen nicht sinnvoll, und es gibt keinen natürlichen Nullpunkt.

Nominalskala und Ordinalskala. Eine Nominalskala erfasst qualitative Merkmale, für welche nur die Gleichheit oder Ungleichheit von Ausprägungen festgestellt werden kann; eine Ordinalskala dient zur Erfassung von qualitativen Merkmalen, deren Ausprägungen sich durch Zahlen mit natürlicher Ordnung darstellen lassen.

Beispiele. Kardinalskalen dienen beispielsweise zur Erfassung von Jahreszahlen, Temperaturen, Größen, Massen oder Geschwindigkeiten. Bei Temperaturen gemessen in Kelvin, Größen, Massen und Geschwindigkeiten verwendet man den Begriff Verhältnisskala; beispielsweise sind 20 kg doppelt so schwer wie 10 kg. Bei Jahreszahlen oder Temperaturen gemessen in Grad Celsius spricht man hingegen von einer Intervallskala, weil beispielsweise das Verhältnis der Jahre 2019 und 1519 (Sterbejahr von Kaiser Maximilian I.) oder das Verhältnis der Temperaturen 10°C und 0°C keine Bedeutung hat; physikalisch gesehen sind $20°C$ nämlich *nicht* doppelt so warm wie $10°C$. Nominalskalen liegen etwa bei Geschlecht, Geburtsort, Beruf, Lieblingsfarbe, Blutgruppe oder Studienfach vor. Im Gegensatz dazu ist es naheliegend, (verbalen) Beurteilungen betreffend Leistungen, speziell den Schulnoten *Sehr gut, Gut, Befriedigend, Genügend, Nicht genügend*, oder Beurteilungen betreffend die Zufriedenheit mit Produkten geordnete Zahlen zuzuordnen, d.h. es liegen Ordinalskalen vor.

Kapitel 7

Weitere Inhalte

Vergleiche Vorlesung.

Teil III

Statistische Erhebungen

Kapitel 1

Münzwurf

Aufgabenstellung. *Ausführung eines Münzwurfes mit 10-maliger Wiederholung, Angabe der Anzahl der Ergebnisse Kopf und Zahl.*

Ergebnisse (Montag, 4. März).
Anwesende Studierende 40
Abgabe durch 31 Studierende (davon 5 ungültig)
Fehlende Abgaben 9

(i) *Aufgabenstellung korrekt bearbeitet.* Angabe der Anzahl (Summe) in erwünschter Reihenfolge Kopf dann Zahl 11
Aufgabenstellung in zulässiger Art und Weise bearbeitet. Angabe der Anzahl (Summe) in Reihenfolge Zahl dann Kopf 3

(ii) *Aufgabenstellung unvollständig bearbeitet.* Angabe der Teilergebnisse (*Strichl-Liste*) ohne Anzahl 12

(iii) *Aufgabenstellung nicht erfüllt.* Ungültige Beiträge (Zuordnung 0 / 1 unklar, zuviele Würfe, zuwenige Würfe) 5

Ergebnisse *Kopf* (Absolute Häufigkeiten)

$$6+6+4+3+6+3+5+4+4+2+6+7+6+5+6+3+6+5+8+6+4+5+4+7+4+5=130$$

Ergebnisse *Zahl* (Absolute Häufigkeiten)

$$4+4+6+7+4+7+5+6+6+8+4+3+4+5+4+7+4+5+2+4+6+5+6+3+6+5=130$$

Ergebnisse (Donnerstag, 7. März, 10–11 Uhr).
Anwesende Studierende 31
Abgabe durch 27 Studierende
Fehlende Abgaben 4

(i) *Aufgabenstellung korrekt bearbeitet.* Angabe der Anzahl (Summe) in erwünschter Reihenfolge Kopf dann Zahl 7
Aufgabenstellung in zulässiger Art und Weise bearbeitet. Angabe der Anzahl (Summe) in Reihenfolge Zahl dann Kopf 6

(ii) *Aufgabenstellung unvollständig bearbeitet.* Angabe der Teilergebnisse (*Strichl-Liste*) ohne Anzahl 14

(iii) *Aufgabenstellung nicht erfüllt.* Ungültige Beiträge 0

Ergebnisse *Kopf* (Absolute Häufigkeiten)

$5+4+6+5+5+7+2+4+4+5+8+5+5+7+5+7+6+6+5+4+5+3+4+3+4+4+4=132$

Ergebnisse *Zahl* (Absolute Häufigkeiten)

$5+6+4+5+5+3+8+6+6+5+2+5+5+3+5+3+4+4+5+6+5+7+6+7+6+6+6=138$

Modifikation der Aufgabenstellung. *Zusätzliche Angabe des Namens.*

Ergebnisse (Donnerstag, 7. März, 11–12 Uhr).
Anwesende Studierende 23
Abgabe durch 23 Studierende
Fehlende Abgaben 0

(i) *Aufgabenstellung korrekt bearbeitet.* Angabe der Anzahl (Summe) in erwünschter Reihenfolge Kopf dann Zahl 4
Aufgabenstellung in zulässiger Art und Weise bearbeitet. Angabe der Anzahl (Summe) in Reihenfolge Zahl dann Kopf 2

(ii) *Aufgabenstellung unvollständig bearbeitet.* Angabe der Teilergebnisse (*Strichl-Liste*) ohne Anzahl 18

(iii) *Aufgabenstellung nicht erfüllt.* Ungültige Beiträge 0

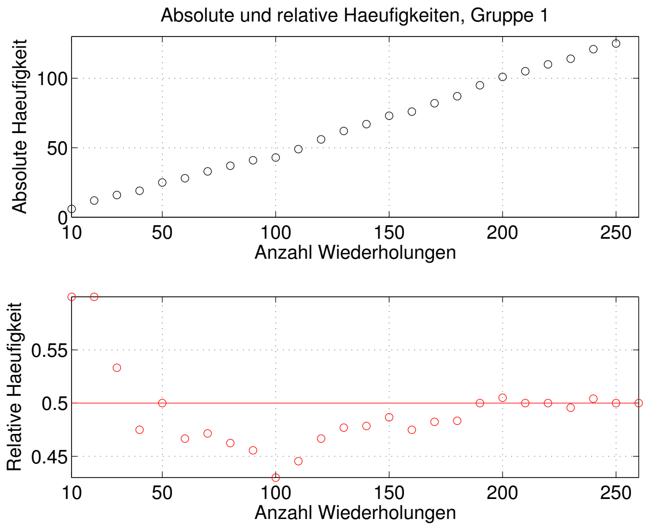
Ergebnisse *Kopf* (Absolute Häufigkeiten)

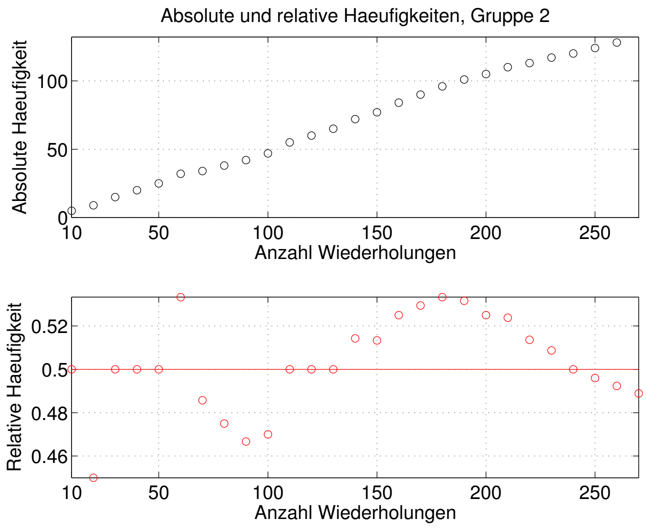
$$5+3+7+6+4+3+4+5+5+4+5+1+7+5+3+5+4+4+5+4+5+6+6=106$$

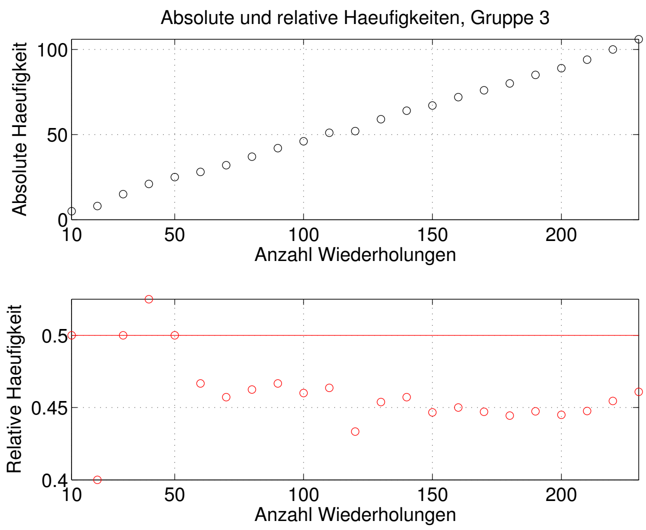
Ergebnisse *Zahl* (Absolute Häufigkeiten)

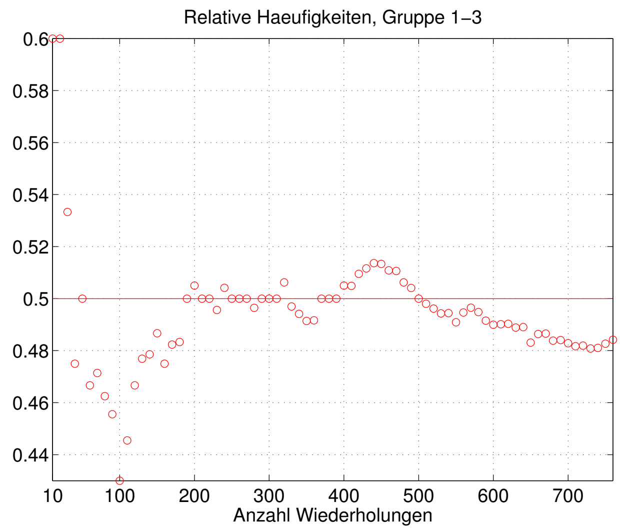
$$5+7+3+4+6+7+6+5+5+6+5+9+3+5+7+5+6+6+5+6+5+4+4=124$$

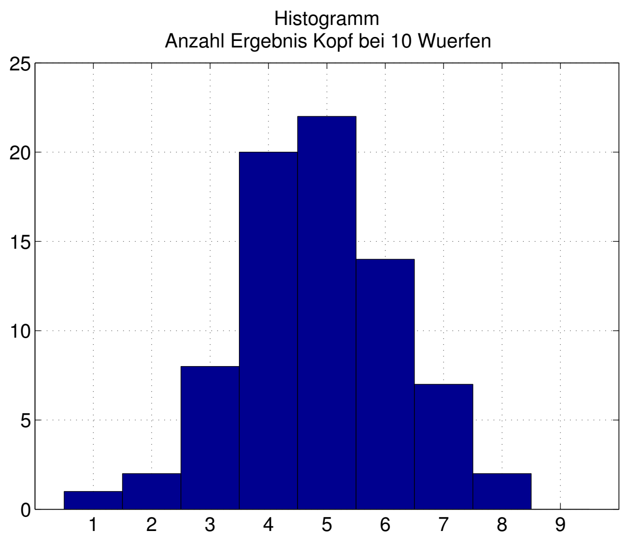
Auswertung und graphische Darstellung der Ergebnisse. Auswertung und graphische Darstellung der Ergebnisse mittels MATLAB. Absolute und relative Häufigkeiten, Histogramm, Boxplot, Kreisdiagramm.

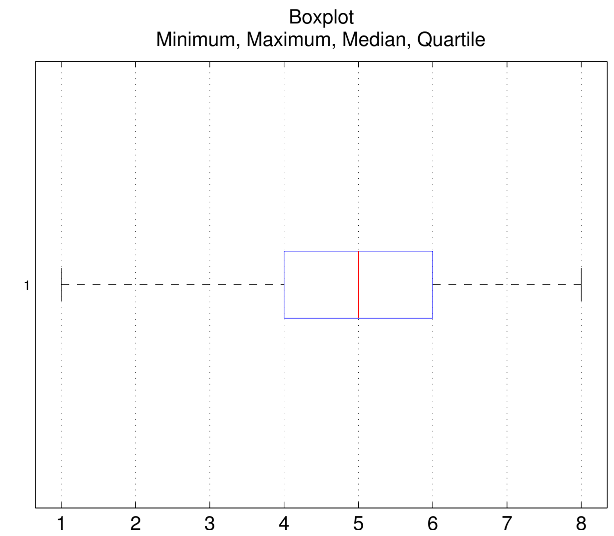

Absolute und relative Haeufigkeiten, Gruppe 1
Absolute Haeufigkeit
Relative Haeufigkeit
Anzahl Wiederholungen
Anzahl Wiederholungen

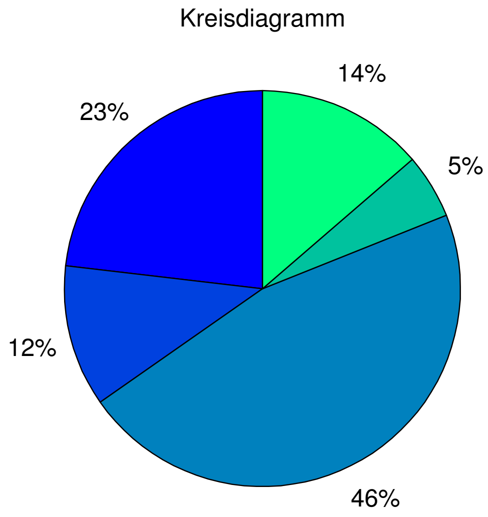

Absolute und relative Haeufigkeiten, Gruppe 2
Absolute Haeufigkeit
Relative Haeufigkeit
Anzahl Wiederholungen
Anzahl Wiederholungen

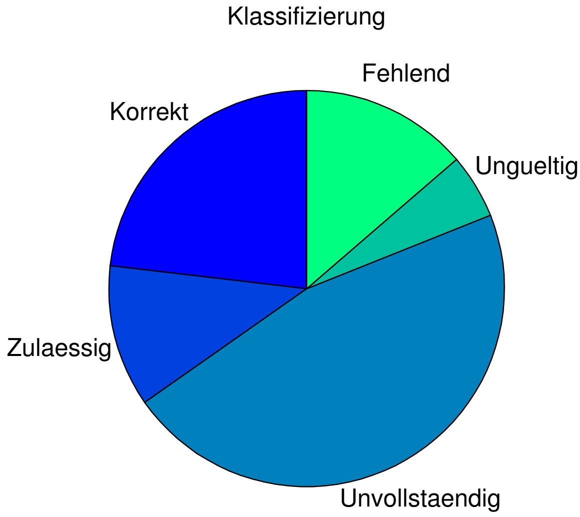

Absolute und relative Haeufigkeiten, Gruppe 3
Absolute Haeufigkeit
Relative Haeufigkeit
Anzahl Wiederholungen
Anzahl Wiederholungen


Relative Haeufigkeiten, Gruppe 1−3
0.6
0.58
0.56
0.54
0.52
0.5
0.48
0.46
0.44
10
100
200
300
400
500
600
700
Anzahl Wiederholungen


Histogramm
Anzahl Ergebnis Kopf bei 10 Wuerfen
25
20
15
10
5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9


Boxplot
Minimum, Maximum, Median, Quartile
1
1
2
3
4
5
6
7
8


Kreisdiagramm
14%
5%
23%
12%
46%


Klassifizierung
Fehlend
Korrekt
Ungueltig
Zulaessig
Unvollstaendig

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Muenzwurf
% Ergebnisse Kopf / Zahl bei 10 Wuerfen und mehrfacher Wiederholung
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
close all
clc
format long e
FontSize = 15;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Idealisierte Ergebnisse
% Erwartete frequentistische Wahrscheinlichkeit fuer Ergebnis Kopf 1/2
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Kopf = [5,5,5,5,5]'
Zahl = 10 - Kopf

% Absolute Haeufigkeiten 5, 5 + 5, 5 + 5 + 5 etc.
% Relative Haeufigkeiten 5/10, 10/20, 15/30 etc.
Summe = 0;
for j = 1:length(Kopf)
    Summe = Summe + Kopf(j);
    AbsoluteHaeufigkeitenKopf(j,1) = Summe;
    RelativeHaeufigkeitenKopf(j,1) = Summe/(10*j);
end
AbsoluteHaeufigkeitenKopf
cumsum(Kopf)
RelativeHaeufigkeitenKopf
cumsum(Kopf)./(10*[1:length(Kopf)]')

pause

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Teilergebnisse (Gruppe 1-3)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clc

% Gruppe 1-3
Resultat{1} = [6,6,4,3,6,3,5,4,4,2,6,7,6,5,6,3,6,5,8,6,4,5,4,7,4,5];
N{1} = length(Resultat{1});
Resultat{2} = [5,4,6,5,5,7,2,4,4,5,8,5,5,7,5,7,6,6,5,4,5,3,4,3,4,4,4];
N{2} = length(Resultat{2});
Resultat{3} = [5,3,7,6,4,3,4,5,5,4,5,1,7,5,3,5,4,4,5,4,5,6,6];
N{3} = length(Resultat{3});
Resultat
N

for j = [1,2,3]
    close all
    clear AbsoluteHaeufigkeitenKopf
    clear RelativeHaeufigkeitenKopf

    Gruppe = j
    Kopf = Resultat{j}';

    % Absolute / Relative Haeufigkeiten
    AbsoluteHaeufigkeitenKopf{j} = cumsum(Kopf);
```

```
    AnzahlWiederholungen = 10*[1:length(Kopf)]';
    RelativeHaeufigkeitenKopf{j} = cumsum(Kopf)./AnzahlWiederholungen;
    % Frequentistische Wahrscheinlichkeit (Schaetzung)
    FrequentistischeWahrscheinlichkeit = RelativeHaeufigkeitenKopf{j}(end)
    Aux(j) = RelativeHaeufigkeitenKopf{j}(end);

    % Graphische Darstellung
    subplot(2,1,1)
    plot(AnzahlWiederholungen,AbsoluteHaeufigkeitenKopf{j},'ko')
    xMin = min(AnzahlWiederholungen);
    xMax = max(AnzahlWiederholungen);
    axis([xMin,xMax,0,max(AbsoluteHaeufigkeitenKopf{j})])
    grid on
    set(gca,'XTick',AnzahlWiederholungen([1,5:5:end]));
    set(gca,'FontSize',FontSize);
    xlabel('Anzahl Wiederholungen')
    ylabel('Absolute Haeufigkeit')
    title(['Absolute und relative Haeufigkeiten, Gruppe ',num2str(j)])

    subplot(2,1,2)
    plot(AnzahlWiederholungen,RelativeHaeufigkeitenKopf{j},'ro')
    hold on
    plot(AnzahlWiederholungen,0.5*ones(size(AnzahlWiederholungen)),'r-')
    yMin = min(RelativeHaeufigkeitenKopf{j});
    yMax = max(RelativeHaeufigkeitenKopf{j});
    axis([xMin,xMax,yMin,yMax])
    grid on
    set(gca,'XTick',AnzahlWiederholungen([1,5:5:end]));
    set(gca,'FontSize',FontSize);
    xlabel('Anzahl Wiederholungen')
    ylabel('Relative Haeufigkeit')

    if j == 1
        print -f1 -r600 -depsc Muenzwurf_Plot1
    end
    if j == 2
        print -f1 -r600 -depsc Muenzwurf_Plot2
    end
    if j == 3
        print -f1 -r600 -depsc Muenzwurf_Plot3
    end

    pause
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Gesamtergebnis
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear AbsoluteHaeufigkeitenKopf
clear RelativeHaeufigkeitenKopf
close all
clc

Kopf = [Resultat{1},Resultat{2},Resultat{3}]';

% Absolute / Relative Haeufigkeiten
AbsoluteHaeufigkeitenKopf = cumsum(Kopf);
AnzahlWiederholungen = 10*[1:length(Kopf)]';
RelativeHaeufigkeitenKopf = cumsum(Kopf)./AnzahlWiederholungen;
```

```
% Frequentistische Wahrscheinlichkeit (Schaetzung fuer Wahrscheinlichkeit)
FrequentistischeWahrscheinlichkeit = RelativeHaeufigkeitenKopf(end)
Probe = (N{1}*Aux(1) + N{2}*Aux(2) + N{3}*Aux(3))/(N{1} + N{2} + N{3})

% Graphische Darstellung
plot(AnzahlWiederholungen,RelativeHaeufigkeitenKopf,'ro')
hold on
plot(AnzahlWiederholungen,0.5*ones(size(AnzahlWiederholungen)),'r-')
xMin = min(AnzahlWiederholungen);
xMax = max(AnzahlWiederholungen);
yMin = min(RelativeHaeufigkeitenKopf);
yMax = max(RelativeHaeufigkeitenKopf);
axis([xMin,xMax,yMin,yMax])
grid on
set(gca,'XTick',AnzahlWiederholungen([1,10:10:end]));
set(gca,'FontSize',FontSize);
xlabel('Anzahl Wiederholungen')
%ylabel('Relative Haeufigkeit')
title('Relative Haeufigkeiten, Gruppe 1-3')
print -f1 -r600 -depsc Muenzwurf_Plot4

pause

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Darstellung der Daten mittels Histogramm
% Kennwerte Median / Mittelwert
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

close all
clc

% Anordnung der Daten
KopfAngeordnet = sort(Kopf)

% Histogramm
hist(Kopf,[1:9]')
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
title({'Histogramm';'Anzahl Ergebnis Kopf bei 10 Wuerfen'})
print -f1 -r600 -depsc Muenzwurf_Plot5

pause

% Median
if mod(length(Kopf),2) == 1
    disp('Ungerade Anzahl: Index eindeutig bestimmt')
    IndexMitte = (length(Kopf) + 1)/2
    Median = KopfAngeordnet(IndexMitte)
else
    disp('Gerade Anzahl: Zwei kanonische Werte (davon Mittelwert)')
    IndexUnterhalb = length(Kopf)/2
    WertUnterhalb = KopfAngeordnet(IndexUnterhalb)
    IndexOberhalb = length(Kopf)/2 + 1
    WertOberhalb = KopfAngeordnet(IndexOberhalb)
end
Median = median(Kopf)

% Mittelwert
Mittelwert = sum(Kopf)/length(Kopf)
Mittelwert = mean(Kopf)
```

```
% Boxplot
close all
%subplot(2,1,1)
%boxplot(KopfAngeordnet,'boxstyle','filled')
%grid on
%set(gca,'FontSize',FontSize);
%subplot(2,1,2)
boxplot(KopfAngeordnet,'orientation','horizontal')
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
title({'Boxplot';'Minimum, Maximum, Median, Quartile'})
print -f1 -r600 -depsc Muenzwurf_Plot6

pause

% TeilnehmerInnen
close all
Studierende = [11+7+4,3+6+2,12+14+18,5+0+0,9+4+0];
Eig = {'Korrekt','Zulaessig     ','Unvollstaendig','     Ungueltig',...
    'Fehlend'};
subplot(1,2,1)
pie(Studierende)
colormap winter
title('Kreisdiagramm')
set(gca,'FontSize',14);
subplot(1,2,2)
pie(Studierende,Eig)
colormap winter
title(['Klassifizierung'])
set(gca,'FontSize',FontSize);
print -f1 -r600 -depsc Muenzwurf_Plot7

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

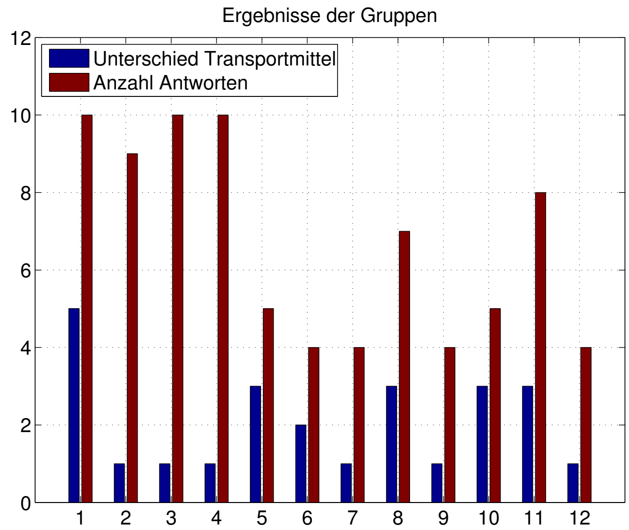
Kapitel 2

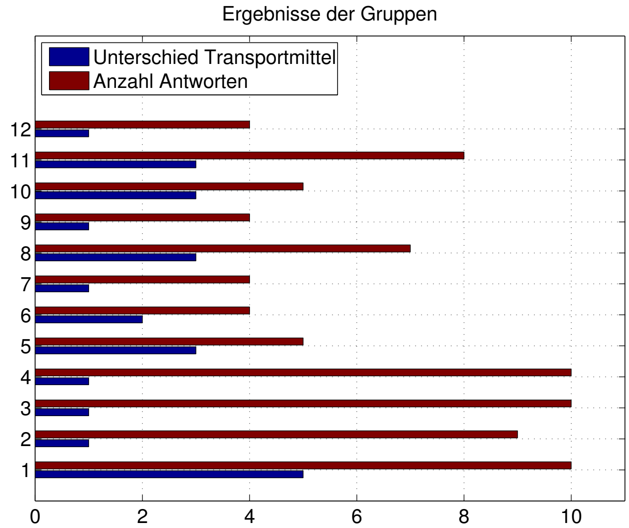
Transportmittel

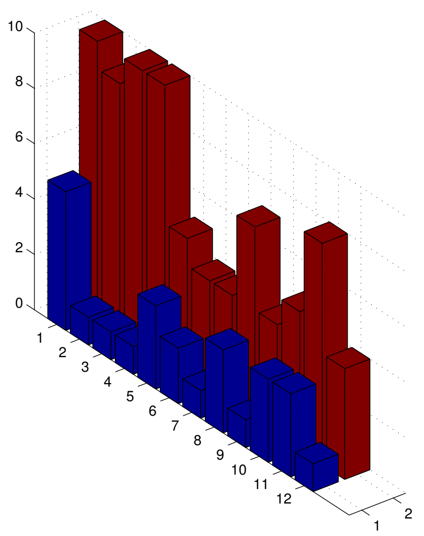
Aufgabenstellung. Beantwortung der Fragen *Wie kommst Du üblicherweise zum Campus Technik? Wie bist Du heute zum Campus Technik gekommen?*

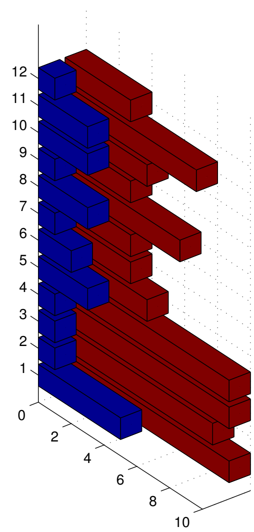
Ergebnisse (Montag, 11. März).
Da es am 11. März geschneit und gestürmt hat, wird festgehalten, wieviele Studierende bei den zwei Fragen unterschiedliche Antworten gegeben haben.
Gültige Antworten
$10 + 9 + 10 + 10 + 5 + 4 + 4 + 7 + 4 + 5 + 8 + 4 = 80$
Anzahl der Studierenden, die bei der ersten und zweiten Frage unterschiedliche Angaben gemacht haben
$5 + 1 + 1 + 1 + 3 + 2 + 1 + 3 + 1 + 3 + 3 + 1 = 25$

Graphische Darstellung.
Graphische Darstellung der Ergebnisse mittels MATLAB. Stabdiagramme.


Ergebnisse der Gruppen
Unterschied Transportmittel
Anzahl Antworten
0
2
4
6
8
10
12
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12


Ergebnisse der Gruppen
Unterschied Transportmittel
Anzahl Antworten
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
2
4
6
8
10


10
8
6
4
2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
1
2


12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
2
4
6
8
10

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Transportmittel
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
close all
clc
format long e
FontSize = 15;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ergebnisse
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Anzahl der gueltigen Antworten
Antworten = [10,9,10,10,5,4,4,7,4,5,8,4]'
AnzahlAntworten = sum(Antworten)

% Anzahl der Studierenden, die bei der ersten und zweiten Frage
% unterschiedliche Angaben gemacht haben
Unterschiede = [5,1,1,1,3,2,1,3,1,3,3,1]'
AnzahlUnterschiede = sum(Unterschiede)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Graphische Darstellung mittels Stabdiagramm
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Ergebnisse = [Unterschiede,Antworten]

bar(Ergebnisse);
axis([0,13,0,12])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
legend('Unterschied Transportmittel','Anzahl Antworten',2)
title('Ergebnisse der Gruppen')
print -f1 -r600 -depsc Transportmittel_Plot1
pause

barh(Ergebnisse);
axis([0,11,0,15])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
legend('Unterschied Transportmittel','Anzahl Antworten',2)
title('Ergebnisse der Gruppen')
print -f1 -r600 -depsc Transportmittel_Plot2
pause

close all
bar3(Ergebnisse)
grid on
print -f1 -r600 -depsc Transportmittel_Plot3
pause

close all
bar3h(Ergebnisse)
grid on
print -f1 -r600 -depsc Transportmittel_Plot4

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Kapitel 3

Zweitfach

Aufgabenstellung. *Angabe des Zweitfaches.*

Ergebnisse der zusätzlichen Aufgabenstellung *Ich habe an folgender Schule (Schultyp) meine Matura gemacht …* werden für das meistgenannte Fach ausgewertet.

Ergebnisse (Donnerstag, 14. März).
Anwesende Studierende 66
Abgabe durch 66 Studierende (davon 2 ungültig)

(i) Physik
2 + 3 + 3 + 0 + 1 + 2 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1 + 1 = 15
Realgymnasium 5, Oberstufenrealgymnasium 4, HTL 3, HAK 2, Abendmatura 1

Biologie und Umweltkunde
0 + 1 + 0 + 0 + 3 + 1 + 2 + 1 + 0 + 1 + 2 + 0 = 11

Geographie und Wirtschaftskunde
2 + 1 + 0 + 1 + 1 + 1 + 2 + 0 + 1 + 0 + 1 = 10

Geschichte, Sozialbildung und Politische Bildung
0 + 0 + 3 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 = 7

Informatik
0 + 2 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 = 4

Bewegung und Sport
0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 = 4

Chemie
0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 3

Italienisch
1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 = 3

Deutsch
$0+0+0+1+0+0+0+0+0+0+0+0=1$

Englisch
$0+0+1+0+0+0+0+0+0+0+0+0=1$

Französisch
$1+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0=1$

Spanisch
$0+0+0+1+0+0+0+0+0+0+0+0=1$

Latein
$0+0+0+0+0+0+0+0+0+1+0+0=1$

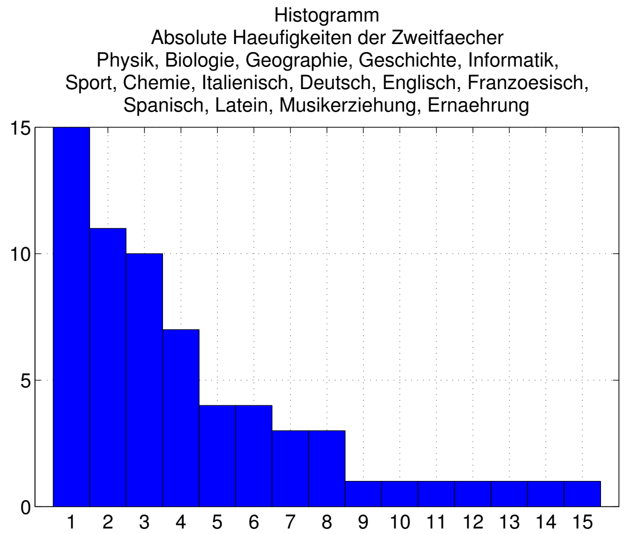
Musikerziehung
$0+0+0+0+0+0+0+0+1+0+0+0=1$

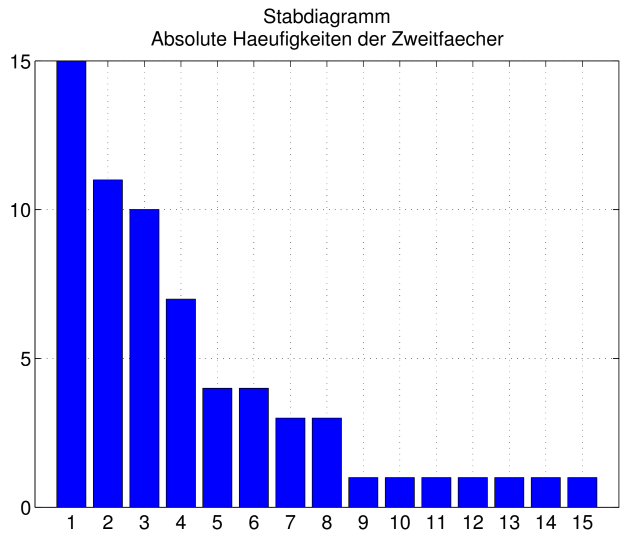
Ernährung und Haushalt
$1+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0=1$

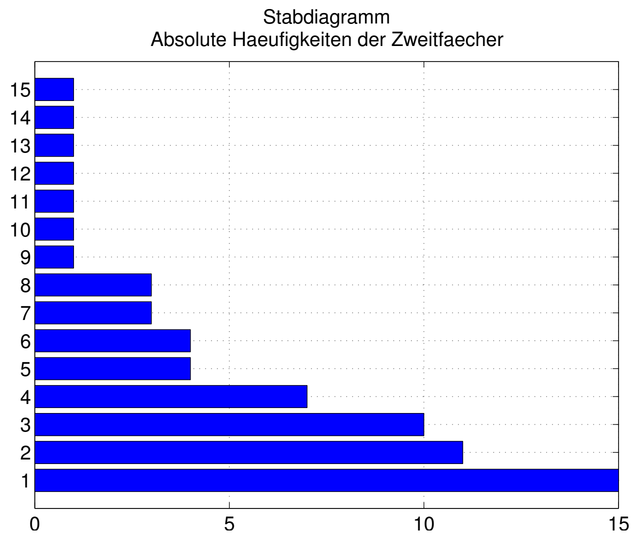
(ii) Quersumme (gültige Angaben, pro Gruppe)
$7+8+8+5+6+6+5+3+4+5+5+2=64$

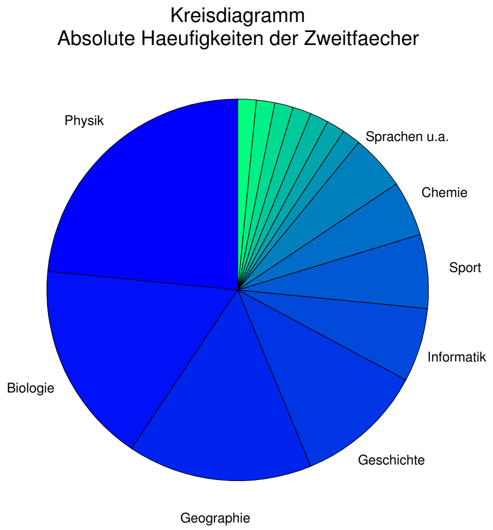
Ungültige Angaben 2 (Mathematik)

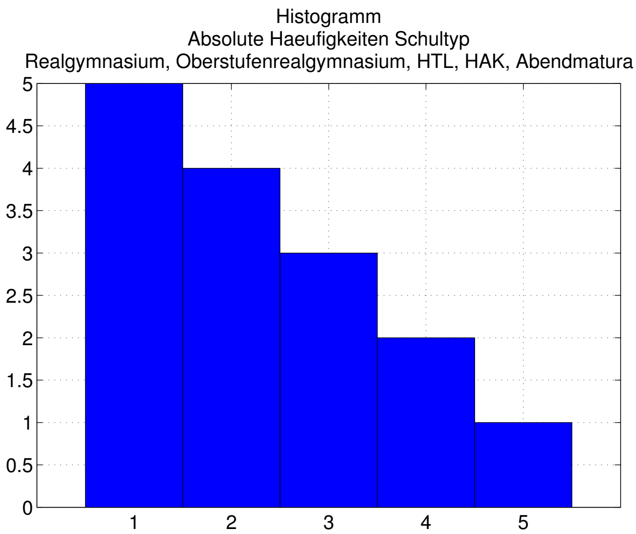
Auswertung und graphische Darstellung der Ergebnisse. Auswertung und graphische Darstellung der Ergebnisse mittels MATLAB. Absolute Häufigkeiten, Histogramm, Stabdiagramm, Kreisdiagramm.


Histogramm
Absolute Haeufigkeiten der Zweitfaecher
Physik, Biologie, Geographie, Geschichte, Informatik,
Sport, Chemie, Italienisch, Deutsch, Englisch, Franzoesisch,
Spanisch, Latein, Musikerziehung, Ernaehrung
15
10
5
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15


Stabdiagramm
Absolute Haeufigkeiten der Zweitfaecher
15
10
5
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15


Stabdiagramm
Absolute Haeufigkeiten der Zweitfaecher
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0 5 10 15


Kreisdiagramm
Absolute Haeufigkeiten der Zweitfaecher
Physik
Sprachen u.a.
Chemie
Sport
Informatik
Biologie
Geschichte
Geographie


Histogramm
Absolute Haeufigkeiten Schultyp
Realgymnasium, Oberstufenrealgymnasium, HTL, HAK, Abendmatura
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
1
2
3
4
5

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Zweites Fach des Lehramtsstudiums
% Zusaetzliche Angabe des Schultyps bei Zweitfach Physik
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
close all
clc
format long e
FontSize = 15;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ergebnisse
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

counter = 0;

counter = counter + 1;
Name{counter} = 'Physik';
AnzahlProGruppe(counter,:) = [2,3,3,0,1,2,0,0,0,2,1,1];
% Realgymnasium 5, Oberstufenrealgymnasium 4, HTL 3, HAK 2, Abendmatura 1
Schultyp{counter}{1} = 'Realgymnasium';
Schultyp{counter}{2} = 'Oberstufenrealgymnasium';
Schultyp{counter}{3} = 'HTL';
Schultyp{counter}{4} = 'HAK';
Schultyp{counter}{5} = 'Abendmatura';
AnzahlSchultyp = [5,4,3,2,1];

% Biologie, Umweltkunde
counter = counter + 1;
Name{counter} = 'Biologie';
AnzahlProGruppe(counter,:) = [0,1,0,0,3,1,2,1,0,1,2,0];

% Geographie, Wirtschaftskunde
counter = counter + 1;
Name{counter} = 'Geographie';
AnzahlProGruppe(counter,:) = [2,1,0,1,1,1,2,0,1,0,1,0];

% Geschichte, Sozialbildung, Politische Bildung
counter = counter + 1;
Name{counter} = 'Geschichte';
AnzahlProGruppe(counter,:) = [0,0,3,1,0,0,0,1,1,0,0,1];

counter = counter + 1;
Name{counter} = 'Informatik';
AnzahlProGruppe(counter,:) = [0,2,0,0,0,1,0,1,0,0,0,0];

% Bewegung, Sport
counter = counter + 1;
Name{counter} = 'Sport';
AnzahlProGruppe(counter,:) = [0,0,0,1,1,0,1,0,0,0,1,0];

counter = counter + 1;
Name{counter} = 'Chemie';
AnzahlProGruppe(counter,:) = [0,1,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0];

counter = counter + 1;
Name{counter} = 'Italienisch';
AnzahlProGruppe(counter,:) = [1,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0];
```

```
counter = counter + 1;
Name{counter} = 'Deutsch';
AnzahlProGruppe(counter,:) = [0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0];

counter = counter + 1;
Name{counter} = 'Englisch';
AnzahlProGruppe(counter,:) = [0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0];

counter = counter + 1;
Name{counter} = 'Franzoesisch';
AnzahlProGruppe(counter,:) = [1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0];

counter = counter + 1;
Name{counter} = 'Spanisch';
AnzahlProGruppe(counter,:) = [0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0];

counter = counter + 1;
Name{counter} = 'Latein';
AnzahlProGruppe(counter,:) = [0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0];

counter = counter + 1;
Name{counter} = 'Musikerziehung';
AnzahlProGruppe(counter,:) = [0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0];

% Ernaehrung, Haushalt
counter = counter + 1;
Name{counter} = 'Ernaehrung';
AnzahlProGruppe(counter,:) = [1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0];

Name
AnzahlProGruppe

pause

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Anordnung der Daten und graphische Darstellung
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Ergebnisse Zweitfach als geordnete Liste (Physik = 1, Biologie = 2 etc.)
GeordneteListeZweitfach = [];
for Zeile = 1:size(AnzahlProGruppe,1)
    for Spalte = 1:size(AnzahlProGruppe,2)
        Aux = ones(AnzahlProGruppe(Zeile,Spalte),1);
        GeordneteListeZweitfach = [GeordneteListeZweitfach;Zeile*Aux];
    end
end
GeordneteListeZweitfach

xMin = min(GeordneteListeZweitfach);
xMax = max(GeordneteListeZweitfach);
Faecher1 = 'Physik, Biologie, Geographie, Geschichte, Informatik,';
Faecher2 = 'Sport, Chemie, Italienisch, Deutsch, Englisch, Franzoesisch,';
Faecher3 = 'Spanisch, Latein, Musikerziehung, Ernaehrung';

% Histogramm (Zweitfach)
hist(GeordneteListeZweitfach,[xMin:xMax])
colormap(winter)
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
title({'Histogramm';'Absolute Haeufigkeiten der Zweitfaecher';...
```

```
    Faecher1;Faecher2;Faecher3})
print -f1 -r600 -depsc Zweitfach_Plot1

% Kontrolle (Haeufigkeiten)
for counter = 1:length(Name)
    Haeufigkeiten(counter,1) = sum(AnzahlProGruppe(counter,:));
end
Haeufigkeiten

pause

% Stabdiagramm (Zweitfach)
close all
%bar(GeordneteListeZweitfach,colormap(spring))
bar(Haeufigkeiten)
colormap(winter)
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
title({'Stabdiagramm';'Absolute Haeufigkeiten der Zweitfaecher'})
print -f1 -r600 -depsc Zweitfach_Plot2

pause

close all
barh(Haeufigkeiten)
colormap(winter)
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
title({'Stabdiagramm';'Absolute Haeufigkeiten der Zweitfaecher'})
print -f1 -r600 -depsc Zweitfach_Plot3

pause

% Kreisdiagramm (Zweitfach)
close all
Faecher = {'Physik','Biologie','Geographie','Geschichte','Informatik',...
    'Sport','Chemie','Sprachen u.a.',' ',' ',' ',' ',' ',' ',' '};
pie(Haeufigkeiten,Faecher)
colormap(winter)
set(gca,'FontSize',FontSize);
title({'Kreisdiagramm';'Absolute Haeufigkeiten der Zweitfaecher'})
print -f1 -r600 -depsc Zweitfach_Plot4

pause

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ergebnisse Schultyp zu Zweitfach Physik als geordnete Liste
% Realgymnasium = 1, Oberstufenrealgymnasium = 2 etc.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Daten
GeordneteListeSchultyp = [ones(5,1);2*ones(4,1);3*ones(3,1);4*ones(2,1)];
GeordneteListeSchultyp = [GeordneteListeSchultyp;5];
GeordneteListeSchultyp
xMin = min(GeordneteListeSchultyp);
xMax = max(GeordneteListeSchultyp);

% Histogramm (Schultyp Physik)
close all
hist(GeordneteListeSchultyp,[xMin:xMax])
```

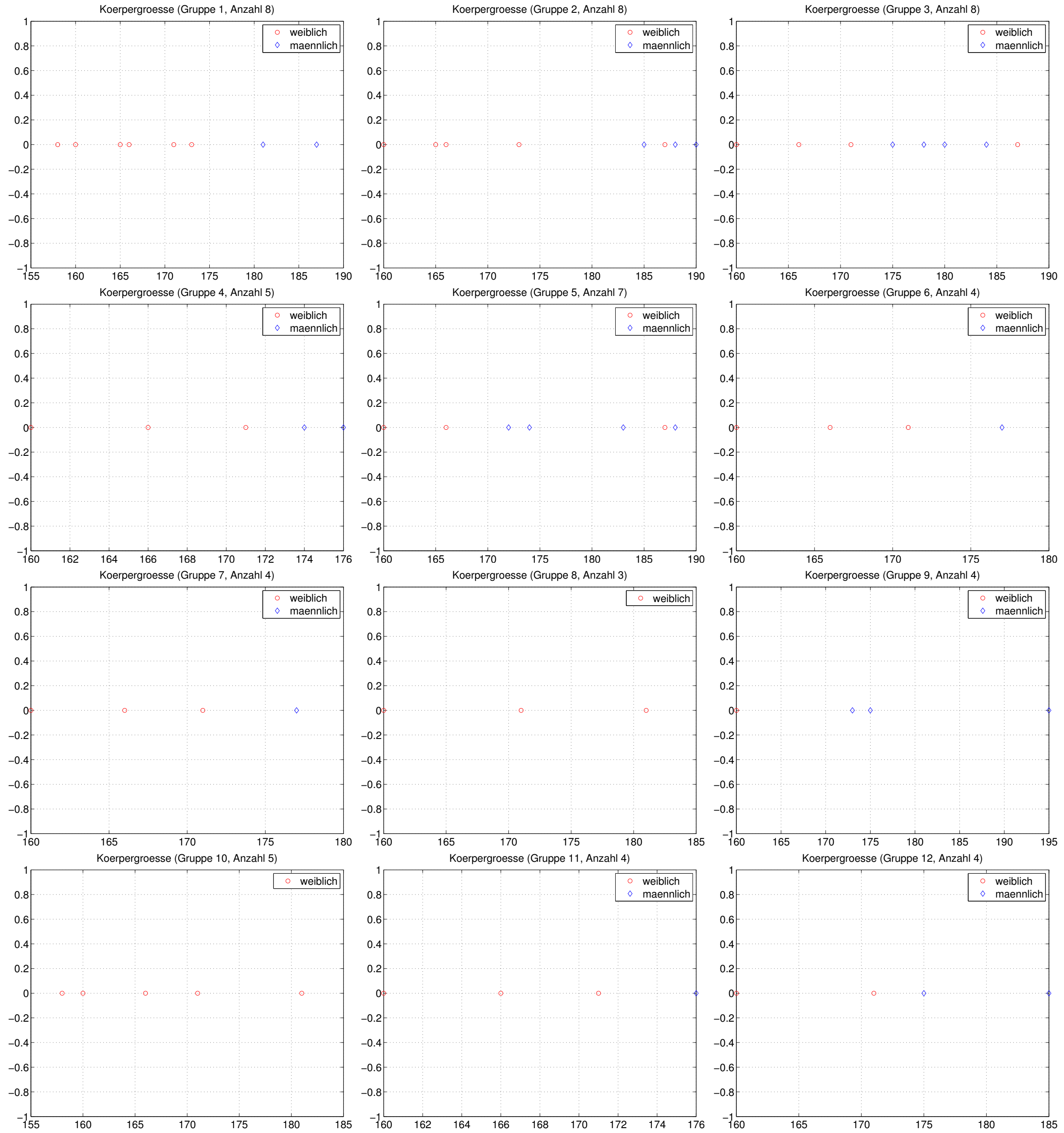
```
colormap(winter)
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
title({'Histogramm';'Absolute Haeufigkeiten Schultyp';
'Realgymnasium, Oberstufenrealgymnasium, HTL, HAK, Abendmatura'})
print -f1 -r600 -depsc Zweitfach_Plot5

pause

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Kontrolle
% Gueltige Angaben pro Gruppe
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Quersumme = [7,8,8,5,6,6,5,3,4,5,5,2];

for counter = 1:length(Quersumme)
    Kontrolle(counter,1) ...
        = Quersumme(counter) - sum(AnzahlProGruppe(:,counter));
end
Kontrolle = max(abs(Kontrolle))

GueltigeErgebnisse = sum(Quersumme)
UngueltigeErgebisse = 2

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

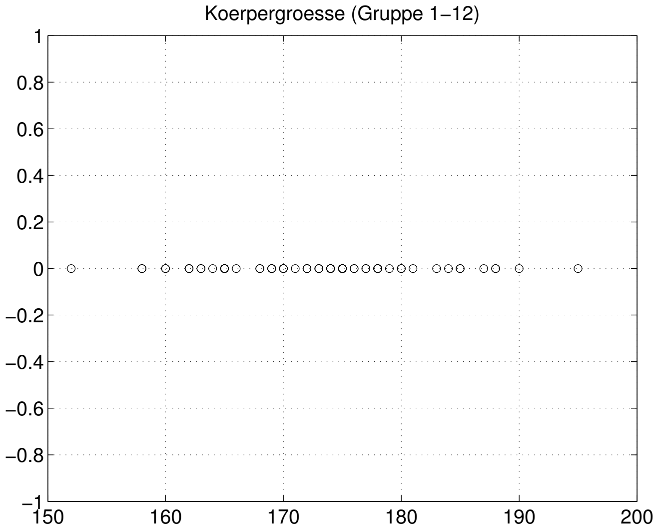
Kapitel 4

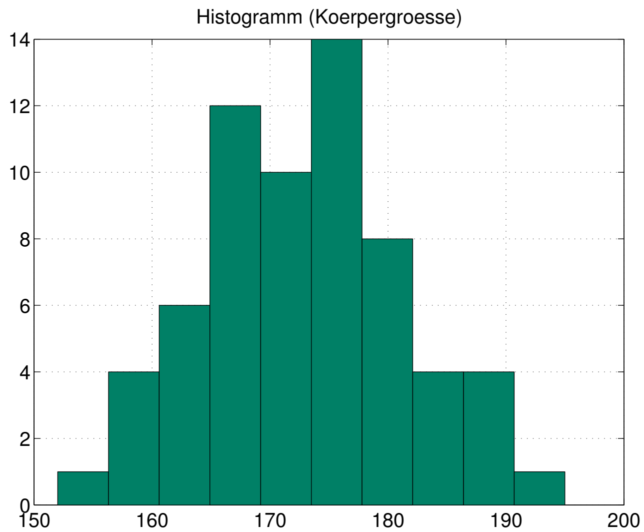
Körpergröße

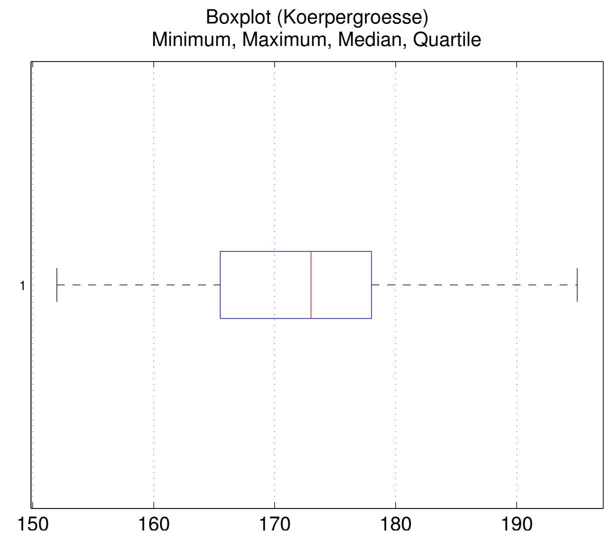
Aufgabenstellung. *Angabe von Geschlecht und Körpergröße.*

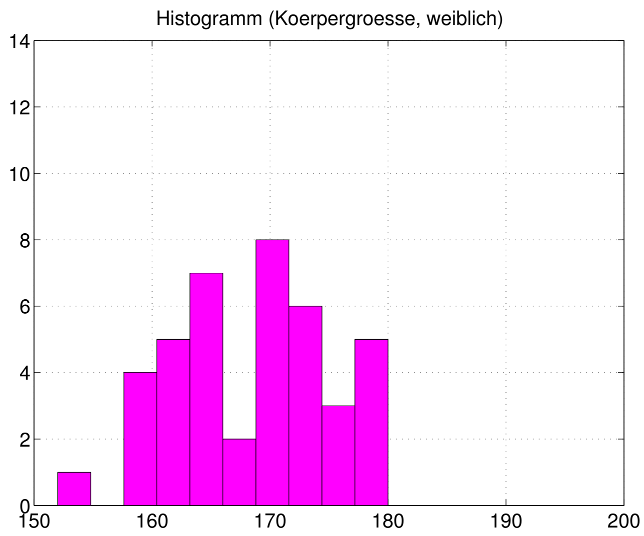
Ergebnisse (Donnerstag, 28. März). Auswertung und graphische Darstellung der Ergebnisse mittels MATLAB. Angabe der Daten, Histogramme, Boxplots.

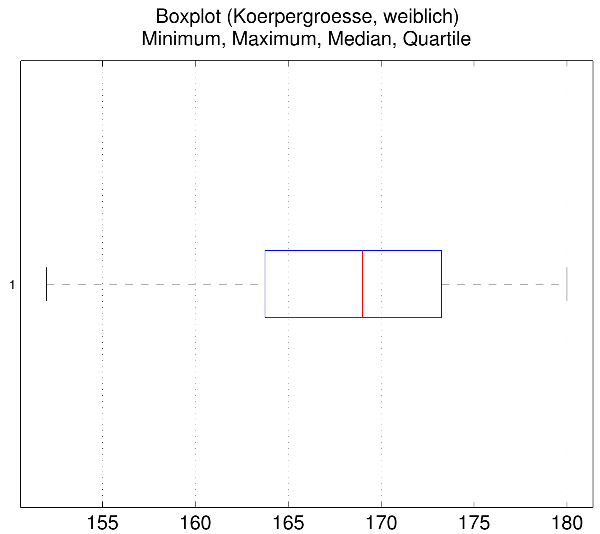

Koerpergroesse (Gruppe 1, Anzahl 8)
weiblich
maennlich
Koerpergroesse (Gruppe 2, Anzahl 8)
weiblich
maennlich
Koerpergroesse (Gruppe 3, Anzahl 8)
weiblich
maennlich
Koerpergroesse (Gruppe 4, Anzahl 5)
weiblich
maennlich
Koerpergroesse (Gruppe 5, Anzahl 7)
weiblich
maennlich
Koerpergroesse (Gruppe 6, Anzahl 4)
weiblich
maennlich
Koerpergroesse (Gruppe 7, Anzahl 4)
weiblich
maennlich
Koerpergroesse (Gruppe 8, Anzahl 3)
weiblich
Koerpergroesse (Gruppe 9, Anzahl 4)
weiblich
maennlich
Koerpergroesse (Gruppe 10, Anzahl 5)
weiblich
Koerpergroesse (Gruppe 11, Anzahl 4)
weiblich
maennlich
Koerpergroesse (Gruppe 12, Anzahl 4)
weiblich
maennlich

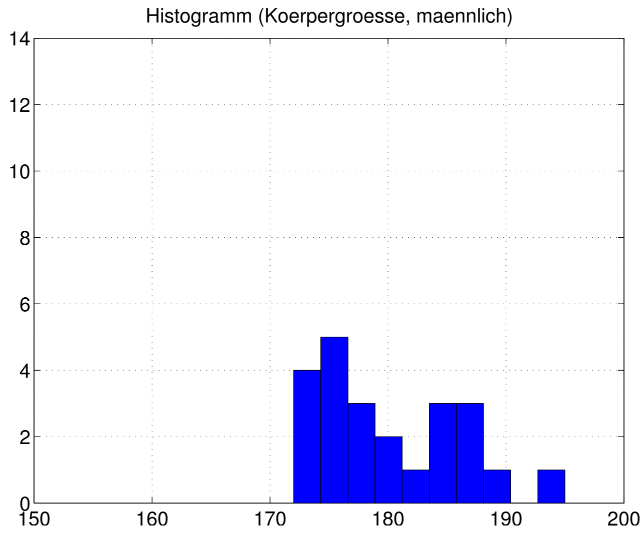

Koerpergroesse (Gruppe 1−12)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
150
160
170
180
190
200

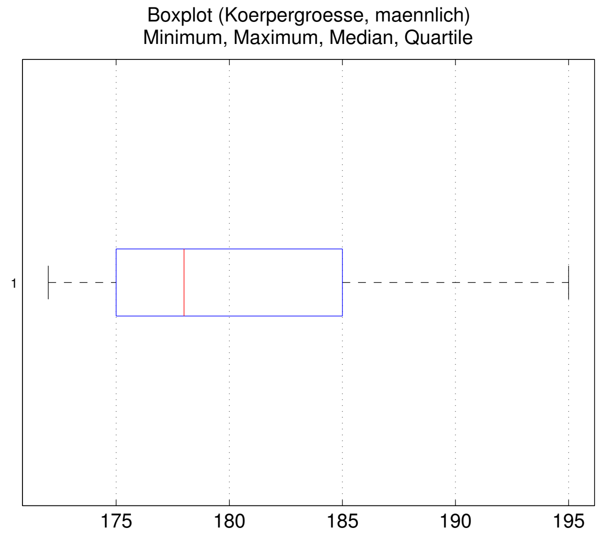

Histogramm (Koerpergroesse)
14
12
10
8
6
4
2
0
150
160
170
180
190
200


Boxplot (Koerpergroesse)
Minimum, Maximum, Median, Quartile
1
150
160
170
180
190


Histogramm (Koerpergroesse, weiblich)
0
2
4
6
8
10
12
14
150
160
170
180
190
200


Boxplot (Koerpergroesse, weiblich)
Minimum, Maximum, Median, Quartile
1
155
160
165
170
175
180


Histogramm (Koerpergroesse, maennlich)
0
2
4
6
8
10
12
14
150
160
170
180
190
200


Boxplot (Koerpergroesse, maennlich)
Minimum, Maximum, Median, Quartile
1
175
180
185
190
195

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Geschlecht, Koerpergroesse
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
close all
clc
format long e
FontSize = 15;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Daten
% weiblich 1, maennlich 2
% Fuer Legende ev. Umordnung der Daten [1,2,...]
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Geschlecht = 1;
Groesse = 2;

% Gruppe 1
gruppe = 1;
Gruppe{gruppe}{Geschlecht} = [1,2,1,1,1,1,2,1];
NurDamen{gruppe} = 0;
Gruppe{gruppe}{Groesse} = [160,181,171,166,158,165,187,173];

% Gruppe 2
gruppe = 2;
Gruppe{gruppe}{Geschlecht} = [1,2,2,1,2,1,1,1];
NurDamen{gruppe} = 0;
Gruppe{gruppe}{Groesse} = [162,188,190,174,185,162,179,169];

% Gruppe 3
gruppe = 3;
Gruppe{gruppe}{Geschlecht} = [1,2,1,1,2,2,1,2];
NurDamen{gruppe} = 0;
Gruppe{gruppe}{Groesse} = [169,178,165,168,184,180,158,175];

% Gruppe 4
gruppe = 4;
Gruppe{gruppe}{Geschlecht} = [1,2,1,1,2];
NurDamen{gruppe} = 0;
Gruppe{gruppe}{Groesse} = [165,174,173,160,176];

% Gruppe 5
gruppe = 5;
Gruppe{gruppe}{Geschlecht} = [1,2,2,1,2,2,1];
NurDamen{gruppe} = 0;
Gruppe{gruppe}{Groesse} = [178,172,174,172,188,183,175];

% Gruppe 6
gruppe = 6;
Gruppe{gruppe}{Geschlecht} = [1,2,1,1];
NurDamen{gruppe} = 0;
Gruppe{gruppe}{Groesse} = [170,177,163,162];

% Gruppe 7
gruppe = 7;
Gruppe{gruppe}{Geschlecht} = [1,2,1,1];
NurDamen{gruppe} = 0;
Gruppe{gruppe}{Groesse} = [174,177,178,170];
```

```
% Gruppe 8
gruppe = 8;
Gruppe{gruppe}{Geschlecht} = [1,1,1];
NurDamen{gruppe} = 1;
Gruppe{gruppe}{Groesse} = [178,175,163];

% Gruppe 9
gruppe = 9;
Gruppe{gruppe}{Geschlecht} = [1,2,2,2];
NurDamen{gruppe} = 0;
Gruppe{gruppe}{Groesse} = [164,173,195,175];

% Gruppe 10
gruppe = 10;
Gruppe{gruppe}{Geschlecht} = [1,1,1,1,1];
NurDamen{gruppe} = 1;
Gruppe{gruppe}{Groesse} = [172,168,169,180,169];

% Gruppe 11
gruppe = 11;
Gruppe{gruppe}{Geschlecht} = [1,2,1,1];
NurDamen{gruppe} = 0;
Gruppe{gruppe}{Groesse} = [165,176,175,152];

% Gruppe 12
gruppe = 12;
Gruppe{gruppe}{Geschlecht} = [1,2,1,2];
NurDamen{gruppe} = 0;
Gruppe{gruppe}{Groesse} = [170,175,165,185];

% Darstellung
for gruppe = 1:length(Gruppe)
    close all
    Anzahl(gruppe) = length(Gruppe{gruppe}{Geschlecht});
    for j = 1:Anzahl(gruppe)
        if Gruppe{gruppe}{Geschlecht}(j) == 1
            plot(Gruppe{1}{Groesse}(j),0,'ro')
            hold on
        else
            plot(Gruppe{gruppe}{Groesse}(j),0,'bd')
        end
    end
    grid on
    set(gca,'FontSize',FontSize);
    if NurDamen{gruppe} == 0
        legend('weiblich','maennlich')
    else
        legend('weiblich')
    end
    title(['Koerpergroesse (Gruppe ',num2str(gruppe),', Anzahl ',num2str
        (Anzahl(gruppe)),')'])

    if gruppe == 1
        print -f1 -r600 -depsc Koerpergroesse_Plot1
    end
    if gruppe == 2
        print -f1 -r600 -depsc Koerpergroesse_Plot2
    end
    if gruppe == 3
```

```
        print -f1 -r600 -depsc Koerpergroesse_Plot3
    end
    if gruppe == 4
        print -f1 -r600 -depsc Koerpergroesse_Plot4
    end
    if gruppe == 5
        print -f1 -r600 -depsc Koerpergroesse_Plot5
    end
    if gruppe == 6
        print -f1 -r600 -depsc Koerpergroesse_Plot6
    end
    if gruppe == 7
        print -f1 -r600 -depsc Koerpergroesse_Plot7
    end
    if gruppe == 8
        print -f1 -r600 -depsc Koerpergroesse_Plot8
    end
    if gruppe == 9
        print -f1 -r600 -depsc Koerpergroesse_Plot9
    end
    if gruppe == 10
        print -f1 -r600 -depsc Koerpergroesse_Plot10
    end
    if gruppe == 11
        print -f1 -r600 -depsc Koerpergroesse_Plot11
    end
    if gruppe == 12
        print -f1 -r600 -depsc Koerpergroesse_Plot12
    end
    pause
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Auflistung und Darstellung aller Daten
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

close all

ListeGeschlecht = [];
ListeGroesse = [];
for gruppe = 1:length(Gruppe)
    ListeGeschlecht = [ListeGeschlecht;Gruppe{gruppe}{Geschlecht}'];
    ListeGroesse = [ListeGroesse;Gruppe{gruppe}{Groesse}'];
end
ListeGeschlecht
AnzahlStudierende = length(ListeGeschlecht)
Kontrolle = sum(Anzahl)
pause
clc
ListeGroesse
pause

% Graphische Darstellung
plot(ListeGroesse,0*ListeGroesse,'ko')
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
title('Koerpergroesse (Gruppe 1-12)')
print -f1 -r600 -depsc Koerpergroesse_Plot13
pause
```

```
close all

% Geordnete Liste
ListeAngeordnet = sort(ListeGroesse)
pause

% Histogramm
hist(ListeGroesse)
colormap summer
axis([150,200,0,14])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
title({'Histogramm (Koerpergroesse)'})
print -f1 -r600 -depsc Koerpergroesse_Plot14
pause

close all

% Boxplot
boxplot(ListeGroesse,'orientation','horizontal')
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
title({'Boxplot (Koerpergroesse)';'Minimum, Maximum, Median, Quartile'})
print -f1 -r600 -depsc Koerpergroesse_Plot15
pause

close all

% Histogramm getrennt nach Geschlecht
Weiblich = find(ListeGeschlecht == 1);
hist(ListeGroesse(Weiblich))
colormap spring
axis([150,200,0,14])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
title({'Histogramm (Koerpergroesse, weiblich)'})
print -f1 -r600 -depsc Koerpergroesse_Plot16
pause

close all

% Boxplot
boxplot(ListeGroesse(Weiblich),'orientation','horizontal')
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
title({'Boxplot (Koerpergroesse, weiblich)';'Minimum, Maximum, Median,
    Quartile'})
print -f1 -r600 -depsc Koerpergroesse_Plot17
pause

close all

% Histogramm getrennt nach Geschlecht
Maennlich = find(ListeGeschlecht == 2);
hist(ListeGroesse(Maennlich))
colormap winter
axis([150,200,0,14])
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
title({'Histogramm (Koerpergroesse, maennlich)'})
```

```
print -f1 -r600 -depsc Koerpergroesse_Plot18
pause

close all

% Boxplot
boxplot(ListeGroesse(Maennlich),'orientation','horizontal')
grid on
set(gca,'FontSize',FontSize);
title({'Boxplot (Koerpergroesse, maennlich)';'Minimum, Maximum, Median,
    Quartile'})
print -f1 -r600 -depsc Koerpergroesse_Plot19
pause

close all

Kontrolle = 1
hist([ListeGroesse(Maennlich);ListeGroesse(Weiblich)])

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

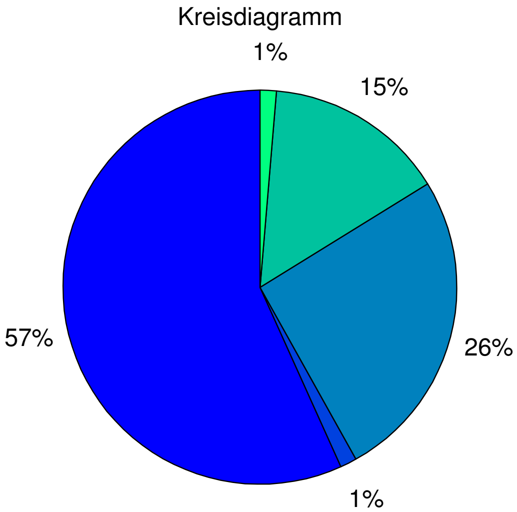
Kapitel 5

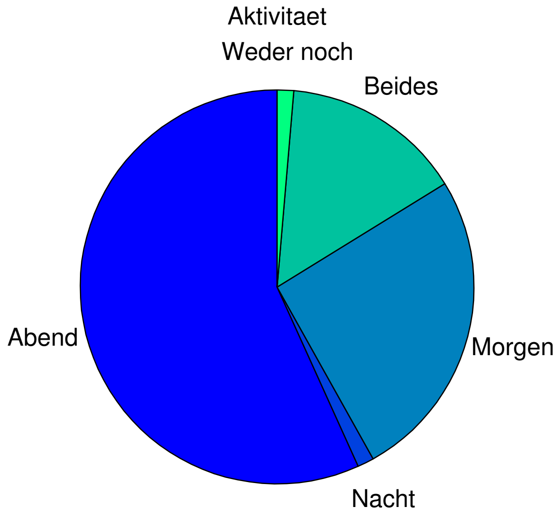
Aktivität

Aufgabenstellung. Beantwortung der Frage *Morgenmensch und / oder Abendmensch?*

Ergebnisse (Montag, 1. April).
Gültige Antworten
9 + 5 + 7 + 5 + 5 + 5 + 3 + 6 + 7 + 7 + 8 + 7 = 74
Abendmensch
4 + 3 + 4 + 3 + 3 + 5 + 3 + 4 + 3 + 3 + 3 + 4 = 42
Nachtmensch
0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1
Morgenmensch
4 + 2 + 2 + 0 + 1 + 0 + 0 + 2 + 2 + 3 + 2 + 1 = 19
Beides
1 + 0 + 0 + 2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1 + 3 + 2 = 11
Weder noch
0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1

Graphische Darstellung.
Graphische Darstellung der Ergebnisse mittels MATLAB. Kreisdiagramm.


Kreisdiagramm
1%
15%
57%
26%
1%


Aktivitaet
Weder noch
Beides
Abend
Morgen
Nacht

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Aktivitaet
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
close all
clc
format long e
FontSize = 15;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Abendmensch
Ergebnis{1} = [4,3,4,3,3,5,3,4,3,3,3,4];
% Nachtmensch
Ergebnis{2} = [0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0];
% Morgenmensch
Ergebnis{3} = [4,2,2,0,1,0,0,2,2,3,2,1];
% Beides
Ergebnis{4} = [1,0,0,2,0,0,0,0,2,1,3,2];
% WederNoch
Ergebnis{5} = [0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0];

% Kreisdiagramm
for k = 1:5
    Haeufigkeiten(k) = sum(Ergebnis{k});
end
subplot(1,2,1)
pie(Haeufigkeiten)
title('Kreisdiagramm')
set(gca,'FontSize',FontSize);
subplot(1,2,2)
Typen = {'Abend ','Nacht','  Morgen','Beides','Weder noch'};
pie(Haeufigkeiten,Typen)
title('Aktivitaet')
colormap(winter)
set(gca,'FontSize',FontSize);
print -f1 -r600 -depsc Aktivitaet_Plot1

% Kontrolle
Kontrollsumme = [9,5,7,5,5,5,3,6,7,7,8,7];
for gruppe = 1:12
    Summe(gruppe) = 0;
    for k = 1:5
        Summe(gruppe) = Summe(gruppe) + Ergebnis{k}(gruppe);
    end
end
Kontrolle = (Summe - Kontrollsumme)'

% Anzahl Studierende
Anzahl = sum(Kontrollsumme)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

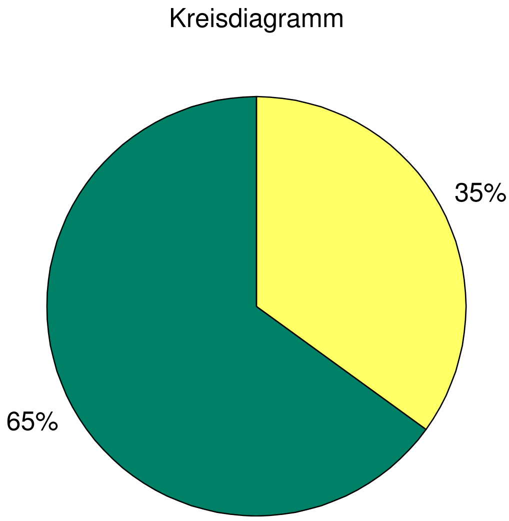
Kapitel 6

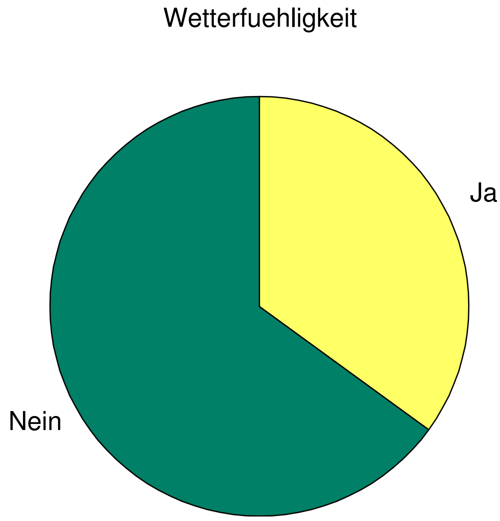
Wetterfühligkeit

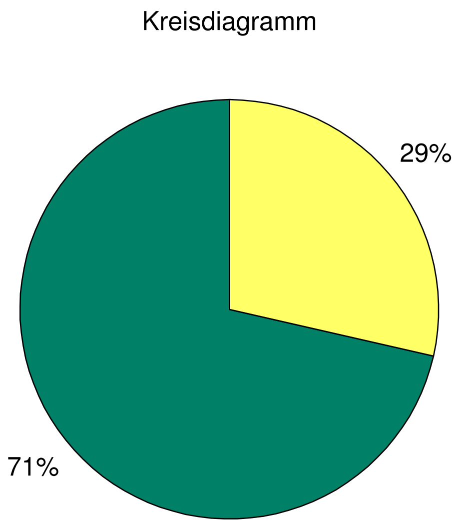
Aufgabenstellung. Beantwortung der Frage *Wetterfühlig?*

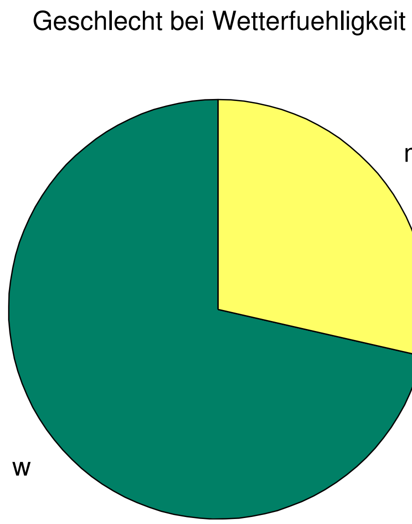
Ergebnisse (Donnerstag, 4. April).
Gültige Antworten
Nein
5 + 4 + 5 + 2 + 6 + 2 + 0 + 3 + 3 + 6 + 2 + 1
Ja
1 + 3 + 3 + 3 + 1 + 3 + 3 + 0 + 1 + 0 + 1 + 2
In diesem Fall zusätzliche Angabe des Geschlechtes

Graphische Darstellung.
Graphische Darstellung der Ergebnisse mittels MATLAB. Kreisdiagramm.


Kreisdiagramm
35%
65%


Wetterfuehligkeit
Ja
Nein


Kreisdiagramm
29%
71%


Geschlecht bei Wetterfuehligkeit
m
w

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Wetterfuehligkeit
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
close all
clc
format long e
FontSize = 15;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Nein
Nein = [5,4,5,2,6,2,0,3,3,6,2,1]
% Ja
Ja = [1,3,3,3,1,3,3,0,1,0,1,2]

% Kreisdiagramm
HaeufigkeitNein = sum(Nein)
HaeufigkeitJa = sum(Ja)
subplot(1,2,1)
pie([HaeufigkeitNein,HaeufigkeitJa])
title('Kreisdiagramm')
set(gca,'FontSize',FontSize);
subplot(1,2,2)
Typen = {'Nein','Ja'};
pie([HaeufigkeitNein,HaeufigkeitJa],Typen)
title('Wetterfuehligkeit')
colormap(summer)
set(gca,'FontSize',FontSize);
print -f1 -r600 -depsc Wetterfuehligkeit_Plot1
pause

% Anzahl Frauen / Maenner bei Wetterfuehligen
close all
HaeufigkeitJaMaennlich = 6
HaeufigkeitJaWeiblich = HaeufigkeitJa - HaeufigkeitJaMaennlich
subplot(1,2,1)
pie([HaeufigkeitJaWeiblich,HaeufigkeitJaMaennlich])
title('Kreisdiagramm')
set(gca,'FontSize',FontSize);
subplot(1,2,2)
Typen = {'w','m'};
pie([HaeufigkeitJaWeiblich,HaeufigkeitJaMaennlich],Typen)
title('Geschlecht bei Wetterfuehligkeit')
colormap(summer)
set(gca,'FontSize',FontSize);
print -f1 -r600 -depsc Wetterfuehligkeit_Plot2

% Anzahl Studierende
Anzahl = HaeufigkeitNein + HaeufigkeitJa

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Teil IV

Anhang

Ablauf

Das Proseminar findet jeweils mittwochs statt. Für jede Proseminareinheit wird ein Übungsblatt mit 6 Aufgaben im OLAT-Kurs zur Vorlesung bereitgestellt. Die Studierenden haben dieses und die von ihnen gelösten Aufgaben bis jeweils Mittwoch, 10:00 im OLAT anzukreuzen.
Darüber hinaus finden zwei Klausuren statt, die erste in der Mitte vom Semester (10. Mai 2019, 15 - 17 Uhr) und die zweite am Ende des Semesters (28. Juni 2019, 12 - 14 Uhr). Die Nachklausur findet am 25. September 2019 von 10 bis 12 Uhr statt und ersetzt im Falle des Antritts die schlechtere der beiden Klausuren.

Anwesenheit

Es besteht Anwesenheitspflicht, zweimaliges Fehlen wird jedoch toleriert.

Benotung

Die Abschlussnote setzt sich aus der Anzahl der angekreuzten Aufgaben, der Anzahl und Qualität der Tafelvorträge und den Klausurergebnissen zusammen.
Dabei wird die Note wie folgt berechnet:

- Tafelvorträge und Mitarbeit (20%),
- Anzahl der angekreuzten Aufgaben (40%) und
- Gesamtpunkteanzahl bei den Klausuren (40%).

Das Proseminar kann nur dann positiv abgeschloßen werden, falls

- mindestens 50% der Aufgaben angekreuzt wurden (wobei die zwei Blätter mit den wenigsten Kreuzen nicht mitgerechnet werden),
- mindestens 2 positive Tafelvorträge absolviert wurden und
- mindestens 50% der Punkte in Summe bei beiden Klausuren erreicht wurden.

Präsentation von Aufgaben

Zur Bewertung der Präsentation der Aufgaben wird das Erfüllen der nachstehenden Kriterien bewertet.

1. Sicheres Vorführen einer Lösung der gestellten Aufgabe,
2. folgerichtiges Argumentieren,
3. anschauliches Erklären der Lösung und
4. sicheres Beantworten von Zwischenfragen durch Übungsleiter oder Kommilitonen.

Wiederholung: Mengenlehre

Es sei I eine Indexmenge, für $i \in I$ sei A_i eine Menge.

- $\bigcup_{i \in I} A_i := \{\omega \in \Omega \colon \exists\, i \in I \colon \omega \in A_i\}$ (Vereinigung)
- $\bigcap_{i \in I} A_i := \{\omega \in \Omega \colon \forall\, i \in I \colon \omega \in A_i\}$ (Durchschnitt)
- $A^{\mathsf{c}} := \{\omega \in \Omega \colon \omega \notin A\}$, wobei $A \subset \Omega$ (Komplement)

Für eine Funktion $X : \Omega \to \Sigma$ und Teilmengen $A \subset \Omega$, $B \subset \Sigma$ ist

- $X(A) := \{X(\omega) \colon \omega \in A\}$ (Bildmenge von A unter X)
- $X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \in B\}$ (Urbildmenge von B unter X)

(P1) Es sei Ω eine Menge. Zeigen Sie für zwei Teilmengen $A, B \subset \Omega$, dass $A \setminus B = A \cap B^{\mathsf{c}}$ gilt. Fertigen Sie weiters ein entsprechendes Mengendiagramm an.

(P2) Zeigen Sie, dass für zwei Mengen A und B stets

(a) $A \cup B = A \uplus (B \setminus A)$

(b) $B = (A \cap B) \uplus (B \setminus A)$

gilt. Fertigen Sie entsprechende Mengendiagramme an.

(P3) Von den 1348 Schülerinnen und Schülern einer Schule betreibt ein Großteil Wintersport. 822 gehen Schifahren, 433 Eislaufen, 250 Schülerinnen und Schüler gehen Rodeln. 210 Personen betreiben sowohl das Schifahren als auch das Eislaufen, 118 Schüler und Schülerinnen gehen Rodeln und Schifahren, es gibt außerdem 115 Personen, die Rodeln und Eislaufen gehen. Es gibt insgesamt aber nur 54 Schülerinnen und Schüler, die alle drei Sportarten an.

(a) Wie viele Schülerinnen und Schüler betreiben genau eine Wintersportart?

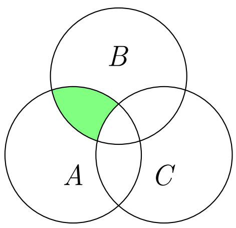
(b) Wie viele Schülerinnen und Schüler betreiben keinen Wintersport?

(P4) Es seien A, B, C Mengen. Stellen Sie folgenden Mengen mit Venn-Diagrammen dar:

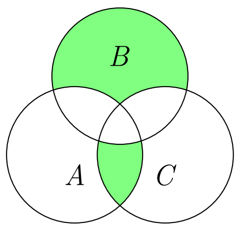
(a) $A \cap (B \cup C)$, (b) $A \cup (B \cap C)$, (c) $A \backslash (B \cup C)$, (d) $A \cap (B^{\mathsf{c}} \cup C)$

(P5) Beschreiben Sie die eingefärbten Flächen in folgenden Venn-Diagrammen:

(a)



(b)



(P6) Potenzmenge: Gegeben seien folgende Mengen

$$\Omega_1 = \{a, b\}, \quad \Omega_2 = \{a, b, c\}.$$

Entscheiden Sie, ob folgende Beziehungen wahr oder falsch sind.

(a) $a \in \mathcal{P}(\Omega_2)$

(b) $\{b\} \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$

(c) $\{\{c\}\} \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$

(d) $\varnothing \in \mathcal{P}(\Omega_2)$

(e) $\varnothing \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$

(f) $\Omega_1 \in \mathcal{P}(\Omega_2)$

(g) $\mathcal{P}(\Omega_1) \in \mathcal{P}(\Omega_2)$

(h) $\{\{a\},\{b\}\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega_1))$

(i) $|\mathcal{P}(\Omega_2)\backslash\mathcal{P}(\Omega_1)| = 4$

(P7) Es sei $\Omega = \{0,1,2,3,4\}^2$ sowie $X\colon \Omega \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x \cdot y$. Bestimmen Sie $X(\{1,2\} \times \{3,4\})$, $X(\Omega)$, $X^{-1}(\{0\})$ sowie $X^{-1}(\{4,5\})$.

(P8) Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq 2$. Berechnen Sie die Doppelsumme

$$\sum_{k=2}^{n} \sum_{l=1}^{m} (2k - 2l + 1).$$

Vorbereitungsaufgaben

(V1) Begründen Sie mithilfe von Venn-Diagrammen, dass folgende Gleichheit gilt:

$$(A \cap B^{\mathsf{c}} \cap C^{\mathsf{c}}) \cup (A \cap B \cap C^{\mathsf{c}}) \cup (A \cap B^{\mathsf{c}} \cap C) = A \backslash (B \cap C)$$

Beweisen Sie die Gleichheit unter Benutzung der Rechenregeln für Mengen.

(V2) Regeln von deMorgan: Gegeben sei eine Menge Ω, eine beliebige Indexmenge I sowie eine Familie von Teilmengen $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(\Omega)^I$. Zeigen Sie die Regeln von deMorgan:

(a) $\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right)^{\mathsf{c}} = \bigcap\limits_{i\in I} A_i^{\mathsf{c}}$ (b) $\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right)^{\mathsf{c}} = \bigcup\limits_{i\in I} A_i^{\mathsf{c}}$

(V3) Operationen auf Bildmengen: Gegeben seien zwei Mengen Ω und Σ, eine beliebige Indexmenge I sowie eine Abbildung $X\colon \Omega \to \Sigma$ und eine Familie von Teilmengen $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(\Omega)^I$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $X\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} X(A_i)$ (b) $X\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} X(A_i)$

Geben Sie ein Beispiel an, in welchem bei (b) eine echte Teilmengenrelation, also keine Gleichheit gilt.

(V4) Operationen auf Urbildmengen: Gegeben seien zwei Mengen Ω und Σ, eine beliebige Indexmenge J, eine Menge $B \subset \Sigma$ sowie eine Abbildung $X\colon \Omega \to \Sigma$ und eine Familie von Teilmengen $(B_j)_{j\in J} \in \mathcal{P}(\Sigma)^J$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $X^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} X^{-1}(B_j)$ (b) $X^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} X^{-1}(B_j)$

(c) $X^{-1}(B^{\mathsf{c}}) = (X^{-1}(B))^{\mathsf{c}}$

(V5) Operationen auf Bild- und Urbildmengen II: Gegeben seien eine Abbildung $f : \Omega \to \Sigma$ sowie $A, A_1, A_2 \subset \Omega$ und $B, B_1, B_2 \subset \Sigma$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$

(b) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

(c) $(f|_A)^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)$

(d) $f^{-1}(f(A)) \supset A$. Ist f injektiv, so gilt die Gleichheit.

(e) $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Ist f surjektiv, so gilt die Gleichheit.

(V6) Gegeben sei eine Menge Ω und eine Abbildung $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Für $B \subset \mathbb{R}$ setzt man

$$\{X \in B\} := X^{-1}(B)$$

und speziell

$$\{a \le X \le b\} := \{X \in [a, b]\}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Analog definiert man entsprechende Urbildmengen für sämtliche Intervalle. Zeigen Sie für $B, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}$:

(a) $\{X \in B_1\} \cap \{X \in B_2\} = \{X \in B_1 \cap B_2\}$

(b) $\{X \in B_1\} \cup \{X \in B_2\} = \{X \in B_1 \cup B_2\}$

(c) Für B_1 und B_2 disjunkt: $\{X \in B_1 \uplus B_2\} = \{X \in B_1\} \uplus \{X \in B_2\}$

(d) $\{X \in B\}^{\mathsf{c}} = \{X \in B^{\mathsf{c}}\}$

(e) Wir nehmen an, dass es sich bei Ω um eine Menge von Personen handelt. Die Abbildung $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ ordne einer Person $\omega \in \Omega$ ihre Körpergröße $X(\omega)$ in cm zu. Weiters seien $B = B_1 = (150, 170)$ und $B_2 = [190, \infty)$. Interpretieren Sie die Mengen und Mengenoperationen aus (a) bis (d) in diesem Kontext.

Präsenzaufgaben

(1) Ergebnisraum

(a) Bearbeiten Sie folgende Schulbuchaufgabe:

A **87** Gib zum Zufallsexperiment die Grundmenge an.

a. In einer Urne liegen 10 Lose mit den Nummern 1 bis 10. Ein Los wird gezogen.

b. Von den vier Personen Walter, Xaver, Yannick und Zoltan werden zufällig zwei ausgewählt, wobei es auf die Reihenfolge der beiden gezogenen Personen nicht ankommt.

c. In einem Kaffeehaus gibt es die Eissorten Vanille, Schokolade, Erdbeere, Haselnuss und Zitrone. Für einen Überraschungseisbecher werden zufällig drei verschiedene Eissorten ausgewählt, wobei es auf die Reihenfolge der Sorten nicht ankommt.

Abbildung 1: aus Pauer, Franz; Scheirer-Weindorfer, Martina; Simon, Andreas; Stadler, Heinz: *Mathematik HAK 5, Schulbuch.* öbv Verlag. S. 22

(b) Geben Sie zu folgenden Zufallsexperimenten einen geeigneten Ergebnisraum an:

(i) Zwei Personen A und B tragen einen Tenniswettkampf aus. Sieger ist, wer als erster zwei Sätze gewonnen hat.

(ii) Ziehen von 6 Kugeln aus einer Urne, in welcher 45 mit den Zahlen von 1 bis 45 durchnummerierte Kugeln liegen, ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge.

(iii) Ziehen von 6 Kugeln aus einer Urne, in welcher 45 mit den Zahlen von 1 bis 45 durchnummerierte Kugeln liegen, mit Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge.

(iv) Ziehen von 4 Kugeln aus einer Urne, welche gefüllt mit 2 roten und 18 schwarzen ist, ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge.

(v) Anzahl der Anrufe bei einer bestimmten Telefonnummer zwischen 8 und 9 Uhr.

(2) Bearbeiten Sie folgende Schulbuchaufgabe:

AC **1.3** Zwei herkömmliche Würfel werden geworfen. A sei das Ereignis „Augensumme ist 7" und B „(Zumindest) ein Sechser erscheint".
a) Stelle Ω auf.
b) Modelliere A und B als Venn-Diagramm samt allen Elementarereignissen von $A \cup B$.
c) Beschreibe die Ereignisse $A \cap B$, $A \setminus B$, $\overline{A}$ und $\overline{B}$ in Worten.

Abbildung 2: aus Wessenberg, Brigitte; Hofbauer, Peter; Thurner, Daniel: *Kompetenz:Mathematik, Band 5 für Höhere Lehranstalten für Humanberufe.* hpt Verlag. S. 8

(3) Beim Roulett ist die Ergebnismenge $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 36\}$. Dabei soll davon ausgegangen werden, dass auf Dauer keine Zahl bevorzugt ausgespielt wird. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

(a) Erstes Dutzend $D = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$

(b) Impair $I = \{1, 3, 5, \ldots, 33, 35\}$

(c) Zweites Dutzend $A = \{13, 14, \ldots, 23, 24\}$

(d) $B = \{22, 23, 24, 25, 26, 27\}$

sowie $D \cap I$, $D \cup I$, $A \cap B$, $A \cup B$, $D \cap B$ und $I \setminus A$.

Vorbereitungsaufgaben

(V1) Rechenregeln für relative Häufigkeiten: Es seien Ω die Ergebnismenge bei einem Zufallsexperiment und $A, B \subset \Omega$. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega$ Ausgänge, die man bei n-facher Durchführung des Zufallsexperiments erhält. Für die relative Häufigkeit $R_n(A; \omega_1, \ldots, \omega_n)$ schreiben wir kurz $R_n(A)$. Zeigen Sie:

(a) $A \cap B = \varnothing \Longrightarrow R_n(A \uplus B) = R_n(A) + R_n(B)$

(b) $R_n(A \setminus B) = R_n(A) - R_n(A \cap B)$

(V2) In einer Urne sind 1000 Kugeln mit den Nummern 0 bis 999. Eine Kugel wird zufällig gezogen. Die Nummer der gezogenen Kugel sei X. Mit Hilfe von X definieren wir folgende Ereignisse:

(a) X ist durch 5 teilbar,

(b) X endet auf 0,

(c) X ist durch 3 teilbar,

(d) X ist durch 6 teilbar,

(e) X ist durch 10 teilbar,

(f) X ist durch 2 teilbar.

Nenne diese Ereignisse der Reihe nach A, B, C, D, E, F. Berechne die Wahrscheinlichkeiten von $A, F, A \cap F, D, E, D \cap E, A^c \cap F^c, A \cap B^c, A^c \cap B, A \cup B^c, A \cap E$.

(V3) Es sei Ω ein Ereignisraum und $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaßauf Ω. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) *Endliche Additivität*: Für endliche viele, paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, \ldots, A_K \subset \Omega$ gilt die Identität

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{K} A_k\right) = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(A_k)\,.$$

(b) *Komplementärereignis*: Für ein Ereignis $A \subset \Omega$ gilt

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)\,.$$

Insbesondere ist $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

(c) *Additionstheorem*: Für zwei Ereignisse A, B gilt

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\,.$$

(d) *Differenz*: Für die Mengendifferenz zweier Ereignisse A, B gilt

$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)\,.$$

(e) *Monotonie*: Für zwei Ereignisse $A, B \subset \Omega$ gilt die Relation

$$A \subseteq B \quad \Longrightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)\,.$$

(V4) Es seien $N \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$. Auf den Ereignisraum $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, N\}$ definieren wir ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ durch $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{c}{m^k}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Konstante c in Abhängigkeit von m und N, so dass $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω definiert.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse „gerade Zahl“ sowie „ungerade Zahl“. *Hinweis:* Unterscheiden Sie die Fälle, ob N gerade oder ungerade ist.

(V5) Bonferroni Ungleichung. Es sei Ω ein Ereignisraum, $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω. Zeigen Sie, dass für Ereignisse $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ gilt

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \geq \mathbb{P}(A_1) + \ldots + \mathbb{P}(A_n) - (n-1).$$

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion.

(V6) Würfel-Simulationen: Simulieren Sie in `R` die beiden Spiele des Chevalier de Méré nach folgender Anleitung:

(a) Generieren Sie 4 Ausgänge beim Werfen mit einem fairen Würfel mittels der Funktion `sample()`. Eine Hilfe zum Befehl erhalten Sie mit `?sample`. Nennen Sie den resultierenden Vektor `w`.

(b) Was liefert `w==6`?

(c) Was erhalten Sie mit `sum(w==6)`?

(d) Generieren Sie wiederum mittels `sample()` zweimal 24 Ausgänge beim Werfen mit einem fairen Würfel und nennen sie die Vektoren `w1` und `w2`.

(e) Was liefert `w1+w2==12`?

(f) Was erhalten Sie mit `sum(w1+w2==12)`?

(g) Simulieren Sie nun beide Spiele n-mal wie folgt:

```
for (k in 1:n){...}
```

Speichern Sie in jedem Durchgang in einem Vektor, ob eine Sechs beim ersten Spiel bzw. eine Doppelsechs beim zweiten Spiel eingetreten ist. Dies können Sie zum Beispiel wie folgt bewerkstelligen: Setzen Sie `Einfach6 = rep(0,n)` sowie `Doppel6 = rep(0,n)`. Weiters für das erste Spiel:

```
if (sum(w==6)>0){ Einfach6[k]=1 }
```

Für das zweite Spiel:

```
if (sum(w1+w2==12)>0){ Doppel6[k]=1 }
```

(h) Was erhalten Sie mit

`table(Einfach6)`, `table(Doppel6)` und `table(Einfach6,Doppel6)`?

(i) Wenden Sie auf obige Tabellen `barplot()` an. Was kann beobachtet werden?

Präsenzaufgaben

(1) Man nennt $A \in \mathcal{F}$ ein **fast unmögliches Ereignis**, falls $\mathbb{P}(A) = 0$ gilt. Ist hingegen $\mathbb{P}(A) = 1$, so nennt man A ein **fast sicheres Ereignis**. Zeigen Sie für zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$:

- (i) Ist A fast unmöglich, so ist $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ und $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B)$.
- (ii) Ist A fast sicher, so ist $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$ und $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$.

(2) Bestimmen Sie die Anzahl aller Möglichkeiten, indem Sie explizit eine Liste aller Möglichkeiten angeben.

- (a) In einer Urne befinden sich 2 weiße, 3 schwarze und 4 blaue Kugeln. Es werden 4 Kugeln mit einem Hineingreifen gezogen.
- (b) 2 Vögel setzen sich auf 6 Bäume. Mehrfachbesetzungen sind möglich. Die Vögel sind ununterscheidbar.
- (c) Wörter mit zwei verschiedenen Buchstaben aus den Buchstaben M,A,R,T,I,N.

Vorbereitungsaufgaben

(V1) Siebformel.

- (a) Es sei Ω eine Ereignismenge, $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω und $A, B, C \subset \Omega$. Zeigen Sie die Relation

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

und fertigen Sie ein geeignetes Mengendiagramm an.

- (b) Der Nachbar von Herrn K. verkauft Rasenmähroboter. Herr K. beobachtet dabei den Verkauf dieser Roboter sehr genau und hat drei Ereignisse besonders unter die Lupe genommen:

A: „für den Rasenmähroboter wird in der Lokalzeitung Werbung gemacht“,
B: „der Preis des Roboters wird erhöht“,
C: „es werden viele Roboter verkauft“.

Herr K. hat dabei festgestellt, dass die Wahrscheinlichkeit, für den Roboter Werbung zu machen, 55% beträgt, während mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% der Preis erhöht wird und mit 40%-iger Wahrscheinlichkeit viele Roboter verkauft werden. Außerdem hat er berechnet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass in der Lokalzeitung Werbung gemacht und der Preis erhöht wird, 30% ist. Weiters macht der Nachbar mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% in der Zeitung Werbung und verkauft viele Roboter und mit 10%-iger Wahrscheinlichkeit erhöht er den Preis und verkauft viele Roboter. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% treten zudem alle drei Ereignisse auf. Interpretieren Sie die nachfolgend angegebenen Ereignisse und berechnen Sie deren Wahrscheinlichkeiten:

- $A \cup B \cup C$,
- $(A^c \cap B^c) \cap C$,
- $(A^c \cap B^c) \cup C$.

(V2) Es sei Ω eine Ergebnismenge, $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω und A, B, C Ereignisse mit $\mathbb{P}(A^c) = 0.75$, $\mathbb{P}(B^c) = 0.65$, $\mathbb{P}(C) = 0.5$, $\mathbb{P}(A^c \cap B) = 0.25$, $\mathbb{P}(B^c \cup C^c) = 0.8$ und $\mathbb{P}(A \cap C) = 0$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(A \backslash B)$, $\mathbb{P}(A^c \cap B \cap C^c)$ sowie $P(A \cup B \cup C)$.

(V3) Ein Einzelhändler hat drei Staubsauger einer bestimmten Marke geliefert bekommen und überprüft deren Funktionstüchtigkeit, bevor er sie an seine Kunden weitergibt. Es bezeichne nun A_i, $i = 1, \ldots, 3$ das Ereignis, dass beim i-ten Staubsauger ein Defekt festgestellt wird.

(a) Beschreiben Sie mit Hilfe von A_1, A_2, A_3 und passenden Mengenoperationen die Ereignisse

- alle Staubsauger sind funktionstüchtig,
- nur der dritte Staubsauger ist defekt,
- mindestens ein Staubsauger ist defekt,
- höchstens ein Staubsauger ist defekt,
- der erste Staubsauger ist defekt und von den anderen beiden Geräten hat höchstens einer einen Fehler,
- genau zwei Staubsauger sind defekt.

Hinweis: Das Ereignis, dass alle Staubsauger defekt sind, lässt sich als $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ angeben.

(b) Wie lässt sich das Ereignis $A_1 \Delta A_2$ in Worten ausdrücken? *Hinweis:* Die symmetrische Differenz von Mengen M und N ist definiert als $M \Delta N = (M \backslash N) \cup (N \backslash M)$.

(c) Geben Sie einen Ergebnisraum Ω für das Zufallsexperiment sowie dazu konkret A_1, A_2, A_3 als Teilmengen von Ω an.

(V4) Es sei Ω eine Ereignismenge, $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen. Zeigen Sie

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_k).$$

(V5) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen und interpretieren Sie die Vandermondesche Identität, nach welcher für $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq m + n$ gilt, dass

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}.$$

Hinweis: $(x+1)^m (x+1)^n = (x+1)^{m+n}$, Koeffizientenvergleich

(V6) Geburtstagsparadoxon: Wir nehmen an, der Geburtstag einer Person sei gleichverteilt auf der Menge $\{1, \ldots, 365\}$. Simulieren Sie das Geburtstagsparadoxon in R nach folgender Anleitung:

(a) Simulieren Sie für 10 Personen den Geburtstag mittels dem Befehl `sample()`. Nennen Sie den resultierenden Vektor `w`.

(b) Finden Sie mit dem Befehl `anyDuplicated()` heraus ob zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben.

(c) Simulieren Sie nun obiges für $n = 15, \ldots 30$ Personen je mit einem Umfang von $k = 100$. Definieren Sie dazu eine 30×100 Matrix M mittels `M = matrix(0,m-15+1,k)` und setzen Sie in jedem Durchgang der Doppelschleife

```
for (n in 15:m){for (j in 1:k){...}}
```

den Eintrag $M_{n,j} = 1$ falls zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben.

(d) Verwenden Sie anschliessend `props = apply(M,1,function(x) table(x)/k)`. Was bewirkt dieser Befehl?

(e) Setzen sie weiters `colnames(props) = seq(15,30)` und wenden Sie danach `barplot()` auf `props` an. Was stellen Sie fest?

Präsenzaufgaben

(1) Sigma-Algebren I: Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Geben Sie drei verschiedene σ-Algebren auf Ω an mit jeweils unterschiedlicher Mächtigkeit. Begründen Sie jeweils, dass es sich tatsächlich um eine σ-Algebra handelt.

(2) Menge der beobachtbaren Ereignisse I: Adrian verteilt 5 Kugeln zufällig auf drei Kisten. Danach teilt er uns mit,

(a) ob in Kiste 1 eine gerade Anzahl von Kugeln liegt,

(b) die Summe der Kugeln in Kiste 1 und 2.

Wählen Sie eine geeignete Ergebnismenge, die alle auftretenden Ergebnisse beschreibt. Modellieren Sie die Menge der *beobachtbaren Ereignisse*, d. h. geben Sie eine geeignete σ-Algebra an, abhängig von der uns von Adrian gegebenen Information (Aussage (a) bzw. (b)).

PS Stochastik für Lehramtsstudierende SS 2019
Blatt 4 27. März 2019

Vorbereitungsaufgaben

(V1) Es sei $\Omega \neq \varnothing$, $A \subseteq \Omega$ and $\mathcal{F} := 2^\Omega$. Für jedes $B \in \mathcal{F}$ definieren wir

$$\mathbb{P}(B) = \begin{cases} 1, & B \cap A \neq \varnothing, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für welche A ist $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß?

(V2) Sigma-Algebren II: Sei $\Omega = \{-2018, \dots, 2018\}$. Welches der folgenden Mengensysteme ist eine σ-Algebra auf Ω?

(a) Alle Teilmengen, für die die Summe der Elemente Null ergibt (die leere Summe ist als Null definiert). Zum Beispiel gehört $\{-2, -1, 3\}$ zu diesem Mengensystem, $\{-2, 3\}$ aber nicht.

(b) Sei $A := \{1, 2, \dots, 12\}$. Man betrachte das System aller Teilmengen von Ω, für die der Schnitt mit A eine gerade Anzahl von Elementen hat. (Insbesondere gehören alle zu A disjunkten Mengen dazu, denn 0 ist gerade.)

(c) Das System, das aus der leeren Menge und allen Teilmengen der Form $\{-2018, \dots, -1, 0\} \cup E$ mit $E \subset \{1, \dots, 2018\}$ besteht.

(V3) Sigma-Algebren III:

(a) Geben Sie zwei σ-Algebren auf $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ an, deren Vereinigung keine σ-Algebra ist.

(b) Geben Sie die σ-Algebra auf $\{1, 2, 3, 4\}^2$ an, die von $\{(1, 2), (3, 4)\}$ erzeugt wird.

(V4) Sigma-Algebren IV:

(a) Man finde je zwei σ-Algebren mit endlich bzw. unendlich vielen Elementen auf $\Omega = [0, 1]$.

(b) Wie viele Elemente enthält die kleinste σ-Algebra auf $\Omega = [0, 1]$, welche die Mengen $A_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right)$ und $A_2 = \left\{\frac{1}{4}\right\}$ enthält? Geben Sie die σ-Algebra explizit an und begründen Sie Ihre Wahl.

(V5) Sei $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen der Zahlen 0 und 1 und $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra über Ω , die die Mengen $A_j = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \Omega : \omega_j = 1\}$ für $j \in \mathbb{N}$ enthält. Beweisen Sie

$$\{(\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \Omega : \text{für alle } j \in \mathbb{N}\ \omega_j = 1\} \in \mathcal{F}\,.$$

(V6) Menge der beobachtbaren Ereignisse II: Ein Spieler würfelt verdeckt mit zwei Würfeln und teilt uns je nach Vereinbarung Folgendes mit:

(a) die Augensumme;

(b) ob eine Zahl größer als 4 enthalten ist;

(c) ob sich die Würfelergebnisse um mehr als 2 unterscheiden;

(d) die beiden Augenzahlen, aber nicht deren Reihenfolge.

Modellieren Sie jeweils die *Menge der beobachtbaren Ereignisse* mittels eines geeigneten messbaren Raumes.

Präsenzaufgaben

(1) Wir betrachten die beiden messbaren Räume $(\Omega_D, \mathcal{F}_D)$ sowie $(\Omega_B, \mathcal{F}_B)$ mit $\Omega_D = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F}_D = \sigma(\{\{1\}\})$, $\Omega_B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{F}_B = \sigma(\{\{a, b\}\})$. Geben Sie Beispiele für messbare und nicht messbare Abbildungen $X : \Omega_D \to \Omega_B$ an.

(2) Es seien Ω eine beliebige Menge und $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$. Zeigen Sie, dass

$$\sigma\colon\ \{\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\Omega)\} \to \{\mathcal{F} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra auf } \Omega\}\colon\ \mathcal{G} \mapsto \sigma(\mathcal{G})$$

inklusionserhaltend ist, d. h., dass $\sigma(\mathcal{G}_1) \subset \sigma(\mathcal{G}_2)$ gilt.

Vorbereitungsaufgaben

(V1) (a) Es sei Ω eine Menge, $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω und $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaßauf Ω. Für $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ gelte $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{4}$. Geben Sie hinreichende und notwendige Bedingungen an die Mengen A_1 und A_2 an, sodass $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \frac{1}{2}$ gilt, d.h.

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \frac{1}{2} \iff \dots$$

(b) Es bezeichne δ_0 das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\delta_0\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]\colon A \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \in A\,, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Geben Sie zwei nicht disjunkte Mengen A und B an, mit $\delta_0(A \cap B) = 0$.

(V2) Die Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$ ist definiert als

$$\mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big) = \sigma\big(\{\, O \subset \mathbb{R}^d \mid O \text{ ist offen }\}\big)\,.$$

Wir setzen $\mathcal{G}_A = \big(\{A \subset \mathbb{R}^d \mid A \text{ ist abgeschlossen }\}\big)$. Zeigen Sie $\sigma(\mathcal{G}_A) = \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big)$.

(V3) Diskrete Zufallsvariablen:

(i) Es seien $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum und $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$ für $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, d.h. das Bild von X ist abzählbar. Zeigen Sie:

$$X \text{ Zufallsvariable} \iff \forall\, n \in \mathbb{N}\colon X^{-1}(\{x_n\}) \in \mathcal{F}$$

Man spricht in diesem Fall von einer **diskreten Zufallsvariablen**.

(ii) Sei $\Omega = \{1,2,3,4\}$ und $\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{F}_3$ die von $\{\{1\},\{1,3,4\}\}$ erzeugte σ-Algebra. Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = 1 \\ 5, & \omega = 2 \\ -1, & \omega = 3,4 \end{cases}.$$

Für welche der σ-Algebren $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ ist X eine Zufallsvariable? Begründen Sie Ihre Antwort!

(V4) Eigenschaften Indikatorfunktionen: Ist Ω eine beliebige Menge, $A \subset \Omega$, dann ist die Indikatorfunktion der Menge A gegeben durch

$$\chi_A\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon \omega \mapsto \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Zeigen Sie für $A, B, C \subset \Omega$, $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ folgende Identitäten:

(a) $\chi_\varnothing \equiv 0$,

(b) $\chi_\Omega \equiv 1$,

(c) $\chi_A \cdot \chi_B = \chi_{A\cap B}$,

(d) $\chi_A = 1 - \chi_{A^c}$,

(e) $\chi_A + \chi_B = \chi_{A\cup B} + \chi_A \cdot \chi_B$,

(f) $\chi_{\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i} = \max\limits_{i\in\mathbb{N}} \chi_{A_i}$,

(g) $\chi_{A\cup B\cup C} = \chi_A + \chi_B + \chi_C - \chi_{A\cap B} - \chi_{A\cap C} - \chi_{B\cap C} + \chi_{A\cap B\cap C}$.

(V5) Indikatorfunktionen und Zufallsvariable: Es sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum und $A \subset \Omega$.

(a) Zeigen Sie: Die Indikatorfunktion ist genau dann eine Zufallsvariable, wenn $A \in \mathcal{F}$.

(b) Interpretieren Sie die Wahl $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ und $\mathcal{F} = \sigma(\{5,6\})$ im Kontext eines geeigneten Zufallsexperiments. Welche der folgenden Abbildungen sind Zufallsgrößen?

(i) $\chi_{\{6\}}$

(ii) $\chi_{\{1,2,3,4\}}$

(iii) $X\colon \Omega \to \mathbb{R}, \omega \mapsto \begin{cases} 7, & \omega = 5,6 \\ 2, & \text{sonst} \end{cases}$

(V6) Es seien $(\Omega_D, \mathcal{F}_D)$ und $(\Omega_B, \mathcal{F}_B)$ messbare Räume. Weiters sei μ ein Maßauf $(\Omega_D, \mathcal{F}_D)$ und $X\colon \Omega_D \to \Omega_B$ eine $(\mathcal{F}_D, \mathcal{F}_B)$-messbare Abbildung. Wir setzen $\eta := \mu \circ X^{-1}$. Zeigen Sie: η ist ein Maß auf Ω_B.

Präsenzaufgaben

(1) Es sei $\Omega = [0, 22]$. Geben Sie die kleinste σ-Algebra an, bezüglich der $X = -2\chi_{[4,10]} + 5\chi_{[5,7]} + 3\chi_{[18,20]}$ eine Zufallsvariable ist. *Hinweis: Es reicht, die Erzeuger der σ-Algebra anzugeben.*

(2) Kombinatorikaufgaben I

(a) Aus acht Personen sollen drei ausgewählt werden, die einen Preis erhalten. Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Auswahlmöglichkeiten für folgende Modelle:

(i) Die drei Preise sind verschieden und die gleiche Person kann höchstens einen Preis erhalten.

(ii) Die drei Preise sind verschieden und die gleiche Person kann gleichzeitig mehrere Preise erhalten.

(iii) Die drei Preise sind gleich und die gleiche Person kann höchstens einen Preis erhalten.

(iv) Die drei Preise sind gleich und die gleiche Person kann gleichzeitig mehrere Preise erhalten.

(b) (i) An einem Pferderennen beteiligen sich 6 Pferde. Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen möglichen Zieleinläufe, falls die Einlaufzeiten aller 6 Pferde verschieden sind?

(ii) Bei dem Pferderennen beteiligen sich 4 Pferde aus dem Rennstall A, 3 Pferde aus dem Rennstall B und 6 Pferde aus dem Rennstall C. Beim Einlauf interessiere für jeden Rennstall nur, ob eines seiner Pferde eine bestimmte Position inne hat. Um welches Pferd des Rennstalls es sich dabei handelt, spiele keine Rolle. Gesucht ist die Anzahl aller möglichen Zieleinläufe unter Berücksichtigung dieser Tatsache.

PS Stochastik für Lehramtsstudierende SS 2019
Blatt 6 10. April 2019

Vorbereitungsaufgaben

(V1) Kombinatorikaufgaben II
Bearbeiten Sie folgende Aufgaben aus E. Sidlo u.a.: *Mathematik mit technischen Anwendungen. Band 4.* hpt Verlag. S. 173.

8.41 Zwölf Personen wollen mit einem Autobus fahren, der nur mehr fünf freie Plätze hat. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die fünf Plätze zu besetzen, wenn die verschiedenen Anordnungen der Personen ***1)*** berücksichtigt werden? ***2)*** nicht berücksichtigt werden? AB

8.42 Bruno, sechs Jahre alt, besitzt fünf Farbstifte: rot, blau, grün, gelb und violett. Er zeichnet eine Katze und wählt einen Stift für den Kopf, einen für den Körper, einen für die Beine und einen für den Schweif. Wie viele bunte Katzen kann Bruno zeichnen, wenn er ***1)*** die gleiche Farbe mehrfach verwendet? ***2)*** nur verschiedene Farben verwendet? AB

8.43 Erfinde eine passende Aufgabenstellung zu dem angegebenen Ausdruck. C

a) $7!$ ***b)*** 7^3 ***c)*** $\binom{7}{3}$ ***d)*** $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ ***e)*** $\frac{7!}{3! \cdot 2!}$

8.44 Die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Urne mit 3 Kugeln zu ziehen, wird mit 81 angegeben. Gib eine passende Aufgabenstellung an. C

8.45 In einem Büro sind 18 Telefone vorhanden. Berechne, wie viele Verbindungen zwischen diesen Apparaten hergestellt werden können. AB

8.46 Um eine Maschine zu starten, müssen 10 Schalter richtig eingestellt werden. Ein Schalter kann 2 Positionen haben. Berechne die Anzahl der Möglichkeiten, die Schalter falsch einzustellen. AB

8.47 Vier Frauen und vier Männer kommen an ein Drehkreuz, das sie nacheinander passieren. AB
1) Wie viele verschiedene Reihenfolgen sind für diese Personen möglich?
2) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn Männer und Frauen abwechselnd gehen?
3) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn alle Frauen zuerst gehen?

8.48 Eine Spielgemeinschaft kreuzt alle möglichen Lottotipps bei Lotto „6 aus 45" an. Wie viele Fünfer mit bzw. ohne Zusatzzahl und wie viele Vierer erzielt sie damit? AB

Stochastik **173**

(V2) Kombinatorikaufgaben III

(a) Bei einem Kartenspiel werden aus einem Kartendeck von 60 Karten an jeden der drei Spieler sechs Karten verteilt, die restlichen Karten kommen als Stapel in die Mitte. Bei der Frage, wie viele Kartenverteilungen es gibt, erhalten Sie verschiedene Lösungen:

(i) $\binom{60}{6} \cdot \binom{54}{6} \cdot \binom{48}{6}$ (ii) $\frac{60!}{6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 42!}$ (iii) $\binom{60}{18} \cdot \left[\binom{18}{6} \cdot \binom{12}{6} \cdot \binom{6}{6}\right]$.

Welche Überlegungen liegen diesen Lösungen zugrunde? Zeigen Sie durch passende Umformungen, dass alle Ausdrücke gleich sind.

(b) Ein Restaurant bietet 5 verschiedene Suppen, 10 verschiedene Hauptgerichte und 6 verschiedene Nachspeisen an. Hannes hat sich entschieden höchstens eine Suppe, höchstens ein Hauptgericht und höchstens eine Nachspeise zu konsumieren. Wie viele verschiedene Menüzusammenstellungen gibt es unter diesen Voraussetzungen?

(V3) Kombinatorikaufgaben IV

(a) Auf wie viele Arten können n Türme auf ein $n \times n$ Schachbrett gestellt werden, so dass sie sich gegenseitig nicht schlagen können?

(b) Wie viele verschieden Funktionen zwischen $A = \{1, \ldots, k\}$ und $B = \{1, \ldots, \ell\}$ (mit $k, \ell \in \mathbb{N}$) gibt es? Wie viele injektive/bijektive Funktionen von A nach B gibt es?

(c) Wie viele Teilmengen von $C = \{1, \ldots, m\}$ (mit $m \in \mathbb{N}$) gibt es?

(V4) Alexander, Brigitte, Sandra und Tobias spielen Schafkopf (32 Karten, 14 Trümpfe, 8 Karten pro Spieler, 4 verschiedene Farben mit jeweils 8 Karten). Jede Karte werde mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgegeben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

(a) Alexander hat die 8 höchsten Trümpfe.

(b) Brigitte hat höchstens 6 Trümpfe.

(c) Sandra hat den Herz Unter (ist ein Trumpf) und mindestens zwei weitere Trümpfe.

(d) Tobias hat zwei Karten von jeder Farbe.

(e) Jeder hat mindestens einen Trumpf.

(V5) In einer geselligen Runde wird „Mäxchen“ gespielt. Hier wird versucht, die Kombination zweier Würfel, die der Vorgänger geworfen hat, zu überbieten. Dabei bildet die größere Zahl immer die Zehnerstelle und die kleinere die Einerstelle (die Kombination 1 und 6 entspricht also der Zahl „61“ und nicht „16“). Ein Pasch ist immer mehr wert als jede andere Kombination und es gilt $11 < 22 < 33 < 44 < 55 < 66$. Die Kombination von 1 und 2 und somit die Zahl „21“ ist das „Mäxchen“ und schlägt alle anderen Ergebnisse. Das Spiel wird aber mit nur einem perfekten Würfel gespielt. Der andere ist gezinkt, und es gilt für diesen, dass 1 mit der Wahrscheinlichkeit 0.3, die Zahlen 2,3,4 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.1 und die Zahlen 5 und 6 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.2 gewürfelt wird.

(a) Der Vorgänger hat eine „43“ geworfen. Wie wahrscheinlich ist es nun, dass der nächste Spieler ihn überbietet?

(b) Nun wird der gezinkte Würfel nochmals verändert. Bei dem neuen Würfel sind die Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen $2, 3, 4$ und 5 wie beim alten Exemplar. Wie muss die Wahrscheinlichkeit für die 1 aussehen, damit der Spieler eine „43“ in über 50% der Fälle übertrifft?

(V6) Das klassische Geburtstagsproblem. Bearbeiten Sie folgende Schulbuchaufgabe (aus Pauer, Franz; Scheirer-Weindorfer, Martina; Simon, Andreas; Stadler, Heinz: *Mathematik HTL 4/5, Schulbuch.* öbv Verlag. S. 33):

138 Zu seinem 19. Geburtsgag hat Hannes 19 Gäste eingeladen.

a. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass unter den nun 20 anwesenden Personen mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben.

b. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der 19 Gäste am selben Tag Geburtstag hat wie Hannes.

A, B **139**

a. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass unter n Personen mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben.

b. Berechne diese Wahrscheinlichkeit für $n = 1, 2, 3, \ldots, 50$ und stelle das Ergebnis sowohl in einer Tabelle, als auch in einem Diagramm dar.

c. Ermittle, ab wie vielen Personen die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei von ihnen am selben Tag Geburtstag haben, erstmals größer als 90% ist.

Präsenzaufgaben

(1) **Baumdiagramm und bedingte Wahrscheinlichkeit.**
Fertigen Sie ein Baumdiagramm zum Zufallsexperiment in der nachfolgenden Aufgabenstellung an. Geben Sie insbesondere die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten an den Ästen an und beschreiben Sie die in den Antwortmöglichkeiten genannten Ereignisse (z.B. „Erste Person ist Schüler“ etc.) in einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum. Erklären Sie die „1. Pfadregel“ im Kontext der Aufgabenstellung.

Mehrere Wahrscheinlichkeiten

In einer Unterrichtsstunde sind 15 Schülerinnen und 10 Schüler anwesend. Die Lehrperson wählt für Überprüfungen nacheinander zufällig drei verschiedene Personen aus dieser Schulklasse aus. Jeder Prüfling wird nur einmal befragt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Lehrperson drei Schülerinnen auswählt, kann mittels $\frac{15}{25} \cdot \frac{14}{25} \cdot \frac{13}{25}$ berechnet werden.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Lehrperson als erste Person einen Schüler auswählt, ist $\frac{10}{25}$.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Lehrperson bei der Wahl von drei Prüflingen als zweite Person eine Schülerin auswählt, ist $\frac{24}{25}$.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Lehrperson drei Schüler auswählt, kann mittels $\frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} \cdot \frac{8}{23}$ berechnet werden.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den von der Lehrperson ausgewählten Personen genau zwei Schülerinnen befinden, kann mittels $\frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} \cdot \frac{23}{23}$ berechnet werden.	☐

Quelle: Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reife- und Diplomprüfung, AHS, 11. Mai 2015, Mathematik, Teil-1-Aufgabe, Aufgabe 21, S. 25, `https://www.bifie.at/node/3014`

(2) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C, A_1, \ldots A_n \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie

(a) **Additionsformel.** Ist $\mathbb{P}(C) > 0$, so gilt

$$\mathbb{P}(A \cup B|C) = \mathbb{P}(A|C) + \mathbb{P}(B|C) - \mathbb{P}(A \cap B|C).$$

(b) **Multiplikationsformel.** Ist $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$, so gilt

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Definition (Unabhängigkeit von Ereignissen) Es sei I eine beliebige Indexmenge. Eine Familie von Ereignissen $(A_i)_{i\in I}$ heißt unabhängig, wenn für alle endlichen Teiilmengen $J \subset I$ gilt, dass

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)\,.$$

Das bedeutet zum Beispiel, dass drei Mengen A_1, A_2, A_3 genau dann unabhängig sind, falls diese paarweise unabhängig sind sowie, dass $\mathbb{P}(A_1, A_2, A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$ gilt.

Definition (Bedingte Wahrscheinlichkeit) Es seien A, B zwei Ereignisse auf einem Wahrscheinlichkeitsraum, wobei $\mathbb{P}(B) > 0$ gelte. Dann heißt

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B.

Theorem (Satz von Bayes) Es sei I eine abzählbare Indexmenge und $(B_i)_{i\in I}$ eine Familie paarweiser disjunkter Ereignisse mit $\mathbb{P}(\bigcup_{i\in I} B_i) = 1$. Für jedes Ereignis A mit $\mathbb{P}(A) > 0$ und alle $k \in I$ gilt dann

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}\,.$$

Vorbereitungsaufgaben

(V1) Es $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie

(a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) A und B sind unabhängig.

(ii) A und B^c sind unabhängig.

(iii) A^c und B sind unabhängig.

(iv) A^c und B^c sind unabhängig.

(b) Sind die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt und A_n und B unabhängig, für alle $n \in \mathbb{N}$, dann sind auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und B unabhängig.

(V2) (a) Von einem regulären Tetraeder seien drei der vier Flächen mit jeweils einer der Farben "1", "2", "3" gefärbt; auf der vierten Fläche sei jede dieser drei Farben sichtbar. Es sei A_j das Ereignis, dass nach einem Wurf des Tetraeders die Farbe "j" $(j = 1, 2, 3)$ auf der unten liegenden Seite ist. Zeigen Sie:

(i) A_1, A_2 und A_3 sind paarweise unabhängig.

(ii) A_1, A_2, A_3 sind nicht unabhängig.

(b) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \in \mathcal{F}$. A und B sowie A und C seien stochastisch unabhängig. Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass folgende Aussagen dann im Allgemeinen **nicht** gelten:

(i) A und $B \cap C$ sind stochastisch unabhängig.

(ii) B und C sind stochastisch unabhängig.

(V3) **Monty-Hall-Dilemma.**
Bei einer Quizshow kann der Kandidat zwischen drei Toren wählen, hinter denen sich der mögliche Gewinn verbirgt. Hinter zwei Toren befinden sich Nieten, während hinter dem dritten Tor ein Auto ist. Der Kandidat muss sich am Anfang für eines der drei Tore entscheiden. Daraufhin öffnet der Moderator ein Tor, das der Kandidat nicht gewählt hat und hinter dem sich eine Niete befindet. Der Kandidat kann sich nun zwischen den zwei verbleibenden Toren entscheiden. Soll der Kandidat sein bereits gewähltes Tor behalten oder auf das andere Tor wechseln, um seine Gewinnchancen zu maximieren? Wie hoch sind jeweils die Gewinnwahrscheinlichkeiten? Simulieren Sie das Zufallsexperiment mit `R`.

(V4) **Brustkrebs Teil 1.**
Brustkrebs ist die häufigste Krebsart bei Frauen. Frauen wird eine routinemäßige Brustkrebs-Vorsorgeuntersuchung ab 35 Jahren empfohlen, um eine eventuelle Krebserkrankung frühzeitig zu erkennen und behandeln zu können. Zunächst wird dabei eine *Mammographie* durchgeführt. Aus langjähriger Erfahrung weiß man: Wenn eine Frau Brustkrebs hat, liefert die Mammographie mit einer Wahrscheinlichkeit von 99.6% ein positives Ergebnis. Das Ergebnis der Mammographie ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% negativ, wenn kein Brustkrebs vorliegt. Die Wahrscheinlichkeit, an Brustkrebs zu erkranken, liegt bei 0.15%.

(a) Fertigen Sie ein Baumdiagramm zu den gegebenen Daten an. Geben Sie insbesondere die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten an den Ästen an und beschreiben Sie die „1. Pfadregel“ und „2. Pfadregel“ anhand geeigneter Beispiele von Ereignissen.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau an Brustkrebs erkrankt ist, wenn die Mammographie ein positives Ergebnis lieferte?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau nicht an Brustkrebs erkrankt ist, wenn die Mammographie ein negatives Ergebnis lieferte?

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau nicht an Brustkrebs erkrankt ist, wenn die Mammographie ein positives Ergebnis lieferte?

(e) Bei wie vielen der eine Million untersuchten Frauen im Jahr lieferte die Mammographie ein irrtümliches Ergebnis?

(f) Bei Frauen, deren Mutter bereits an Brustkrebs erkrankt war, ist die Wahrscheinlichkeit ca. 4-mal höher als normalerweise, Brustkrebs zu bekommen. Nehmen wir an, eine Frau, deren Mutter Brustkrebs hatte, erhält ein positives Mammographieergebnis. Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass diese Frau nicht an Brustkrebs erkrankt ist, wenn die Mammographie ein positives Ergebnis lieferte?

(V5) **Brustkrebs Teil 2.**
In der Regel wird nach einer positiven Mammographie auch eine *Sonographie* durchgeführt. Die Sonographie weist eine Sensitivität von 95% und eine Spezifität von 96% auf[1]. Dabei geht man von der Annahme aus, dass sowohl bei gesunden als auch bei an Brustkrebs erkrankten Frauen die Testergebnisse von Mammographie und Sonographie stochastisch unabhängig

[1] Die Sensitivität eines Tests ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kranker als krank eingestuft wird; die Spezifität eines Tests ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gesunder als gesund eingestuft wird.

voneinander sind. Für die Mammographie und Erkrankungswahrscheinlichkeit sollen die Daten aus Aufgabe (4) verwendet werden.

(a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau mit positiver Mammographie Brustkrebs hat, wenn die Sonographie auch ein positives Ergebnis liefert.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau mit positiver Mammographie keinen Brustkrebs hat, wenn die Sonographie ein negatives Ergebnis liefert.

(c) Beurteilen Sie kurz, ob positive Ergebnisse bei Mammographie und Sonographie bereits sicher genug Brustkrebs bei Frauen anzeigen.

(d) Bestimmen Sie die Sensitivität und Spezifität des Doppeltests. Hängen diese Größen von der Reihenfolge der Untersuchungen ab?

(V6) Jeder Mensch besitzt unveränderliche Blutmerkmale. Man unterscheidet die vier Blutgruppen A, B, AB und 0 und den Rhesusfaktor R+ und R−. Blutgruppe A tritt bei 42%, B bei 10%, AB bei 4% und 0 bei 44% der Menschen auf. Menschen mit Blutgruppe A und Menschen mit Blutgruppe 0 haben mit Wahrscheinlichkeit 0.85 Rhesusfaktor R+. Dagegen tritt bei Menschen mit Blutgruppe B Rhesusfaktor R+ nur noch mit Wahrscheinlichkeit 0.8 auf und bei Menschen mit Blutgruppe AB sogar nur noch mit Wahrscheinlichkeit 0.75.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Rhesusfaktors R+.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mensch mit Rhesusfaktor R+ die Blutgruppe AB hat.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mensch Rhesusfaktor R− und Blutgruppe 0 hat.

Klausur

Bei dieser Klausur können insgesamt 90 Punkte erreicht werden. Alle Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein, die Ergebnisse sind soweit wie möglich zu vereinfachen. Hilfsmittel wie Skripten, Bücher, Taschenrechner, Mobiltelefone und dergleichen sind nicht erlaubt.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
max. Punkte	10	15	10	15	15	10	15	90
Punkte								

(1) Es sei $n \in \mathbb{N}, \Omega = \{0, \dots, n\}$, $c \in \mathbb{R}$ und $p \in (0, 1)$. Für $k \in \Omega$ definieren wir ein Maß auf der Potenzmenge von Ω durch

$$\mathbb{P}(\{k\}) = c \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} .$$

Bestimmen Sie die Konstante c so, dass $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

(2) Es seien X und Y nichtleere Mengen, $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf X und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass durch

$$\mathcal{G} = \{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$$

eine σ-Algebra auf Y definiert ist.

(3) Es sei $\Omega = [-1, 1]$ und $\mathcal{F}$ die von den Intervallen $[-1, 3/4]$ und $[-1/2, 1]$ auf Ω erzeugte σ-Algebra. Wie viele Elemente besitzt $\mathcal{F}$?

(4) Es sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einer Ereignismenge Ω. Für zwei messbare Mengen A und B gelte $\mathbb{P}(A) = 0.7, \mathbb{P}(B) = 0.6$ sowie $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.5$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(A \cup B), \mathbb{P}(A^c \cup B^c)$ und $\mathbb{P}(A \cap B^c)$. Begründen Sie all Ihre Rechnungen mithilfe entsprechender Regeln für das Wahrscheinlichkeitsmaß!

(5) In einer Urne befinden sich $2n$ Kugeln, durchnummeriert mit den Zahlen von 1 bis $2n$ (mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$). Die Kugeln mit den Zahlen von 1 bis n sind weiß eingefärbt, die restlichen schwarz. Martin zieht 4 Kugeln mit einem Griff aus der Urne. Lena teilt uns mit,

(a) ob Martin die Kugel mit der Ziffer 2 gezogen hat,

(b) die Anzahl der schwarzen Kugeln, die Martin gezogen hat;

Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum an und modellieren Sie jeweils die *Menge der beobachtbaren Ereignisse* mittels eines geeigneten messbaren Raumes.

(6) Sei $X : \{0,1\}^3 \to \mathbb{R} : \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mapsto \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3$. Geben Sie die kleinste σ-Algebra an, so dass X eine Zufallsvariable definiert.

(7) Das Hotel „Waldesruh“ hat 4 Stockwerke mit jeweils 40 Zimmern. Jedes Stockwerk besteht aus zwei gegenüberliegenden Zimmerreihen mit je 20 Zimmern.

(a) Ein Kegelverein möchte sechs nebeneinanderliegende Zimmer mieten. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diesen Wunsch zu erfüllen, wenn noch alle Zimmer des Hotels frei sind?

(b) Der Kegelverein wurde im vierten Stock untergebracht. Nun bestellen vier Ehepaare jeweils ein Zimmer. Jedes Zimmer wird zufällig zugewiesen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle vier Zimmer im gleichen Stockwerk, wenn zu diesem Zeitpunkt nur die sechs Zimmer des Kegelvereins im vierten Stock vergeben sind?

(c) Jeder Hotelgast bekommt ein kleines Willkommensgeschenk, eine Tüte mit Gummibärchen. Man hat Gummibärchen in fünf verschiedenen Farben zur Auswahl, von jeder Farbe hat man über 1000 Gummibärchen zur Verfügung. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Tüte mit 20 Gummibärchen zu füllen?

Präsenzaufgaben

(1) Erwarteter Würfelgewinn: Gegeben sei der Laplace-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wobei $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$. Weiters sei

$$X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}\colon\ (\omega_1, \omega_2) \mapsto |\omega_1 + \omega_2 - 7|\ .$$

Bestimmen Sie $\mathbb{E}X$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Vorbereitungsaufgaben

Definition (Binomialverteilung) Es sei $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Für $k \in \Omega$ und $p \in (0,1)$ definieren wir

$$B_{n,p}(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} .$$

Dann heißt $B_{n,p}$ Binomialverteilung mit Parametern n und p.

Definition (Geometrische Verteilung) Es sei $\Omega = \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Für $k \in \Omega$ und $p \in (0,1)$ setzen wir

$$\mathfrak{g}_p(\{k\}) = (1-p)^k p .$$

Dann heißt $\mathfrak{g}_p$ geometrische Verteilung mit Parameter p.

Definition (Verteilung einer Zufallsvariable) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Dann heißt das Wahrscheinlichkeitsmaß $P_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ auf Ω Bildmaß oder (induzierte) Verteilung von X. Gilt zum Beispiel $B_{n,p} = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ so sagen wir, X ist $B_{n,p}$ verteilt und schreiben $X \sim B_{n,p}$.

Definition (Erwartungswert diskreter ZV) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable, d.h., $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Dann definieren wir den Erwartungswert von X als

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbb{P}(X = x_k) .$$

Ist Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß so setzen wir $\mathbb{E}Q = \mathbb{E}X$ für eine Zufallsvariable X mit $Q = \mathbb{P} \circ X^{-1}$

Definition (Varianz diskreter ZV) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable mit Erwartungswert μ. Dann definieren wir die Varianz von X als

$$\mathrm{V}\, X = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - \mu)^2 \mathbb{P}(X = x_k) .$$

Analog zum Erwartungswert definieren wir die Varianz einer Verteilung als die Varianz einer entsprechen verteilten Zufallsvariable.

(V1) Es sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $X(\Omega) = \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) X ist eine geometrisch verteilte Zufallsvariable.

(b) X ist gedächtnislos, d.h. für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\mathbb{P}(X \geq k + \ell | X \geq k) = \mathbb{P}(X \geq \ell)$.

(V2) Ein Nachtwächter hat einen Schlüsselbund mit 10 ähnlich aussehenden Schlüsseln. Wenn er eine bestimmte Tür aufschließen will, in deren Schloss genau einer der 10 Schlüssel passt, so probiert er entweder die Schlüssel nacheinander durch - d.h. kein Schlüssel wird zweimal ausprobiert - bis er den passenden findet (Methode A); oder er probiert einen zufällig ausgewählten Schlüssel, und wenn er nicht passt, so schüttelt er den Schlüsselbund und probiert wieder einen zufällig ausgewählten Schlüssel (Methode B).

(a) Die Zufallsvariable X_A bzw. X_B sei die Anzahl der Versuche, die nach Methode A bzw. B nötig sind, um den passenden Schlüssel zu finden. Geben Sie die Verteilungen dieser bei den Zufallsgrößen an.

(b) Der Nachtwächter benutzt Methode A, wenn er nüchtern ist, und Methode B, wenn er betrunken ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er in einer bestimmten Nacht betrunken ist, betrage 1/3. Wie groß ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Betriebsleiter den Nachtwächter der Trunkenheit im Dienst zu Recht bezichtigt, nachdem er gesehen hat, dass dieser schon 8-mal erfolglos versucht hat, die Tür zu öffnen?

(V3) Die Firma *PingPong* produziert Tischtennisbälle. Tischtennisbälle sind im Spielbetrieb extremen Belastungen ausgesetzt, erst nach aufwändigen Testverfahren kommen die Bälle als *Turnierbälle* in den Handel. Bälle, die bei der Herstellung durch die Kontrollen fallen, werden als *Trainingsbälle* angeboten.

(a) Unter den Trainingsbällen weisen 5% der Bälle starke Verformungen, 7% der Bälle Nahtfehler und 2% aller Bälle sogar beide Fehler auf. Weist ein Ball mindestens einen der beiden Fehler auf, ist er unbrauchbar. Andere Fehler treten nicht auf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter 10 unbrauchbaren Bällen genau zwei mit Nahtfehlern?

(b) Gehen Sie nun davon aus, dass 10% der Trainingsbälle einer Firma völlig unbrauchbar sind.

(i) Trainingsbälle werden in Großpackungen zu 100 Stück angeboten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man mehr als 11, aber höchstens 14 völlig unbrauchbare Bälle in einer solchen Packung findet.

(ii) In einer 12er Packung befinden sich genau 3 völlig unbrauchbare Bälle. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 6 daraus zu entnehmenden Bällen genau 2 völlig unbrauchbare Bälle befinden.

(iii) Ermitteln Sie die Anzahl der Trainingsbälle, die man der Produktion mindestens entnehmen müsste, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens einen völlig unbrauchbaren Ball zu erhalten.

(c) Trotz der Kontrollen liegt der Anteil der einwandfreien Turnierbälle unter den als Turnierball klassifizierten Tischtennisbällen erfahrungsgemäß nur bei 92%. Ein Tischtennisverein ordert 1000 Turnierbälle. Bestimmen Sie die größte Zahl k so, dass die Wahrscheinlichkeit, mit dieser Lieferung mindestens k einwandfreie Turnierbälle zu erhalten, größer als 98% ist.

(d) Die Firma *PingPong* räumt Kunden ein, mangelhafte Bälle zurückzugeben. Im Durchschnitt werden 5% der ausgelieferten Bälle bemängelt. Für jeden zurückgegebenen Ball erleidet die Firma einen Verlust von 0.30€, für jeden nicht zurückgegebenen Ball erzielt sie einen Gewinn von 0.80€. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Firma bei einer Lieferung von 1000 Bällen einen Gesamtgewinn von mindestens 750€ erzielt.

(V4) Es seien $X \sim B_{n,p}$ und $Y \sim \mathfrak{g}_p$. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X und Y.

(V5) In einer Urne befinden sich Kugeln, von denen jede mit einer der Zahlen $1, \ldots, 4$ beschriftet ist. Spieler 1 zieht nun zufällig (Laplace-Annahme) eine Kugel aus der Urne. Spieler 2 soll sich über die Zahl auf der gezogenen Kugel dadurch Klarheit verschaffen, dass er Fragen stellt, die von Spieler 1 mit ja oder nein beantwortet werden. Er hat sich dazu zwei Fragestrategien ausgedacht:

Strategie 1: Spieler 2 fragt zunächst, ob 4 die gezogene Zahl sei. Erhält er „Nein“ als Antwort, so fragt er, ob 3 gezogen wurde. Wird auch diese Frage verneint, so verschafft er sich durch die Frage, ob 2 die gezogene Zahl sei, vollständige Klarheit.

Strategie 2: Spieler 2 fragt zuerst, ob eine der Zahlen 3 oder 4 gezogen wurde. Wird diese Frage bejaht (verneint), so verschafft er sich durch die Frage, ob 4 (2) die gezogene Zahl sei, vollständige Klarheit.

Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Fragen, die Spieler 2 unter Anwendung der Strategie 1 stellen muss, um die gezogene Zahl zu erfragen. Man berechne den Erwartungswert $\mathbb{E}X$, falls jede Zahl k ($k = 1, \ldots, 4$)

(a) genau einmal bzw.

(b) genau k-mal bzw.

(c) genau $(5 - k)$-mal

als Zahl einer Kugel in der Urne auftritt. Welcher Erwartungswert ergibt sich jeweils, wenn Strategie 2 gewählt wird? In welchem der drei Fälle ist Strategie 1 der Strategie 2 vorzuziehen?

(V6) Zwei Kisten werden zufällig mit ununterscheidbaren Kugeln befüllt, wobei eine Kugel unabhängig von den anderen mit der Wahrscheinlichkeit p in Kiste 1, mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ in Kiste 2 lande, wobei $p \in (0, 1)$. Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der nötigen Schritte an, bis jede Kiste mindestens eine Kugel enthält. Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an. Geben Sie die Verteilung und Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X an und berechnen Sie $\mathbb{E}X$. Für welches p wird $\mathbb{E}X$ minimal?

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt.

Definition (Verteilungsfunktion) Es sei X eine Zufallsvariable. Die Funktion

$$F_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]\colon x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x) = P_X\big((-\infty, x]\big)$$

heißt Verteilungsfunktion von X bzw. P_X. Speziell schreiben wir für die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, d. h. die Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung 1, Φ.

Bemerkung (Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz) Für zwei quadratisch integrierbare Zufallsvariable f und g sowie $c \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Rechenregeln

- $E(f + cg) = E(f) + cE(g)\,,$
- $\mathrm{V}(f + c) = \mathrm{V}(f)\,,$
- $\mathrm{V}(cf) = c^2\,\mathrm{V}(f)\,,$
- Sind f und g unabhängig so gilt $\mathrm{V}(f + g) = \mathrm{V}(f) + \mathrm{V}(g)\,.$

Präsenzaufgaben

(1) Es sei X eine Zufallsvariable mit $E(X) = \mu$ und $\mathrm{V}(x) = \sigma^2$. Zeigen Sie

$$E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = 0 \quad \text{sowie} \quad \mathrm{V}\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = 1\,.$$

Definition (Quantil) Für eine Zufallsvariable X und $p \in [0,1]$ heißt ein $q_p \in \mathbb{R}$ p-Quantil von X, falls gilt

$$\mathbb{P}(X \leq q_p) \geq p \quad \text{sowie} \quad \mathbb{P}(q_p \leq X) \geq 1-p\,.$$

Definition (Dichte und Rechenregeln) Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ heißt Dichte falls gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1\,.$$

Insbesondere definiert in dieser Situation f ein Wahrscheinlichkeitsmaß durch

$$\mathbb{P}_f(B) = \int_B f(t)\,\mathrm{d}t$$

für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und es gilt für die zugehörige Verteilungsfunktion $F_{\mathbb{P}_f}\colon \mathbb{R} \to [0,1]$

$$F_{\mathbb{P}_f}(x) = \mathbb{P}_f((-\infty,x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Gilt für eine Zufallsvariable $X \sim \mathbb{P}_f$, so ist

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Vorbereitungsaufgaben

(V1) Es seien $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n_1,n_2 \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$. Die Zufallsvariablen $X_1,X_2\colon \Omega \to \mathbb{R}$ seien unabhängig mit $P_{X_1} = B_{n_1,p}$ und $P_{X_2} = B_{n_2,p}$. Bestimmen Sie die Verteilung der Summe $X = X_1 + X_2$.

(V2) Die Zufallsvariable X besitze die Verteilung

$$\mathbb{P}(X=-1)=0.1\,,\quad \mathbb{P}(X=-0.5)=0.15\,,\quad \mathbb{P}(X=2)=0.25\,,$$
$$\mathbb{P}(X=3)=0.3\,,\quad \mathbb{P}(X=5)=0.2\,.$$

(a) Zeichnen Sie ein Stabdiagramm für die Verteilung.

(b) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F_X.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(0 < X \leq 4)$, $\mathbb{P}(-1 \leq X < 3)$ und $\mathbb{P}(X > 3)$.

(d) Bestimmen Sie aus der Verteilungsfunktion die 0.25, 0.5,0.75 und 0.9 Quantile.

(V3) **Normalverteilung.**

(a) Es sei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Führen Sie für die Gauß-Dichte

$$f(\cdot\,;\mu,\sigma)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

eine Kurvendiskussion durch. (Extrema, Wendepunkte, Monotoniebereiche, asymptotisches Verhalten)

(b) Zeigen Sie folgende Symmetrieeigenschaft der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Sei Z eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Das p-Quantil z_p bezeichne jenen Wert, für den gilt $\mathbb{P}(Z \leq z_p) = p$. Recherchieren Sie, wie man mit `R` Quantile sowie Werte der Verteilungsfunktion berechnet. Zeichnen Sie mit `R` den Graph der Verteilungsfunktion Φ.

(V4) Von einer Maschine werden Lebensmittel abgefüllt. Die Zufallsvariable X des Gewichts (in Gramm) sei näherungsweise normalverteilt mit $\mu = 980$ und $\sigma = 4$.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt das Gewicht eines zufällig ausgewählten Pakets mindestens 985 g?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt das Gewicht zwischen 970 g und 990 g?

(c) Welches Gewicht wird mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit überschritten?

(d) Der Erwartungswert μ der Maschine kann manuell eingestellt werden, während die Standardabweichung $\sigma = 4$ eine vom Erwartungswert μ unabhängige feste Maschinengröße ist. Die Firma möchte auf der Verpackung „Mindestgewicht 980 Gramm“ drucken. Welcher Erwartungswert μ muss eingestellt werden, damit bei einem zufällig ausgewählten Paket die Angabe mit der Wahrscheinlichkeit q richtig ist? Berechnen Sie μ auch konkret für $q = 0.99$.

(V5) Wir betrachten die Funktion

$$\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \frac{1}{8}, & -2 \leq x \leq 0 \\ c\mathrm{e}^{-x}, & 0 < x. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$, so dass ρ Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X ist.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$.

(c) Berechnen Sie die Varianz $V(X)$.

(d) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X.

(e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(-1 < X < 3)$.

(V6) (a) Es sei X eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Erwartungswert $\mathbb{E}X = 75$ und Varianz $\mathrm{V}(X) = 9$. Außerdem gelte $X(\Omega) \subset [0, 100]$. Schätzen Sie $\mathbb{P}(X \leq 45)$ nach oben mittels der TSCHEBYSCHOW-UNGLEICHUNG ab.

(b) Bei Brutkästen eines bestimmten Typs wird die durchschnittliche Bruttemperatur mit 25°C angegeben. Eine Untersuchung der Temperaturen ergab weiterhin, dass bei 5% der Brutkästen eine Temperatur von 23°C unterschritten und bei 10% eine Temperatur von 27°C überschritten wurde. Was lässt sich aus diesen Angaben über die Varianz der Temperatur sagen?

Formelsammlung und Tabellen

1 Deskriptive Statistik: Univariate Verteilungen

Bezeichnungen:

- Urliste $x = (x_1, \ldots, x_n)$
- geordnete Urliste $x_{(1)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$
- möglichen Ausprägungen $a_1, a_2, \ldots, a_m$.
- Klassen $K_1, \ldots, K_N$ mit Klassengrenzen $x_0^*, x_1^*, \ldots, x_N^*$; $K_j = (x_{j-1}^*, x_j^*]$ oder $K_j = [x_{j-1}^*, x_j^*)$; mit Klaasenbreite $b_j = x_j^* - x_{j-1}^*$ und Klassenmitte $m_j = \frac{1}{2}\left(x_{j-1}^* + x_j^*\right)$

Häufigkeiten:

- **absolute Häufigkeit** $h_j = h(a_j) = \Big|\{x_i \mid x_i = a_j\}\Big|$
- **relative Häufigkeit** $r_j = r(a_j) = \frac{h_j}{n}$
- **absolute Summenhäufigkeit** von a_k ist $H_k = \sum\limits_{j: a_j \leq a_k} h_j$
- **relative Summenhäufigkeit** von a_k ist $R_k = \sum\limits_{j: a_j \leq a_k} r_j$
- **empirische Verteilungsfunktion** $F_n : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $F_n(x) = \sum\limits_{j: a_j \leq x} r_j$

klassierte Daten

- **absolute Klassenhäufigkeit** $h_j = h(K_j) = \sum\limits_{a_i \in K_j} h(a_i)$
- **relative Klassenhäufigkeit** $r_j = r(K_j) = \frac{h_j}{n}$
- **Summe der relativen Klassenhäufigkeiten** $R_j = \sum\limits_{i=1}^{j} r(K_i)$
- **empirische Verteilungsfunktion** $F_n : \mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{falls} \quad x \leq x_0^* \\ R_{j-1} + \frac{x - x_{j-1}^*}{b_j} \cdot r(K_j) & \textbf{falls} \quad x_{j-1}^* < x \leq x_j^* \\ 1 & \textbf{falls} \quad x \geq x_N^* \end{cases}$$

Lagemaße

Modalwert x_{mod}:
am häufigsten beobachtete Ausprägung bzw. Mitte der am häufigsten besetzte Klasse

arithmetisches Mittel/ empirischer Mittelwert:

- nichtklassierte Daten:
$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} h_j \cdot a_j$$
- klassierte Daten:
$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} h_j \cdot m_j$$

Median:

- nichtklassierte Daten:
$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right) & \text{falls } n \text{ gerade ist} \end{cases}$$
- klassierte Daten: $\tilde{x} = x^*_{j-1} + (0.5 - R_{j-1})\,\frac{b_j}{r_j}$ für $R_{j-1} \le 0.5 < R_j$

q-Quantil:

- nichtklassierte Daten:
  1. Fall: $n \cdot q = k$ ganzzahlig, so $\tilde{x}_q = \frac{1}{2}\left(x_{(k)} + x_{(k+1)}\right)$.
  2. Fall: $n \cdot q$ nicht ganzzahlig, so $\tilde{x}_q = x_{(k)}$ mit k=kleinste ganze Zahl $> nq$
- klassierte Daten: $\tilde{x}_q = x^*_{j-1} + (q - R_{j-1})\,\frac{b_j}{r_j}$ für $R_{j-1} \le q < R_j$

Streuungsmaße

Spannweite: $R = x_{(n)} - x_{(1)}$

Quartilsabstand: $Q = \tilde{x}_{0.75} - \tilde{x}_{0.25}$.

empirische Varianz:

- nichtklassierte Daten:
$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - n\overline{x}^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{m} h_j \cdot a_j^2 - n \cdot \overline{x}^2\right)$$
- klassierte Daten:
$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{N} h_j \cdot (m_j - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{N} h_j \cdot m_j^2 - n \cdot \overline{x}^2\right).$$

empirische Standardabweichung: $s = \sqrt{s^2}$.

2 Deskriptive Statistik: Bivariate Verteilungen

Bezeichnungen:

- bivariate Urliste $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$
- Merkmalsausprägungen $a_1, \ldots, a_m$ für X; $b_1, \ldots, b_l$ für Y

Häufigkeiten:

absolute Häufigkeit $h_{ij} = h(a_i, b_j)$

relative Häufigkeit $r_{ij} = r(a_i, b_j) = \frac{h_{ij}}{n}$.

absolute Randhäufigkeiten $h_{i\bullet} = h(a_i) = \sum_{j=1}^{l} h_{ij}$; $h_{\bullet j} = h(b_j) = \sum_{i=1}^{m} h_{ij}$

relative Randhäufigkeiten $r_{i\bullet} = \frac{h_{i\bullet}}{n}$; $r_{\bullet j} = \frac{h_{\bullet j}}{n}$.

bedingte Häufigkeitsverteilungen:

$$f_Y(b_j|a_i) = \frac{h_{ij}}{h_{i\bullet}} = \frac{r_{ij}}{r_{i\bullet}}; \quad f_X(a_i|b_j) = \frac{h_{ij}}{h_{\bullet j}} = \frac{r_{ij}}{r_{\bullet j}}.$$

X, Y empirisch unabhängig , wenn für alle i, j gilt: $h_{ij} = \frac{h_{i\bullet} h_{\bullet j}}{n}$.

χ^2**-Koeffizient:**

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} \frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}} \quad \text{mit} \quad \tilde{h}_{ij} := \frac{h_{i\bullet} h_{\bullet j}}{n}.$$

Bei dichotomen Merkmalen

$$\chi^2 = n \cdot \frac{(h_{11} \cdot h_{22} - h_{12} \cdot h_{21})^2}{h_{1\bullet} \cdot h_{2\bullet} \cdot h_{\bullet 1} \cdot h_{\bullet 2}}.$$

Kontingenzkoeffizient

$$K = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}}$$

korrigierter Kontingenzkoeffizient

$$K^* = \frac{K}{K_{\max}}.$$

mit $K_{\max} = \sqrt{\frac{M-1}{M}}$ für $M = \min\{m, l\}$
Interpretation: $0 \leq K^* \leq 0.2$ so X, Y **stochastisch unabhängig**; $0.2 < K^* \leq 0.5$ so X, Y **schwach unabhängig**; $0.5 < K^* \leq 1$ so X, Y **abhängig**.

empirische Kovarianz:

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}\right)$$

empirischer Korrelationskoeffizient:

$$r = r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2}}.$$

Sprechweise:

- Ist $0 \leq |r| \leq 0.2$ so nennt man X, Y **unkorrelierte Merkmale**.
- Ist $0.2 < |r| \leq 0.5$ so **schwache lineare Korrelation**.
- Ist $0.5 < |r| \leq 0.8$ so **mittlere lineare Korrelation**.
- Ist $|r| > 0.8$ so **starke lineare Korrelation**.
- Ist $r < 0$, so nennt man X, Y **negativ korrelierte Merkmale**; ist $r > 0$, so nennt man X, Y **positiv korrelierte Merkmale**.

Regressionsgerade:

$$y = b\cdot(x - \bar{x}) + \bar{y} \quad \text{mit} \quad b = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = r_{xy}\cdot\frac{s_y}{s_x}.$$

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Axiome von Kolmogorow:

(K1) $P(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ (Nichtnegativität),

(K2) $P(\Omega) = 1$ (Normiertheit),

(K3) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ für $A_i \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $A_i \cap A_j = \varnothing$ für alle $i \neq j$.

Merkkasten Kombinatorik:

	mit Berücksichtigung der Reihenfolge	ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
mit Wiederholung	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Eigenschaften bedingte Wahrscheinlichkeit

- $P(.|B)$ ist Wahrscheinlichkeit
- **Multiplikationssatz:** $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$.
- **Pfadregel:** $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

- **Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:** $A_1, \ldots, A_n$ vollständige Ereignisdisjunktion mit $P(A_i) > 0$, so

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i).$$

- **Bayessche Formel:** $A_1, \ldots, A_n$ vollständige Ereignisdisjunktion mit $P(A_i) > 0$, so

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}.$$

A, B **stochastisch unabhängig**, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ bzw. $P(A|B) = P(A)$ bzw. $P(B|A) = P(B)$ bzw. $P(A|B) = P(A|\overline{B})$

4 Zufallsvariablen

Zufallsvariable ist Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto X(\omega) = x$

Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$, $F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \ : \ X(\omega) \leq x\})$.

X, Y (stochastisch) unabhängig , wenn für alle $I, J \subseteq \mathbb{R}$ gilt $P(X \in I \text{ und } Y \in J) = P(X \in I) \cdot P(Y \in J)$.

Eigenschaften Verteilungsfunktion:

a) F rechtsseitig stetig und monoton wachsend;

b) $0 \leq F(x) \leq 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$;

c) $P(X \leq x) = F(x)$, $P(X > x) = 1 - F(x)$, $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

X **diskret** wenn Wertebereich W endlich oder abzählbar unendlich. Dann

- **Wahrscheinlichkeitsfunktion von X**

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i) & \text{falls} \quad x_i \in W \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- $F(x) = \sum\limits_{i: x_i \leq x} f(x_i)$ ist Treppenfunktion

X **stetig** wenn es **Dichtefunktion** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $a \leq b$ gilt

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Dichtefunktion bedeutet:

$$f(x) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

- Dann $P(X = x) = 0$; $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ stetig, und $F'(x) = f(x)$.

Modalwert: x_M Maximum von f $f(x_M) = \max_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

q-Quantil $\xi_q \in \mathbb{R}$**:**

- X diskret: $F(\xi_q) = P(X \leq \xi_q) \geq q \quad \text{und} \quad P(X \geq \xi_q) \geq 1 - q$
- X stetig: ξ_q mit $F(\xi_q) = q$

Erwartungswert $E(X) = \mu$**:**

- X diskret: $E(X) = \sum_i x_i \cdot f(x_i)$,
- X stetig: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$.

Varianz $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = E\Big((X-\mu)^2\Big)$**:**

- X diskret: $\mathrm{Var}(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i)$.
- X stetig: $\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)dx$.

Rechenregeln Erwartungswert

a) $E(a) = a$.

b) **Funktionensatz:**

- X diskret: $E(g(X)) = \sum_i g(x_i) \cdot f(x_i)$.
- X stetig: $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)\, dx$

Speziell: $E(aX + b) = aE(X) + b$

c) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

d) X, Y stochastisch unabhängig: $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

Rechenregeln Varianz

a) Verschiebungssatz:

- X diskret: $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2 = \sum_i x_i^2 f(x_i) - \mu^2$.
- X stetig: $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx - \mu^2$.

b) $\mathrm{Var}(a \cdot X + b) = a^2 \cdot \mathrm{Var}(X)$

c) X, Y stochastisch unabhängig, so $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

Spezielle diskrete Verteilungen

Name	Wahrscheinlichkeitsfunktion	$E(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
gleichmäßig	$f(x_i) = \frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$
$X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$	$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} & x = 0,1,\dots,n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot (1-p)$
$X \sim \mathrm{Hyp}(n,M,N)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{\binom{M}{x}\cdot\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} & 0 \le x \le M,\, 0 \le n-x \le N-M \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$	$n \cdot \frac{M}{N}$	$n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1-\frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$
$X \sim G(p)$	$f(x) = \begin{cases} p \cdot (1-p)^{x-1} & \text{falls } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} & \text{für } x \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$	λ	λ

Spezielle stetige Verteilungen

Name	Dichtefunktion	Verteilungsfunktion	$E(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
gleichmäßig	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für} \quad a \le x \le b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für} \quad a \le x \le b \\ 1 & \text{für} \quad x > b. \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$X \sim Ex(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{für} \quad x \ge 0. \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{für} \quad x \ge 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$X \sim N(1,0)$	$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$	0	1
$X \sim N(\mu,\sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	μ	σ^2

Normalverteilung

- Symmetrie $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, so **standardisierte Zufallsvariable** $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, $Z \sim N(0,1)$
- F Verteilungsfunktion zu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, so

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right);$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \Phi(\tfrac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\tfrac{a-\mu}{\sigma})$$
$$P(|X-\mu| \leq k\sigma) = 2\Phi(k) - 1$$

- Quantile der Standardnormalverteilung z_q mit $\Phi(z_q) = q$, Symmetrie $z_q = -z_{1-q}$
- $X \sim N(\mu, \sigma)$, so q-Quantile x_q von X: $x_q = \mu + \sigma \cdot z_q$.

abgeleitete Verteilungen:

- $X \sim \chi^2(n)$ wenn $X = Z_1^2 + \ldots + Z_n^2$ für $Z_1, \ldots, Z_n \sim N(0,1)$ unabhängig; Quantile $\chi^2_{n,q}$; keine Symmetrie
- $T \sim t(n)$ wenn $T = \frac{Z}{\sqrt{X/n}}$ für $Z \sim N(0,1)$, $X \sim \chi^2(n)$ unabhängig; Quantile $t_{n,q}$; Symmetrie $t_{n,q} = -t_{n,1-q}$
- $Z \sim F(m,n)$ wenn $Z = \frac{\frac{1}{m}X}{\frac{1}{n}Y}$ für $X \sim \chi^2(m)$, $Y \sim \chi^2(n)$ unabhängig; Quantile $F_{m,n,q}$, Symmetrie $F_{m,n,q} = 1/F_{n,m,1-q}$

5 Grenzwertsätze und Konvergenz

Ungleichung von Tschebyscheff: X Zufallsvariable mit $E(X) = \mu$, $\text{Var}(X) = \sigma^2$, so für $c > 0$

$$P\Big(|X-\mu| \geq c\Big) \leq \frac{\sigma^2}{c^2} \quad \text{und} \quad P\Big(|X-\mu| < c\Big) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{c^2}.$$

Insbesondere

$$P\Big(|X-\mu| \geq k\sigma\Big) \leq \frac{1}{k^2}, \quad P\Big(|X-\mu| < k\sigma\Big) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Schwaches Gesetz der großen Zahlen:
$X_1, \dots, X_n$ unabhängig identisch verteilt mit $E(X_i) = \mu$, $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$, so für $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum X_i$:

$$P(|\overline{X_n} - \mu| \geq \epsilon) \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Bernoullisches Gesetz der großen Zahlen: Ereignis A mit $p = P(A)$, so

$$P\left(|R_n(A) - p| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n \cdot \varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} \quad \text{für jedes} \quad \varepsilon > 0,$$

und im Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|R_n(A) - p| \geq \varepsilon\right) = 0 \quad \text{für jedes} \quad \varepsilon > 0.$$

Approximation der Binomialverteilung: Sei $X \sim \text{Bin}(n,p)$ mit $np \geq 5$ und $n(1-p) \geq 5$.

- **Lokaler Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace**: $X \overset{a}{\sim} N\left(np, np(1-p)\right)$,

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}.$$

- **Approximation der Binomialverteilung** mit Stetigkeitskorrektur

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - np + 0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np - 0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

$$P(X = a) \approx \Phi\left(\frac{a - np + 0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np - 0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Zentraler Grenzwertsatz von Lindeberg-Levy: $X_1, \dots, X_n$ unabhängige identisch verteilte mit $E(X_i) = \mu$, $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 > 0$; $n \geq 30$; dann

$$\begin{aligned} Z_n = \tfrac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} &\quad \overset{a}{\sim} \quad N(0,1) \\ X_1 + \ldots + X_n &\quad \overset{a}{\sim} \quad N(n\mu, n\sigma^2) \\ \overline{X_n} = \tfrac{1}{n}\left(X_1 + \ldots + X_n\right) &\quad \overset{a}{\sim} \quad N(\mu, \tfrac{\sigma^2}{n}) \end{aligned}$$

6 Schließende Statistik

Parameterschätzung: Stichprobenvariablen $X_1, \dots, X_n$

- **Stichprobenfunktion** $T_n = g_n(X_1, \dots, X_n)$ mit Schätzwert
$$t_n = g_n(x_1, \dots, x_n)$$
- Schätzfunktion **erwartungstreu** für ϑ, wenn $E(T_n) = \vartheta$
- Schätzfunktion **konsistent**, wenn für alle $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} P(|T_n - \vartheta| \geq 0) = 0$.
- erwartungstreue Schätzfunktion T_n mit $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Var}(T_n) = 0$ ist konsistent.

wichtigste Beispiele: $X_1, \dots, X_n$ einfache Stichprobe mit $E(X_i) = \mu$, $\operatorname{Var}(X_i) = \sigma^2$

- $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ Schätzfunktion für μ, erwartungstreu und konsistent
- $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ Schätzfunktion für σ^2, erwartungstreu und konsistent

Konfidenzintervalle s. nächste Seite

Hypothesentests

Vorgehen:

1. Schritt: Formulierung des Testproblems durch Aufstellen der Null- und Alternativhypothese

2. Schritt: Wahl des Signifikanzniveaus α (meist vorgegeben)

3. Schritt: Wahl des geeigneten Hypothesentests

4. Schritt: Berechnung des Ablehnungsbereichs

5. Schritt: Berechnung des Wertes der Teststatistik t

6. Schritt: Testentscheidung und Interpretation

Fehlerarten:

	Entscheidung für	
	H_0	H_1
H_0 wahr	richtig $(\geq)$ $(1-\alpha)$	Fehler 1. Art $(\leq)$ α
H_1 wahr	Fehler 2. Art β	richtig $(1-\beta)$

Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau $\gamma = 1 - \alpha$

Parameter	empirische Werte	zweiseitig	linksseitig	rechtsseitig
μ (σ^2 bekannt)	$\overline{x}$	$\left[\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$	$\left(-\infty, \overline{x} + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$	$\left[\overline{x} - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)$
μ	$\overline{x}$ und s	$\left[\overline{x} - t_{n-1;1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{n-1;1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$	$\left(-\infty, \overline{x} + t_{n-1;1-\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$	$\left[\overline{x} - t_{n-1;1-\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \infty\right)$
σ^2	$\overline{x}$ und $(n-1)s^2$	$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}\right]$	$\left[0, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;\alpha}}\right]$	$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha}}, \infty\right)$
p (approximativ)	r_n	$\left[r_n - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{r_n(1-r_n)}{n}}, r_n + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{r_n(1-r_n)}{n}}\right]$	$\left[0, r_n + z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{r_n(1-r_n)}{n}}\right]$	$\left[r_n - z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{r_n(1-r_n)}{n}}, 1\right]$

Einstichprobentests

Voraussetzung: $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig identisch verteilt

Test	Nullhypothese	Voraussetzung	Teststatistik	falls $\vartheta = \vartheta_0$	Ablehnungsbereich
Einstichproben-Gauß-Test	$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$	$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ σ^2bekannt	$T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$	$T \sim N(0,1)$	$\lvert t\rvert > z_{1-\alpha/2}$ $t > z_{1-\alpha}$ $t < -z_{1-\alpha}$
Einstichproben-t-Test	$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$	$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ σ^2unbekannt	$T = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S} \cdot \sqrt{n}$	$T \sim t(n-1)$	$\lvert t\rvert > t_{(n-1),1-\alpha/2}$ $t > t_{(n-1),1-\alpha}$ $t < -t_{(n-1),1-\alpha}$
χ^2-Test für die Varianz	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$	$T = \frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma_0^2}$	$T \sim \chi^2(n-1)$	$t < \chi^2_{n-1,\alpha/2}, > \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ $t > \chi^2_{n-1,1-\alpha}$ $t < \chi^2_{n-1,\alpha}$
Approximativer Binomialtest	$p = p_0$ $p \leq p_0$ $p \geq p_0$	$X_i \sim \mathrm{Bin}(1,p)$	$T = \frac{\overline{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}$	$T \sim N(0,1)$ ap.	$\lvert t\rvert > z_{1-\alpha/2}$ $t > z_{1-\alpha}$ $t < -z_{1-\alpha}$

Zweistichprobentests

Voraussetzung: $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ unabhängig; $X_1, \ldots, X_n$ identisch verteilt; $Y_1, \ldots, Y_m$ identisch verteilt;

Test	Nullhyp.	Voraussetzung	Teststatistik	falls $\vartheta = \vartheta_0$	Ablehnungsbereich
Zweistichproben-Gauß-Test	$\mu_X = \mu_Y$ $\mu_X \leq \mu_Y$ $\mu_X \geq \mu_Y$	$X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$; $Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$; $\sigma_X^2,\ \sigma_Y^2$ bekannt	$T = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{m}}}$	$T \sim N(0,1)$	$\lvert t\rvert > z_{1-\alpha/2}$ $t > z_{1-\alpha}$ $t < -z_{1-\alpha}$
Zweistichproben-t-Test	$\mu_X = \mu_Y$ $\mu_X \leq \mu_Y$ $\mu_X \geq \mu_Y$	$X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$; $Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$; $\sigma_X^2,\ \sigma_Y^2$ unbekannt aber $\sigma_X = \sigma_Y$	$T = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{n+m-2}\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}$	$T \sim t(n+m-2)$	$\lvert t\rvert > t_{(n+m-2),1-\alpha/2}$ $t > t_{(n+m-2),1-\alpha}$ $t < -t_{(n+m-2),1-\alpha}$
approximativer Zweistichproben-t-Test	$\mu_X = \mu_Y$ $\mu_X \leq \mu_Y$ $\mu_X \geq \mu_Y$	$n, m \geq 30$	$T = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n}+\frac{S_Y^2}{m}}}$	$T \overset{a}{\sim} N(0,1)$	$\lvert t\rvert > z_{1-\alpha/2}$ $t > z_{1-\alpha}$ $t < -z_{1-\alpha}$
Zweistichproben-F-Test	$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ $\sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2$ $\sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2$	$X_i \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$; $Y_i \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$	$T = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$	$T \sim F(n-1, m-1)$	$t < \frac{1}{F_{m-1,n-1,1-\alpha/2}}$ oder $t > F_{n-1,m-1,1-\alpha/2}$ $t > F_{n-1,m-1,1-\alpha}$ $t < \frac{1}{F_{m-1,n-1,1-\alpha}}$

Bei verbundenen Stichproben wende Einstichprobentests auf $D_i = X_i - Y_i$ an $\rightarrow$ **Differenzentests**.

Parameterfreie Tests

Test	Nullhypothese	Voraussetzung	Teststatistik	falls H_0	Ablehnungsbereich
χ^2-Unabhängigkeitstest	X, Y unabhängig[1]	$X_1, \ldots, X_n$ unabh; $Y_1, \ldots, Y_m$ unahh; gruppiert in $k \times l$-Kontingenztafel[2]	$T = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{(H_{ij} - \tilde{H}_{ij})^2}{\tilde{H}_{ij}}$ mit $\tilde{H}_{ij} := \frac{H_{i\bullet} H_{\bullet j}}{n}$	$T \overset{a}{\sim} \chi^2(r)$ mit $r = (k-1)(l-1)$	$t > \chi^2_{r;1-\alpha}$
χ^2-Homogenitätstest	$X_1, \ldots, X_m$ identisch verteilt[3]	$X_1, \ldots, X_m$ unabh. mit Wertebereich $\{1, \ldots, k\}$; Bed.[4]	$T = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \frac{(H_{ij} - \tilde{H}_{ij})^2}{\tilde{H}_{ij}}$ mit $\tilde{H}_{ij} := \frac{n_i \cdot H_{\bullet j}}{n}$	$T \overset{a}{\sim} \chi^2(r)$ mit $r = (k-1)(m-1)$	$t > \chi^2_{r;1-\alpha}$
χ^2-Anpassungstest	$P(X = i) = p_i$ für alle $i = 1 \ldots k$	$X_1, \ldots, X_n$ unahh. Wdh. von X mit Wertebereich $\{1, \ldots, k\}$, Bed [5]	$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(H_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$	$T \overset{a}{\sim} \chi^2(k-r-1)$, wobei $r =$ Anzahl geschätzte Parameter	$t > \chi^2_{(k-r-1);1-\alpha}$
Korrelationstest	$\rho_{XY} = 0$ $\rho_{XY} \leq 0$ $\rho_{XY} \geq 0$	$(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ unabh. gemeinsam normalverteilt	$T = \frac{R_{XY}}{\sqrt{1 - R^2_{XY}}} \cdot \sqrt{n-2}$	$T \sim t(n-2)$, $T \overset{a}{\sim} N(0,1)$	$\lvert t \rvert > t_{(n-2);1-\alpha/2}$ $t > t_{(n-2);1-\alpha}$ $t < -t_{(n-2);1-\alpha}$

[1] Genauer: $P(X = i, Y = j) = P(X = i) \cdot P(Y = j)$ für alle $i = 1 \ldots k$, $j = 1 \ldots l$

[2] Bedingung: alle $h_{ij} \geq 1$; $h_{ij} \geq 5$ für mindestens 80%. Ist der Wertebereich von X/Y unendlich oder stetig, so teile Wertebereich in k/l disjunkte Klassen auf.

[3] Genauer $P(X_1 = j) = \ldots = P(X_m = j)$ für alle $j = 1, \ldots, k$

[4] Bedingung: alle $h_{ij} \geq 1$; $h_{ij} \geq 5$ für mindestens 80%. Ist der Wertebereich von X unendlich oder stetig, so teile Wertebereich in kdisjunkte Klassen auf.

[5] Bedingung: $np_i \geq 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$; $np_i \geq 5$ für mindestens 80%. Ist der Wertebereich unendlich oder stetig, so teile Wertebereich in k disjunkte Klassen auf.

Binomialverteilung — einfache Wahrscheinlichkeiten

$$P_{n;p}\left(X=k\right)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot\left(1-p\right)^{n-k}$$

n	k		p = 0,02	0,03	0,05	0,10	1/6	0,20	0,25	0,30	1/3	0,40	0,50		n
2	0	0,	9604	9409	9025	8100	6944	6400	5625	4900	4444	3600	2500	2	2
	1		0392	0582	0950	1800	2778	3200	3750	4200	4444	4800	5000	1	
	2		0004	0009	0025	0100	0278	0400	0625	0900	1111	1600	2500	0	
3	0	0,	9412	9127	8574	7290	5787	5120	4219	3430	2963	2160	1250	3	3
	1		0576	0847	1354	2430	3472	3840	4219	4410	4444	4320	3750	2	
	2		0012	0026	0071	0270	0694	0960	1406	1890	2222	2880	3750	1	
	3				0001	0010	0046	0080	0156	0270	0370	0640	1250	0	
4	0	0,	9224	8853	8145	6561	4823	4096	3164	2401	1975	1296	0625	4	4
	1		0753	1095	1715	2916	3858	4096	4219	4116	3951	3456	2500	3	
	2		0023	0051	0135	0486	1157	1536	2109	2646	2963	3456	3750	2	
	3			0001	0005	0036	0154	0256	0469	0756	0988	1536	2500	1	
	4					0001	0008	0016	0039	0081	0123	0256	0625	0	
5	0	0,	9039	8587	7738	5905	4019	3277	2373	1681	1317	0778	0313	5	5
	1		0922	1328	2036	3281	4019	4096	3955	3602	3292	2592	1563	4	
	2		0038	0082	0214	0729	1608	2048	2637	3087	3292	3456	3125	3	
	3		0001	0003	0011	0081	0322	0512	0879	1323	1646	2304	3125	2	
	4					0005	0032	0064	0146	0284	0412	0768	1563	1	
	5						0001	0003	0010	0024	0041	0102	0313	0	
6	0	0,	8858	8330	7351	5314	3349	2621	1780	1176	0878	0467	0156	6	6
	1		1085	1546	2321	3543	4019	3932	3560	3025	2634	1866	0938	5	
	2		0055	0120	0305	0984	2009	2458	2966	3241	3292	3110	2344	4	
	3		0002	0005	0021	0146	0536	0819	1318	1852	2195	2765	3125	3	
	4				0001	0012	0080	0154	0330	0595	0823	1382	2344	2	
	5					0001	0006	0015	0044	0102	0165	0369	0938	1	
	6							0001	0002	0007	0014	0041	0156	0	
7	0	0,	8681	8080	6983	4783	2791	2097	1335	0824	0585	0280	0078	7	7
	1		1240	1749	2573	3720	3907	3670	3115	2471	2048	1306	0547	6	
	2		0076	0162	0406	1240	2344	2753	3115	3177	3073	2613	1641	5	
	3		0003	0008	0036	0230	0781	1147	1730	2269	2561	2903	2734	4	
	4				0002	0026	0156	0287	0577	0972	1280	1935	2734	3	
	5					0002	0019	0043	0115	0250	0384	0774	1641	2	
	6						0001	0004	0013	0036	0064	0172	0547	1	
	7								0001	0002	0005	0016	0078	0	
8	0	0,	8508	7837	6634	4305	2326	1678	1001	0576	0390	0168	0039	8	8
	1		1389	1939	2793	3826	3721	3355	2670	1977	1561	0896	0313	7	
	2		0099	0210	0515	1488	2605	2936	3115	2965	2731	2090	1094	6	
	3		0004	0013	0054	0331	1042	1468	2076	2541	2731	2787	2188	5	
	4			0001	0004	0046	0260	0459	0865	1361	1707	2322	2734	4	
	5					0004	0042	0092	0231	0467	0683	1239	2188	3	
	6						0004	0011	0038	0100	0171	0413	1094	2	
	7							0001	0004	0012	0024	0079	0313	1	
	8									0001	0002	0007	0039	0	
9	0	0,	8337	7602	6302	3874	1938	1342	0751	0404	0260	0101	0020	9	9
	1		1531	2116	2985	3874	3489	3020	2253	1556	1171	0605	0176	8	
	2		0125	0262	0629	1722	2791	3020	3003	2668	2341	1612	0703	7	
	3		0006	0019	0077	0446	1302	1762	2336	2668	2731	2508	1641	6	
	4			0001	0006	0074	0391	0661	1168	1715	2048	2508	2461	5	
	5					0008	0078	0165	0389	0735	1024	1672	2461	4	
	6					0001	0010	0028	0087	0210	0341	0743	1641	3	
	7						0001	0003	0012	0039	0073	0212	0703	2	
	8								0001	0004	0009	0035	0176	1	
	9										0001	0003	0020	0	
10	0	0,	8171	7374	5987	3487	1615	1074	0563	0282	0173	0060	0010	10	10
	1		1667	2281	3151	3874	3230	2684	1877	1211	0867	0403	0098	9	
	2		0153	0317	0746	1937	2907	3020	2816	2335	1951	1209	0439	8	
	3		0008	0026	0105	0574	1550	2013	2503	2668	2601	2150	1172	7	
	4			0001	0010	0112	0543	0881	1460	2001	2276	2508	2051	6	
	5				0001	0015	0130	0264	0584	1029	1366	2007	2461	5	
	6					0001	0022	0055	0162	0368	0569	1115	2051	4	
	7						0002	0008	0031	0090	0163	0425	1172	3	
	8							0001	0004	0014	0030	0106	0439	2	
	9									0001	0003	0016	0098	1	
	10		Nicht aufgeführte Werte sind 0,0000.									0001	0010	0	
n			0,98	0,97	0,95	0,90	5/6	0,80	0,75	0,70	2/3	0,60	0,50	k	n
			p												

$$P_{n;p}\left(X \le k\right) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^{i} \cdot \left(1-p\right)^{n-i}$$

p

n	k		0,02	0,03	0,05	0,10	1/6	0,20	0,25	0,30	1/3	0,40	0,50		n
2	0	0,	9604	9409	9025	8100	6944	6400	5625	4900	4444	3600	2500	1	2
	1		9996	9991	9975	9900	9722	9600	9375	9100	8889	8400	7500	0	
3	0	0,	9412	9127	8574	7290	5787	5120	4219	3430	2963	2160	1250	2	3
	1		9988	9974	9928	9720	9259	8960	8438	7840	7407	6480	5000	1	
	2				9999	9990	9954	9920	9844	9730	9630	9360	8750	0	
4	0	0,	9224	8853	8145	6561	4823	4096	3164	2401	1975	1296	0625	3	4
	1		9977	9948	9860	9477	8681	8192	7383	6517	5926	4752	3125	2	
	2			9999	9995	9963	9838	9728	9492	9163	8889	8208	6875	1	
	3					9999	9992	9984	9961	9919	9877	9744	9375	0	
5	0	0,	9039	8587	7738	5905	4019	3277	2373	1681	1317	0778	0313	4	5
	1		9962	9915	9774	9185	8038	7373	6328	5282	4609	3370	1875	3	
	2		9999	9997	9988	9914	9645	9421	8965	8369	7901	6826	5000	2	
	3					9995	9967	9933	9844	9692	9547	9130	8125	1	
	4						9999	9997	9990	9976	9959	9898	9688	0	
6	0	0,	8858	8330	7351	5314	3349	2621	1780	1176	0878	0467	0156	5	6
	1		9943	9875	9672	8857	7368	6554	5339	4202	3512	2333	1094	4	
	2		9998	9995	9978	9842	9377	9011	8306	7443	6804	5443	3438	3	
	3				9999	9987	9913	9830	9624	9295	8999	8208	6563	2	
	4					9999	9993	9984	9954	9891	9822	9590	8906	1	
	5							9999	9998	9993	9986	9959	9844	0	
7	0	0,	8681	8080	6983	4783	2791	2097	1335	0824	0585	0280	0078	6	7
	1		9921	9829	9556	8503	6698	5767	4449	3294	2634	1586	0625	5	
	2		9997	9991	9962	9743	9042	8520	7564	6471	5706	4199	2266	4	
	3				9998	9973	9824	9667	9294	8740	8267	7102	5000	3	
	4					9998	9980	9953	9871	9712	9547	9037	7734	2	
	5						9999	9996	9987	9962	9931	9812	9375	1	
	6								9999	9998	9995	9984	9922	0	
8	0	0,	8508	7837	6634	4305	2326	1678	1001	0576	0390	0168	0039	7	8
	1		9897	9777	9428	8131	6047	5033	3671	2553	1951	1064	0352	6	
	2		9996	9987	9942	9619	8652	7969	6785	5518	4682	3154	1445	5	
	3			9999	9996	9950	9693	9437	8862	8059	7414	5941	3633	4	
	4					9996	9954	9896	9727	9420	9121	8263	6367	3	
	5						9996	9988	9958	9887	9803	9502	8555	2	
	6							9999	9996	9987	9974	9915	9648	1	
	7									9999	9998	9993	9961	0	
9	0	0,	8337	7602	6302	3874	1938	1342	0751	0404	0260	0101	0020	8	9
	1		9869	9718	9288	7748	5427	4362	3003	1960	1431	0705	0195	7	
	2		9994	9980	9916	9470	8217	7382	6007	4628	3772	2318	0898	6	
	3			9999	9994	9917	9520	9144	8343	7297	6503	4826	2539	5	
	4					9991	9910	9804	9511	9012	8552	7334	5000	4	
	5					9999	9989	9969	9900	9747	9576	9006	7461	3	
	6						9999	9997	9987	9957	9917	9750	9102	2	
	7								9999	9996	9990	9962	9805	1	
	8										9999	9997	9980	0	
10	0	0,	8171	7374	5987	3487	1615	1074	0563	0282	0173	0060	0010	9	10
	1		9838	9655	9139	7361	4845	3758	2440	1493	1040	0464	0107	8	
	2		9991	9972	9885	9298	7752	6778	5256	3828	2991	1673	0547	7	
	3			9999	9990	9872	9303	8791	7759	6496	5593	3823	1719	6	
	4				9999	9984	9845	9672	9219	8497	7869	6331	3770	5	
	5					9999	9976	9936	9803	9527	9234	8338	6230	4	
	6						9997	9991	9965	9894	9803	9452	8281	3	
	7							9999	9996	9984	9966	9877	9453	2	
	8									9999	9996	9983	9893	1	
	9											9999	9990	0	
11	0	0,	8007	7153	5688	3138	1346	0859	0422	0198	0116	0036	0005	10	11
	1		9805	9587	8981	6974	4307	3221	1971	1130	0751	0302	0059	9	
	2		9988	9963	9848	9104	7268	6174	4552	3127	2341	1189	0327	8	
	3			9998	9984	9815	9044	8389	7133	5696	4726	2963	1133	7	
	4				9999	9972	9755	9496	8854	7897	7110	5328	2744	6	
	5					9997	9954	9883	9657	9218	8779	7535	5000	5	
	6						9994	9980	9924	9784	9614	9006	7256	4	
	7						9999	9998	9988	9957	9912	9707	8867	3	
	8								9999	9994	9986	9941	9673	2	
	9										9999	9993	9941	1	
	10		Nicht aufgeführte Werte sind 1,0000.										9995	0	
n			0,98	0,97	0,95	0,90	5/6	0,80	0,75	0,70	2/3	0,60	0,50	k	n

p

Bei grau unterlegtem Eingang, d.h. $p \ge \frac{1}{2}$, gilt: $P\left(X \le k\right) = 1 -$ *abgelesener Wert*.

$$P_{n;p}\left(X \le k\right) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^{i} \cdot \left(1-p\right)^{n-i}$$

n	k		0,02	0,03	0,05	0,10	1/6	0,20	0,25	0,30	1/3	0,40	0,50		n
12	0	0,	7847	6938	5404	2824	1122	0687	0317	0138	0077	0022	0002	11	12
	1		9769	9514	8816	6590	3813	2749	1584	0850	0540	0196	0032	10	
	2		9985	9952	9804	8891	6774	5583	3907	2528	1811	0834	0193	9	
	3		9999	9997	9978	9744	8748	7946	6488	4925	3931	2253	0730	8	
	4				9998	9957	9636	9274	8424	7237	6315	4382	1938	7	
	5					9995	9921	9806	9456	8822	8223	6652	3872	6	
	6					9999	9987	9961	9857	9614	9336	8418	6128	5	
	7						9998	9994	9972	9905	9812	9427	8062	4	
	8							9999	9996	9983	9961	9847	9270	3	
	9									9998	9995	9972	9807	2	
	10											9997	9968	1	
	11												9998	0	
13	0	0,	7690	6730	5133	2542	0935	0550	0238	0097	0051	0013	0001	12	13
	1		9730	9436	8646	6213	3365	2336	1267	0637	0385	0126	0017	11	
	2		9980	9938	9755	8661	6281	5017	3326	2025	1387	0579	0112	10	
	3		9999	9995	9969	9658	8419	7473	5843	4206	3224	1686	0461	9	
	4				9997	9935	9488	9009	7940	6543	5520	3530	1334	8	
	5					9991	9873	9700	9198	8346	7587	5744	2905	7	
	6					9999	9976	9930	9757	9376	8965	7712	5000	6	
	7						9997	9988	9944	9818	9653	9023	7095	5	
	8							9998	9990	9960	9912	9679	8666	4	
	9								9999	9993	9984	9922	9539	3	
	10									9999	9998	9987	9888	2	
	11											9999	9983	1	
	12												9999	0	
14	0	0,	7536	6528	4877	2288	0779	0440	0178	0068	0034	0008	0001	13	14
	1		9690	9355	8470	5846	2960	1979	1010	0475	0274	0081	0009	12	
	2		9975	9923	9699	8416	5795	4481	2811	1608	1053	0398	0065	11	
	3		9999	9994	9958	9559	8063	6982	5213	3552	2612	1243	0287	10	
	4				9996	9908	9310	8702	7415	5842	4755	2793	0898	9	
	5					9985	9809	9561	8883	7805	6898	4859	2120	8	
	6					9998	9959	9884	9617	9067	8505	6925	3953	7	
	7						9993	9976	9897	9685	9424	8499	6047	6	
	8						9999	9996	9978	9917	9826	9417	7880	5	
	9								9997	9983	9960	9825	9102	4	
	10									9998	9993	9961	9713	3	
	11										9999	9994	9935	2	
	12											9999	9991	1	
	13												9999	0	
15	0	0,	7386	6333	4633	2059	0649	0352	0134	0047	0023	0005	0000	14	15
	1		9647	9270	8290	5490	2596	1671	0802	0353	0194	0052	0005	13	
	2		9970	9906	9638	8159	5322	3980	2361	1268	0794	0271	0037	12	
	3		9998	9992	9945	9444	7685	6482	4613	2969	2092	0905	0176	11	
	4			9999	9994	9873	9102	8358	6865	5155	4041	2173	0592	10	
	5				9999	9978	9726	9389	8516	7216	6184	4032	1509	9	
	6					9997	9934	9819	9434	8689	7970	6098	3036	8	
	7						9987	9958	9827	9500	9118	7869	5000	7	
	8						9998	9992	9958	9848	9692	9050	6964	6	
	9							9999	9992	9963	9915	9662	8491	5	
	10								9999	9993	9982	9907	9408	4	
	11									9999	9997	9981	9824	3	
	12											9997	9963	2	
	13												9995	1	
16	0	0,	7238	6143	4401	1853	0541	0281	0100	0033	0015	0003	0000	15	16
	1		9601	9182	8108	5147	2272	1407	0635	0261	0137	0033	0003	14	
	2		9963	9887	9571	7892	4868	3518	1971	0994	0594	0183	0021	13	
	3		9998	9989	9930	9316	7291	5981	4050	2459	1659	0651	0106	12	
	4			9999	9991	9830	8866	7982	6302	4499	3391	1666	0384	11	
	5				9999	9967	9622	9183	8103	6598	5469	3288	1051	10	
	6					9995	9899	9733	9204	8247	7374	5272	2272	9	
	7					9999	9979	9930	9729	9256	8735	7161	4018	8	
	8						9996	9985	9925	9743	9500	8577	5982	7	
	9							9998	9984	9929	9841	9417	7728	6	
	10								9997	9984	9960	9809	8949	5	
	11									9997	9992	9951	9616	4	
	12										9999	9991	9894	3	
	13											9999	9979	2	
	14												9997	1	
n			0,98	0,97	0,95	0,90	5/6	0,80	0,75	0,70	2/3	0,60	0,50	k	n

Nicht aufgeführte Werte sind 1,0000.

p

Bei grau unterlegtem Eingang, d.h. $p \ge \frac{1}{2}$, gilt: $P\left(X \le k\right) = 1 - \textit{abgelesener Wert}$.

$$P_{n;p}\left(X \le k\right) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^{i} \cdot \left(1-p\right)^{n-i}$$

n	k	p: 0,02	0,03	0,05	0,10	1/6	0,20	0,25	0,30	1/3	0,40	0,50	k	n
	0	0, 7093	5958	4181	1668	0451	0225	0075	0023	0010	0002	0000	16	
	1	9554	9091	7922	4818	1983	1182	0501	0193	0096	0021	0001	15	
	2	9956	9866	9497	7618	4435	3096	1637	0774	0442	0123	0012	14	
	3	9997	9986	9912	9174	6887	5489	3530	2019	1304	0464	0064	13	
	4		9999	9988	9779	8604	7582	5739	3887	2814	1260	0245	12	
	5			9999	9953	9496	8943	7653	5968	4777	2639	0717	11	
	6				9992	9853	9623	8929	7752	6739	4478	1662	10	
17	7				9999	9965	9891	9598	8954	8281	6405	3145	9	17
	8					9993	9974	9876	9597	9245	8011	5000	8	
	9					9999	9995	9969	9873	9727	9081	6855	7	
	10						9999	9994	9968	9920	9652	8338	6	
	11							9999	9993	9981	9894	9283	5	
	12								9999	9997	9975	9755	4	
	13										9995	9936	3	
	14										9999	9988	2	
	15											9999	1	
	0	0, 6951	5780	3972	1501	0376	0180	0056	0016	0007	0001	0000	17	
	1	9505	8997	7735	4503	1728	0991	0395	0142	0068	0013	0001	16	
	2	9948	9843	9419	7338	4027	2713	1353	0600	0326	0082	0007	15	
	3	9996	9982	9891	9018	6479	5010	3057	1646	1017	0328	0038	14	
	4		9998	9985	9718	8318	7164	5187	3327	2311	0942	0154	13	
	5			9998	9936	9347	8671	7175	5344	4122	2088	0481	12	
	6				9988	9794	9487	8610	7217	6085	3743	1189	11	
	7				9998	9947	9837	9431	8593	7767	5634	2403	10	
18	8					9989	9957	9807	9404	8924	7368	4073	9	18
	9					9998	9991	9946	9790	9567	8653	5927	8	
	10						9998	9988	9939	9856	9424	7597	7	
	11							9998	9986	9961	9797	8811	6	
	12								9997	9991	9942	9519	5	
	13									9999	9987	9846	4	
	14										9998	9962	3	
	15											9993	2	
	16											9999	1	
	0	0, 6812	5606	3774	1351	0313	0144	0042	0011	0005	0001	0000	18	
	1	9454	8900	7547	4203	1502	0829	0310	0104	0047	0008	0000	17	
	2	9939	9817	9335	7054	3643	2369	1113	0462	0240	0055	0004	16	
	3	9995	9978	9868	8850	6070	4551	2631	1332	0787	0230	0022	15	
	4		9998	9980	9648	8011	6733	4654	2822	1879	0696	0096	14	
	5			9998	9914	9176	8369	6678	4739	3519	1629	0318	13	
	6				9983	9719	9324	8251	6655	5431	3081	0835	12	
	7				9997	9921	9767	9225	8180	7207	4878	1796	11	
19	8					9982	9933	9713	9161	8538	6675	3238	10	19
	9					9996	9984	9911	9674	9352	8139	5000	9	
	10					9999	9997	9977	9895	9759	9115	6762	8	
	11							9995	9972	9926	9648	8204	7	
	12							9999	9994	9981	9884	9165	6	
	13								9999	9996	9969	9682	5	
	14									9999	9994	9904	4	
	15										9999	9978	3	
	16											9996	2	
	0	0, 6676	5438	3585	1216	0261	0115	0032	0008	0003	0000	0000	19	
	1	9401	8802	7358	3917	1304	0692	0243	0076	0033	0005	0000	18	
	2	9929	9790	9245	6769	3287	2061	0913	0355	0176	0036	0002	17	
	3	9994	9973	9841	8670	5665	4114	2252	1071	0604	0160	0013	16	
	4		9997	9974	9568	7687	6296	4148	2375	1515	0510	0059	15	
	5			9997	9887	8982	8042	6172	4164	2972	1256	0207	14	
	6				9976	9629	9133	7858	6080	4793	2500	0577	13	
	7				9996	9887	9679	8982	7723	6615	4159	1316	12	
20	8				9999	9972	9900	9591	8867	8095	5956	2517	11	20
	9					9994	9974	9861	9520	9081	7553	4119	10	
	10					9999	9994	9961	9829	9624	8725	5881	9	
	11						9999	9991	9949	9870	9435	7483	8	
	12							9998	9987	9963	9790	8684	7	
	13								9997	9991	9935	9423	6	
	14									9998	9984	9793	5	
	15										9997	9941	4	
	16											9987	3	
	17											9998	2	
n		0,98	0,97	0,95	0,90	5/6	0,80	0,75	0,70	2/3	0,60	0,50	k	n
		p												

Nicht aufgeführte Werte sind 1,0000.

Bei grau unterlegtem Eingang, d.h. $p \ge \frac{1}{2}$, gilt: $P\left(X \le k\right) = 1 - \textit{abgelesener Wert}$.

$$P_{n;p}\left(X \le k\right) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot \left(1-p\right)^{n-i}$$

								p							
n	**k**		0,02	0,03	0,05	0,10	1/6	0,20	0,25	0,30	1/3	0,40	0,50		**n**
	0	0,	6035	4670	2774	0718	0105	0038	0008	0001	0000	0000	0000	**24**	
	1		9114	8280	6424	2712	0629	0274	0070	0016	0005	0001	0000	**23**	
	2		9868	9620	8729	5371	1887	0982	0321	0090	0035	0004	0000	**22**	
	3		9986	9938	9659	7636	3816	2340	0962	0332	0149	0024	0001	**21**	
	4		9999	9992	9928	9020	5937	4207	2137	0905	0462	0095	0005	**20**	
	5			9999	9988	9666	7720	6167	3783	1935	1120	0294	0020	**19**	
	6				9998	9905	8908	7800	5611	3407	2215	0736	0073	**18**	
	7					9977	9553	8909	7265	5118	3703	1536	0216	**17**	
	8					9995	9843	9532	8506	6769	5376	2735	0539	**16**	
	9					9999	9953	9827	9287	8106	6956	4246	1148	**15**	
25	**10**						9988	9944	9703	9022	8220	5858	2122	**14**	**25**
	11						9997	9985	9893	9558	9082	7323	3450	**13**	
	12						9999	9996	9966	9825	9585	8462	5000	**12**	
	13							9999	9991	9940	9836	9222	6550	**11**	
	14								9998	9982	9944	9656	7878	**10**	
	15									9995	9984	9868	8852	**9**	
	16									9999	9996	9957	9461	**8**	
	17										9999	9988	9784	**7**	
	18											9997	9927	**6**	
	19											9999	9980	**5**	
	20												9995	**4**	
	21												9999	**3**	
	0	0,	3642	2181	0769	0052	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	**49**	
	1		7358	5553	2794	0338	0012	0002	0000	0000	0000	0000	0000	**48**	
	2		9216	8108	5405	1117	0066	0013	0001	0000	0000	0000	0000	**47**	
	3		9822	9372	7604	2503	0238	0057	0005	0000	0000	0000	0000	**46**	
	4		9968	9832	8964	4312	0643	0185	0021	0002	0000	0000	0000	**45**	
	5		9995	9963	9622	6161	1388	0480	0070	0007	0001	0000	0000	**44**	
	6		9999	9993	9882	7702	2506	1034	0194	0025	0005	0000	0000	**43**	
	7			9999	9968	8779	3911	1904	0453	0073	0017	0001	0000	**42**	
	8				9992	9421	5421	3073	0916	0183	0050	0002	0000	**41**	
	9				9998	9755	6830	4437	1637	0402	0127	0008	0000	**40**	
	10					9906	7986	5836	2622	0789	0284	0022	0000	**39**	
	11					9968	8827	7107	3816	1390	0570	0057	0000	**38**	
	12					9990	9373	8139	5110	2229	1035	0133	0002	**37**	
	13					9997	9693	8894	6370	3279	1715	0280	0005	**36**	
	14					9999	9862	9393	7481	4468	2612	0540	0013	**35**	
	15						9943	9692	8369	5692	3690	0955	0033	**34**	
	16						9978	9856	9017	6839	4868	1561	0077	**33**	
	17						9992	9937	9449	7822	6046	2369	0164	**32**	
50	**18**						9997	9975	9713	8594	7126	3356	0325	**31**	**50**
	19						9999	9991	9861	9152	8036	4465	0595	**30**	
	20							9997	9937	9522	8741	5610	1013	**29**	
	21							9999	9974	9749	9244	6701	1611	**28**	
	22								9990	9877	9576	7660	2399	**27**	
	23								9996	9944	9778	8438	3359	**26**	
	24								9999	9976	9892	9022	4439	**25**	
	25									9991	9951	9427	5561	**24**	
	26									9997	9979	9686	6641	**23**	
	27									9999	9992	9840	7601	**22**	
	28										9997	9924	8389	**21**	
	29										9999	9966	8987	**20**	
	30											9986	9405	**19**	
	31											9995	9675	**18**	
	32											9998	9836	**17**	
	33											9999	9923	**16**	
	34												9967	**15**	
	35												9987	**14**	
	36												9995	**13**	
	37	Nicht aufgeführte Werte sind 1,0000.											9998	**12**	
n			0,98	0,97	0,95	0,90	5/6	0,80	0,75	0,70	2/3	0,60	0,50	**k**	**n**
								p							

Bei grau unterlegtem Eingang, d.h. $p \ge \frac{1}{2}$, gilt: $P\left(X \le k\right) = 1 - \textit{abgelesener Wert}$.

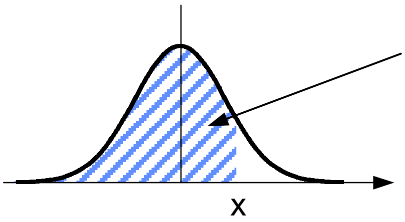
$$P_{n;p}\left(X \le k\right) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^{i} \cdot \left(1-p\right)^{n-i}$$

n	k	p: 0,02	0,03	0,05	0,10	1/6	0,20	0,25	0,30	1/3	0,40	0,50		n
	0	0, 1326	0476	0059	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	99	
	1	4033	1946	0371	0003	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	98	
	2	6767	4198	1183	0019	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	97	
	3	8590	6472	2578	0078	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	96	
	4	9492	8179	4360	0237	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	95	
	5	9845	9192	6160	0576	0004	0000	0000	0000	0000	0000	0000	94	
	6	9959	9688	7660	1172	0013	0001	0000	0000	0000	0000	0000	93	
	7	9991	9894	8720	2061	0038	0003	0000	0000	0000	0000	0000	92	
	8	9998	9968	9369	3209	0095	0009	0000	0000	0000	0000	0000	91	
	9		9991	9718	4513	0213	0023	0000	0000	0000	0000	0000	90	
	10		9998	9885	5832	0427	0057	0001	0000	0000	0000	0000	89	
	11			9957	7030	0777	0126	0004	0000	0000	0000	0000	88	
	12			9985	8018	1297	0253	0010	0000	0000	0000	0000	87	
	13			9995	8761	2000	0469	0025	0001	0000	0000	0000	86	
	14			9999	9274	2874	0804	0054	0002	0000	0000	0000	85	
	15				9601	3877	1285	0111	0004	0000	0000	0000	84	
	16				9794	4942	1923	0211	0010	0001	0000	0000	83	
	17				9900	5994	2712	0376	0022	0002	0000	0000	82	
	18				9954	6965	3621	0630	0045	0005	0000	0000	81	
	19				9980	7803	4602	0995	0089	0011	0000	0000	80	
	20				9992	8481	5595	1488	0165	0024	0000	0000	79	
	21				9997	8998	6540	2114	0288	0048	0000	0000	78	
	22				9999	9369	7389	2864	0479	0091	0001	0000	77	
	23					9621	8109	3711	0755	0164	0003	0000	76	
	24					9783	8686	4617	1136	0281	0006	0000	75	
	25					9881	9125	5535	1631	0458	0012	0000	74	
	26					9938	9442	6417	2244	0715	0024	0000	73	
	27					9969	9658	7224	2964	1066	0046	0000	72	
	28					9985	9800	7925	3768	1524	0084	0000	71	
	29					9993	9888	8505	4623	2093	0148	0000	70	
	30					9997	9939	8962	5491	2766	0248	0000	69	
	31					9999	9969	9307	6331	3525	0398	0001	68	
	32						9984	9554	7107	4344	0615	0002	67	
	33						9993	9724	7793	5188	0913	0004	66	
100	34						9997	9836	8371	6019	1303	0009	65	100
	35						9999	9906	8839	6803	1795	0018	64	
	36						9999	9948	9201	7511	2386	0033	63	
	37							9973	9470	8123	3068	0060	62	
	38							9986	9660	8630	3822	0105	61	
	39							9993	9790	9034	4621	0176	60	
	40							9997	9875	9341	5433	0284	59	
	41							9999	9928	9566	6225	0443	58	
	42							9999	9960	9724	6967	0666	57	
	43								9979	9831	7635	0967	56	
	44								9989	9900	8211	1356	55	
	45								9995	9943	8689	1841	54	
	46								9997	9969	9070	2421	53	
	47								9999	9983	9362	3086	52	
	48								9999	9991	9577	3822	51	
	49									9996	9729	4602	50	
	50									9998	9832	5398	49	
	51									9999	9900	6178	48	
	52										9942	6914	47	
	53										9968	7579	46	
	54										9983	8159	45	
	55										9991	8644	44	
	56										9996	9033	43	
	57										9998	9334	42	
	58										9999	9557	41	
	59											9716	40	
	60											9824	39	
	61											9895	38	
	62											9940	37	
	63											9967	36	
	64											9982	35	
	65											9991	34	
	66											9996	33	
	67											9998	32	
	68	Nicht aufgeführte Werte sind 1,0000.										9999	31	
n		0,98	0,97	0,95	0,90	5/6	0,80	0,75	0,70	2/3	0,60	0,50	k	n

p

Bei grau unterlegtem Eingang, d.h. $p \ge \frac{1}{2}$, gilt: $P\left(X \le k\right) = 1 -$ *abgelesener Wert*.

Tabelle der Standardnormalverteilung ($\mu = 0$, $\sigma = 1$)



$$F_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Ablesebeispiel: $F_N(2{,}36) = 0{,}990863$

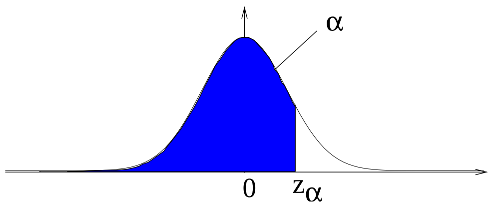
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,500000	0,503989	0,507978	0,511967	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856
0,10	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345
0,20	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092
0,30	0,617911	0,621719	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732
0,40	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933
0,50	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705402	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405
0,60	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903
0,70	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236
0,80	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802338	0,805106	0,807850	0,810570	0,813267
0,90	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913
1,00	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143
1,10	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,878999	0,881000	0,882977
1,20	0,884930	0,886860	0,888767	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475
1,30	0,903199	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914656	0,916207	0,917736
1,40	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888
1,50	0,933193	0,934478	0,935744	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083
1,60	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486
1,70	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959071	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273
1,80	0,964070	0,964852	0,965621	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621
1,90	0,971284	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705
2,00	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691
2,10	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738
2,20	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989
2,30	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576
2,40	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613
2,50	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201
2,60	0,995339	0,995473	0,995603	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427
2,70	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365
2,80	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074
2,90	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605
3,00	0,998650	0,998694	0,998736	0,998777	0,998817	0,998856	0,998893	0,998930	0,998965	0,998999
3,10	0,999032	0,999064	0,999096	0,999126	0,999155	0,999184	0,999211	0,999238	0,999264	0,999289
3,20	0,999313	0,999336	0,999359	0,999381	0,999402	0,999423	0,999443	0,999462	0,999481	0,999499
3,30	0,999517	0,999533	0,999550	0,999566	0,999581	0,999596	0,999610	0,999624	0,999638	0,999650
3,40	0,999663	0,999675	0,999687	0,999698	0,999709	0,999720	0,999730	0,999740	0,999749	0,999758
3,50	0,999767	0,999776	0,999784	0,999792	0,999800	0,999807	0,999815	0,999821	0,999828	0,999835
3,60	0,999841	0,999847	0,999853	0,999858	0,999864	0,999869	0,999874	0,999879	0,999883	0,999888
3,70	0,999892	0,999896	0,999900	0,999904	0,999908	0,999912	0,999915	0,999918	0,999922	0,999925
3,80	0,999928	0,999930	0,999933	0,999936	0,999938	0,999941	0,999943	0,999946	0,999948	0,999950
3,90	0,999952	0,999954	0,999956	0,999958	0,999959	0,999961	0,999963	0,999964	0,999966	0,999967
4,00	0,999968	0,999970	0,999971	0,999972	0,999973	0,999974	0,999975	0,999976	0,999977	0,999978
4,10	0,999979	0,999980	0,999981	0,999982	0,999983	0,999983	0,999984	0,999985	0,999985	0,999986
4,20	0,999987	0,999987	0,999988	0,999988	0,999989	0,999989	0,999990	0,999990	0,999991	0,999991
4,30	0,999991	0,999992	0,999992	0,999993	0,999993	0,999993	0,999993	0,999994	0,999994	0,999994
4,40	0,999995	0,999995	0,999995	0,999995	0,999995	0,999996	0,999996	0,999996	0,999996	0,999996
4,50	0,999997	0,999997	0,999997	0,999997	0,999997	0,999997	0,999997	0,999998	0,999998	0,999998

Quantile z_α der Standardnormalverteilung $N(0,1)$

Ablesebeispiel: $z_{0.95} = 1.6449$.

Erweiterung der Tafel: $z_{1-\alpha} = -z_\alpha$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-z^2/2} \mathrm{d}z \quad \text{Verteilungsfunktion}$$

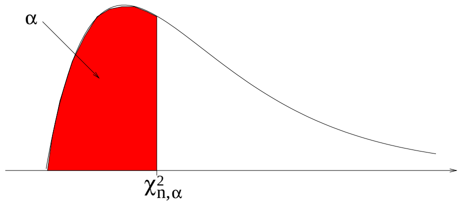


α	z_α	α	z_α	α	z_α	α	z_α
0.9999	3.7190	0.9955	2.6121	0.975	1.9600	0.780	0.7722
0.9998	3.5401	0.9950	2.5758	0.970	1.8808	0.770	0.7388
0.9997	3.4316	0.9945	2.5427	0.965	1.8119	0.760	0.7063
0.9996	3.3528	0.9940	2.5121	0.960	1.7507	0.750	0.6745
0.9995	3.2905	0.9935	2.4838	0.955	1.6954	0.740	0.6433
0.9994	3.2389	0.9930	2.4573	0.950	1.6449	0.730	0.6128
0.9993	3.1946	0.9925	2.4324	0.945	1.5982	0.720	0.5828
0.9992	3.1559	0.9920	2.4089	0.940	1.5548	0.710	0.5534
0.9991	3.1214	0.9915	2.3867	0.935	1.5141	0.700	0.5244
0.9990	3.0902	0.9910	2.3656	0.930	1.4758	0.690	0.4959
0.9989	3.0618	0.9905	2.3455	0.925	1.4395	0.680	0.4677
0.9988	3.0357	0.9900	2.3263	0.920	1.4051	0.670	0.4399
0.9987	3.0115	0.9895	2.3080	0.915	1.3722	0.660	0.4125
0.9986	2.9889	0.9890	2.2904	0.910	1.3408	0.650	0.3853
0.9985	2.9677	0.9885	2.2734	0.905	1.3106	0.640	0.3585
0.9984	2.9478	0.9880	2.2571	0.900	1.2816	0.630	0.3319
0.9983	2.9290	0.9875	2.2414	0.895	1.2536	0.620	0.3055
0.9982	2.9112	0.9870	2.2262	0.890	1.2265	0.610	0.2793
0.9981	2.8943	0.9865	2.2115	0.885	1.2004	0.600	0.2533
0.9980	2.8782	0.9860	2.1973	0.880	1.1750	0.590	0.2275
0.9979	2.8627	0.9855	2.1835	0.875	1.1503	0.580	0.2019
0.9978	2.8480	0.9850	2.1701	0.870	1.1264	0.570	0.1764
0.9977	2.8338	0.9845	2.1571	0.865	1.1031	0.560	0.1510
0.9976	2.8202	0.9840	2.1444	0.860	1.0803	0.550	0.1257
0.9975	2.8070	0.9835	2.1321	0.855	1.0581	0.540	0.1004
0.9974	2.7944	0.9830	2.1201	0.850	1.0364	0.530	0.0753
0.9973	2.7821	0.9825	2.1084	0.845	1.0152	0.520	0.0502
0.9972	2.7703	0.9820	2.0969	0.840	0.9945	0.510	0.0251
0.9971	2.7589	0.9815	2.0858	0.835	0.9741	0.500	0.0000
0.9970	2.7478	0.9810	2.0749	0.830	0.9542		
0.9969	2.7370	0.9805	2.0642	0.825	0.9346		
0.9968	2.7266	0.9800	2.0537	0.820	0.9154		
0.9967	2.7164	0.9795	2.0435	0.815	0.8965		
0.9966	2.7065	0.9790	2.0335	0.810	0.8779		
0.9965	2.6968	0.9785	2.0237	0.805	0.8596		
0.9964	2.6874	0.9780	2.0141	0.800	0.8416		
0.9963	2.6783	0.9775	2.0047	0.795	0.8239		
0.9962	2.6693	0.9770	1.9954	0.790	0.8064		
0.9961	2.6606	0.9765	1.9863	0.785	0.7892		
0.9960	2.6521	0.9760	1.9774	0.780	0.7722		

Quantile $\chi^2_{n,\alpha}$ der χ^2-Verteilung

$\chi^2_{n,\alpha}$ ist der Wert für gegebenes α der Verteilungsfunktion einer χ^2-Verteilung mit Freiheitsgrad n.

Ablesebeispiel: $\chi_{1,\,0.05} = {}^{-3}\,3.93 = 3.93 \cdot 10^{-3} = 0.00393$



$$\chi^2_n(x) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\, x^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} \quad \text{Wahrscheinlichkeitsdichte}$$

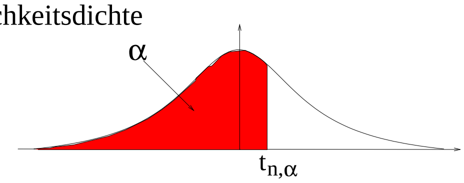
n	$\alpha = 0.995$	0.990	0.975	0.950	0.900	0.750	0.500	0.250	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	7.879	6.635	5.034	3.841	2.706	1.323	0.455	0.102	$^{-2}1.58$	$^{-3}3.93$	$^{-4}9.82$	$^{-4}1.57$	$^{-5}3.93$
2	10.60	9.210	7.378	5.991	4.605	2.773	1.386	0.575	0.211	0.103	$^{-2}5.06$	$^{-2}2.01$	$^{-2}1.00$
3	12.84	11.34	9.348	7.815	6.251	4.108	2.366	1.213	0.584	0.352	0.216	0.115	$^{-2}7.17$
4	14.86	13.28	11.14	9.488	7.779	5.385	3.357	1.923	1.064	0.711	0.484	0.297	0.207
5	16.75	15.09	12.83	11.07	9.236	6.626	4.351	2.675	1.610	1.145	0.831	0.554	0.412
6	18.55	16.81	14.45	12.59	10.64	7.841	5.348	3.455	2.204	1.635	1.237	0.872	0.676
7	20.28	18.48	16.01	14.07	12.02	9.037	6.346	4.255	2.833	2.167	1.690	1.239	0.989
8	21.96	20.09	17.53	15.51	13.36	10.22	7.344	5.071	3.490	2.733	2.180	1.646	1.344
9	23.59	21.67	19.02	16.92	14.68	11.39	8.343	5.899	4.168	3.325	2.700	2.088	1.735
10	25.19	23.21	20.48	18.31	15.99	12.55	9.342	6.737	4.865	3.940	3.247	2.558	2.156
11	26.76	24.73	21.92	19.68	17.28	13.70	10.34	7.584	5.578	4.575	3.816	3.053	2.603
12	28.30	26.22	23.34	21.03	18.55	14.85	11.34	8.438	6.304	5.226	4.404	3.571	3.074
13	29.82	27.69	24.74	22.36	19.81	15.98	12.34	9.299	7.042	5.892	5.009	4.107	3.565
14	31.32	29.14	26.12	23.68	21.06	17.12	13.34	10.17	7.790	6.571	5.629	4.660	4.075
15	32.80	30.58	27.49	25.00	22.31	18.25	14.34	11.04	8.547	7.261	6.262	5.229	4.601
16	34.27	32.00	28.85	26.30	23.54	19.37	15.34	11.91	9.312	7.962	6.908	5.812	5.142
17	35.72	33.41	30.19	27.59	24.77	20.49	16.34	12.79	10.09	8.672	7.564	6.408	5.697
18	37.16	34.81	31.53	28.87	25.99	21.60	17.34	13.68	10.86	9.390	8.231	7.015	6.265
19	38.58	36.19	32.85	30.14	27.20	22.72	18.34	14.56	11.65	10.12	8.907	7.633	6.844
20	40.00	37.57	34.17	31.41	28.41	23.83	19.34	15.45	12.44	10.85	9.591	8.260	7.434
21	41.40	38.93	35.48	32.67	29.62	24.93	20.34	16.34	13.24	11.59	10.28	8.897	8.034
22	42.80	40.29	36.78	33.92	30.81	26.04	21.34	17.24	14.04	12.34	10.98	9.542	8.643
23	44.18	41.64	38.08	35.17	32.01	27.14	22.34	18.14	14.85	13.09	11.69	10.20	9.260
24	45.56	42.98	39.36	36.42	33.20	28.24	23.34	19.04	15.66	13.85	12.40	10.86	9.886
25	46.93	44.31	40.65	37.65	34.38	29.34	24.34	19.94	16.47	14.61	13.12	11.52	10.52
26	48.29	45.64	41.92	38.89	35.56	30.43	25.34	20.84	17.29	15.38	13.84	12.20	11.16
27	49.65	46.96	43.19	40.11	36.74	31.53	26.34	21.75	18.11	16.15	14.57	12.88	11.81
28	50.99	48.28	44.46	41.34	37.92	32.62	27.34	22.66	18.94	16.93	15.31	13.56	12.46
29	52.34	49.59	45.72	42.56	39.09	33.71	28.34	23.57	19.77	17.71	16.05	14.26	13.12
30	53.67	50.89	46.98	43.77	40.26	34.80	29.34	24.48	20.60	18.49	16.79	14.95	13.79
40	66.77	63.69	59.34	55.76	51.81	45.62	39.34	33.66	29.05	26.51	24.43	22.16	20.71
50	79.49	76.15	71.42	67.50	63.17	56.33	49.33	42.94	37.69	34.76	32.36	29.71	27.99
60	91.95	88.38	83.30	79.08	74.40	66.98	59.33	52.29	46.46	43.19	40.48	37.48	35.53
70	104.2	100.4	95.02	90.53	85.53	77.58	69.33	61.70	55.33	51.74	48.76	45.44	43.28
80	116.3	112.3	106.6	101.9	96.58	88.13	79.33	71.14	64.28	60.39	57.15	53.54	51.17
90	128.3	124.1	118.1	113.1	107.6	98.65	89.33	80.62	73.29	69.13	65.65	61.75	59.20
100	140.2	135.8	129.6	124.3	118.5	109.1	99.33	90.13	82.36	77.93	74.22	70.06	67.33
150	198.4	193.2	185.8	179.6	172.6	161.3	149.3	138.0	128.3	122.7	118.0	112.7	109.1
200	255.3	249.4	241.1	234.0	226.0	213.1	199.3	186.2	174.8	168.3	162.7	156.4	152.2
250	311.3	304.9	295.7	287.9	279.1	264.7	249.3	234.6	221.8	214.4	208.1	200.9	196.2
300	366.8	359.9	349.9	341.4	331.8	316.1	299.3	283.1	269.1	260.9	253.9	246.0	240.7
400	476.6	468.7	457.3	447.6	436.6	418.7	399.3	380.6	364.2	354.6	346.5	337.2	330.9
600	693.0	683.5	669.8	658.1	644.8	623.0	599.3	576.3	556.1	544.2	534.0	522.4	514.5
800	906.8	896.0	880.3	866.9	851.7	826.6	799.3	772.7	749.2	735.4	723.5	709.9	700.7
1000	1119.	1107.	1090.	1075.	1058.	1030.	999.3	969.5	943.1	927.6	914.3	898.9	888.6

Quantile $t_{n,\alpha}$ der Studentschen t-Verteilung

Werte $t_{n,\alpha}$ für gegebene Werte α der t-Verteilung mit Freiheitsgrad n.

$$t_n(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\,\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Wahrscheinlichkeitsdichte



n	$\alpha = 0.60$	0.70	0.80	0.90	0.95	0.975	0.990	0.995	0.999	0.9995
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.598
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	0.255	0.528	0.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
70	0.254	0.527	0.847	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211	3.435
80	0.254	0.526	0.846	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183	3.402
100	0.254	0.526	0.845	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
110	0.254	0.526	0.845	1.289	1.659	1.982	2.361	2.621	3.166	3.381
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Tabelle 6 a: **0.95-Quantile der F-Verteilung mit (n,m) Freiheitsgraden**

	n:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
m:										
1		161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5
2		18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
3		10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4		7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5		6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6		5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7		5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8		5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9		5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10		4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
12		4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
15		4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
20		4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
24		4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
30		4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
40		4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
60		4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
120		3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96
∞		3.84	0	0	0	0	0	0	0	0

	n:	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	∞
m:											
1		241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2		19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3		8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	0
4		5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	0
5		4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	0
6		4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	0
7		3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	0
8		3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	0
9		3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	0
10		2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	0
12		2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	0
15		2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	0
20		2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	0
24		2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	0
30		2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	0
40		2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	0
60		1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	0
120		1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	0
∞		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.00

Tabelle 6 b: **0.99-Quantile der F-Verteilung mit (n,m) Freiheitsgraden**

	n:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
m:										
1		4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022
2		98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
3		34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
4		21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
5		16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
6		13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
7		12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
8		11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
9		10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
10		10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
12		9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
15		8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
20		8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
24		7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
30		7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
40		7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
60		7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
120		6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56
∞		6.63	0	0	0	0	0	0	0	0

	n:	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	∞
m:											
1		6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2		99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	0
3		27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	0
4		14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	0
5		10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	0
6		7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	0
7		6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	0
8		5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	0
9		5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	0
10		4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	0
12		4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	0
15		3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	0
20		3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	0
24		3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	0
30		2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	0
40		2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	0
60		2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	0
120		2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	0
∞		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.00