universität innsbruck
Institut für Mathematik

Lineare Algebra I

Zusätzliche Bemerkungen Implementierungen mittels Maple

Tim Netzer, Mechthild Thalhammer

Wintersemester 2019/20

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] Siegfried Bosch, *Lineare Algebra*, Springer, 3. Auflage, 2006.

[2] Gerd Fischer, *Lineare Algebra*, Springer, 18. Auflage, 2014.

[3] Serge Lang, *Linear Algebra*, Springer, Third Edition, 1987.

Kapitel 1

Einleitung und Grundlagen

1.1 Womit befasst sich lineare Algebra?

Gleichungssysteme. In vielen Bereichen der Mathematik beschäftigt man sich mit Methoden zur näherungsweisen Lösung von Gleichungssystemen. Man möchte einzelne, wenn möglich sogar alle existierenden Lösungen bestimmen oder zumindest eine zweckmäßige Beschreibung der Menge aller Lösungen angeben.

Lineare Gleichungssysteme. Das Gebiet der linearen Algebra befasst sich mit den strukturell einfachsten Gleichungssystemen, nämlich mit Systemen linearer Gleichungen über geeigneten Zahlbereichen. Für diesen Spezialfall steht mit dem Algorithmus von Gauß ein effizientes systematisches Verfahren zur Verfügung, welches Aussagen über die Anzahl von Lösungen, die Berechnung von Lösungen und die Bestimmung von geeigneten Darstellungen der Lösungsmenge ermöglicht. Genauer, da der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystemes eine einfache geometrische Struktur, jene eines affinen Vektorraumes, zugrundeliegt, reichen selbst im Fall unendlich vieler Lösungen endlich viele Zahlen zur vollständigen Beschreibung der Lösungsmenge aus, und diese können mittels Gauß-Algorithmus berechnet werden.

Theorie von Vektorräumen und linearen Abbildungen. In der Mathematik geht es einerseits um die Untersuchung von konkreten Fragestellungen und die Angabe von praktisch relevanten Lösungsmethoden; andererseits ist man bestrebt, bekannte Resultate zu erweitern und neue Sichtweisen zu entwickeln. Im Bereich der linearen Algebra trägt die Theorie von Vektorräumen und linearen Abbildungen zu einem umfassenden Verständnis von linearen Gleichungssystemen bei.

Anwendungsbereiche. Da speziell in den Naturwissenschaften und den technischen Wissenschaften zahlreiche Problemstellungen auf lineare Gleichungssysteme führen, zählen Erkenntnisse und Methoden der linearen Algebra zu wichtigen theoretischen Grundlagen für diese Anwendungsbereiche.

SKRIPTUM. Die Vorlesung *Lineare Algebra* richtet sich an Studierende unterschiedlicher Fachrichtungen; dieses Skriptum ist deshalb so konzipiert, dass die mit Stern ★ gekennzeichneten Abschnitte erst im Vertiefungsteil der Vorlesung behandelt werden.

LITERATURQUELLEN. Es gibt eine Vielzahl an Literaturquellen, welche die wesentlichen Resultate der linearen Algebra beinhalten; als eine kleine Auswahl werden die Bücher BOSCH [1], FISCHER [2] und LANG [3] empfohlen.

1.2 Symbole

Die im Folgenden angegebenen grundlegenden Symbole werden an späterer Stelle verwendet, teilweise illustriert und präzisiert.

$\wedge$	und
$\vee$	oder
$\neg$	nicht
$\forall$	für alle
$\exists$	es existiert
$\exists!$	es existiert genau ein
$\Rightarrow$	wenn, dann
$\Leftrightarrow$	genau dann, wenn (Ergänzung)
$\in$	ist Element von
$\notin$	ist kein Element von
$\mathbb{N}, \mathbb{N}_{\geq 0}$	natürliche Zahlen (Null eingeschlossen) (Ergänzung)
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen (Ergänzung)

Vgl. Illustration mittels Maple.

Kapitel I.2 Notation
Mathematische Aussagen

```
> restart;
```

Wahrheitswert einer Aussage "wahr" / "falsch"

```
> a := true;
  b := false;
  c := true;
```

$$a := true$$
$$b := false$$
$$c := true \quad (1)$$

Verknüpfung von Aussagen mittels "und" / "oder", Wahrheitswert

```
> a and a;
  a and b;
  b and a;
  b and b;
```

$$true$$
$$false$$
$$false$$
$$false \quad (2)$$

```
> a and c;
```

$$true \quad (3)$$

```
> a or a;
  a or b;
  b or a;
  b or b;
```

$$true$$
$$true$$
$$true$$
$$false \quad (4)$$

Verneinung einer Aussage, Wahrheitswert

```
> not a;
  not b;
```

$$false$$
$$true \quad (5)$$

Mengen

```
> restart;
```

Element

```
> M := {10, 20, 30};
  evalb(10 in M);
  evalb(11 in M);
  evalb(10 in M or 11 in M);
```

$$M := \{10, 20, 30\}$$

true

false

true **(6)**

Hilfe

> ? *evalb*

>

1.3 Mengen, Relationen und Abbildungen

1.3.1 Mengen

MENGE, ELEMENT. Der Mengenbegriff und der Elementbegriff sind fundamentale Begriffe der Mathematik; man liest oft folgende Definition:

> Eine Menge ist die Zusammenfassung bestimmter wohlunterscheidbarer Objekte der Anschauung oder des Denkens zu einem Ganzen. Die einzelnen Objekte heißen Elemente der Menge.

Da diese Charakterisierung einer Menge jedoch gewisse Unschärfen zulässt und damit Widersprüche in sich birgt, ist sie nicht als mathematische Definition im strengen Sinn geeignet; eine Präzisierung des Mengenbegriffes erfolgt im Rahmen der mathematischen Logik. △

Bemerkung 1.3.1 (★ Präzisierung der Charakterisierung einer Menge). *Diese Definition ist eher philosophischer Natur und mathematisch nicht exakt. So könnte man etwa die Menge betrachten, deren Element alle Mengen sind:*

$$A := \{M \mid M \text{ Menge}\}.$$

Es handelt sich hier offenbar um eine Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten zu einem Ganzen. Somit müsste A also laut Definition eine Menge sein, und damit ein Element von sich selbst:

$$A \in A.$$

Wem es nicht seltsam genug vorkommt, dass Mengen Elemente ihrer selbst sein können, der betrachte nun folgende Menge:

$$B := \{M \mid M \text{ Menge}, M \notin M\}.$$

Auch hier handelt es sich um eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte, also um eine Menge. Es gibt nun zwei Möglichkeiten. Entweder gilt $B \in B$. Aufgrund der Definition von B muss dann aber $B \notin B$ gelten, ein Widerspruch. Also muss die zweite Möglichkeiten eintreten, nämlich $B \notin B$. Damit erfüllt B aber die Bedingung in der Definition von B und es folgt $B \in B$, wieder ein Widerspruch. Der einzige Weg aus diesem Dilemma besteht darin, B nicht als Menge zuzulassen. Damit entpuppt sich die angegebene Mengendefinition als nicht zufriedenstellend. Es gibt nun in der Tat mathematisch saubere Möglichkeiten, mit diesem Problem umzugehen und solche Widersprüche zu vermeiden. Allerdings ist die lineare Algebra nicht der richtige Ort, das zu besprechen. Wir bleiben deshalb im folgenden bei der nicht-exakten Mengendefinition und behalten nur im Hinterkopf, dass es theoretisch hier etwas zu bedenken gibt. △

Angabe von Mengen. Bei der Angabe von Mengen ist die Verwendung geschwungener Klammern üblich. Im Fall von Mengen mit einer geringen Anzahl von Elementen ist es günstig, alle Elemente aufzulisten

$$\{a, b, c, d\}\,,$$
$$\{\text{Klaus, Bello, Patscherkofel}\}\,,$$
$$\{1, \pi\}\,.$$

Bei der Angabe einer Menge spielt die Reihenfolge der Elemente oder das mehrfache Aufzählen von Elementen keine Rolle; beispielsweise gilt

$$\{c, b, a\} = \{a, a, b, c\} = \{a, b, c\}\,.$$

Im Fall von Mengen mit einer großen Anzahl an Elementen oder Mengen mit unendlich vielen Elementen wie beispielsweise den natürlichen und ganzen Zahlen, deren Struktur einfach ist, gibt man meist eine kleine Auswahl an Elementen an und hofft auf ausreichende Verständlichkeit für LeserInnen

$$\{10, 20, 30, \dots, 1000\}\,,$$
$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}\,, \quad \mathbb{N}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}\,, \quad \mathbb{N}_{\geq 1} := \{1, 2, 3, \dots\}\,,$$
$$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}\,.$$

(Ergänzung bei natürlichen Zahlen, ob Null eingeschlossen oder nicht, hilfreich)

Mengen mit einer komplexeren Struktur gibt man dadurch an, dass man die Eigenschaften der Elemente beschreibt. Als Schreibweise verwendet man innerhalb der Mengenklammern einen Doppelpunkt, welcher auch bei der Formulierung von mathematischen Aussagen die Bedeutung *für die gilt* hat, einen senkrechten Strich oder einen Strichpunkt; häufig greift man auf bekannte Mengen zurück und listet zusätzliche Bedingungen auf. Die Menge der rationalen Zahlen und die Menge der Primzahlen

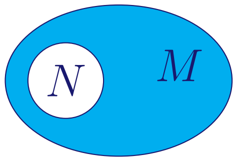
$$\begin{aligned}
\mathbb{Q} &:= \left\{\tfrac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}, \\
\mathbb{Q} &:= \left\{\tfrac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}, \\
\mathbb{Q} &:= \left\{\tfrac{a}{b} ; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}, \\
\mathbb{P} &:= \left\{a : a \in \mathbb{N}, a \text{ Primzahl}\right\},
\end{aligned}$$

werden hier nur angedeutet und an späterer Stelle nochmals behandelt.
(Alternative Schreibweisen. Ich verwende üblicherweise Doppelpunkte oder im Zusammenhang mit Abbildungen Strichpunkte.) △

Vom Mengenbegriff ausgehend führt man weitere grundlegende Begriffe und Mengenoperationen ein.

Definition 1.3.2. (i) TEILMENGE. Eine Menge N heißt Teilmenge einer Menge M, wenn jedes Element von N auch ein Element von M ist, d.h. es gilt

$$N \subseteq M \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, a\colon \big(a \in N \Longrightarrow a \in M\big)\,,$$
$$N \subseteq M \quad :\Longleftrightarrow \quad \big(\forall\, a \in N:\; a \in M\big)\,.$$



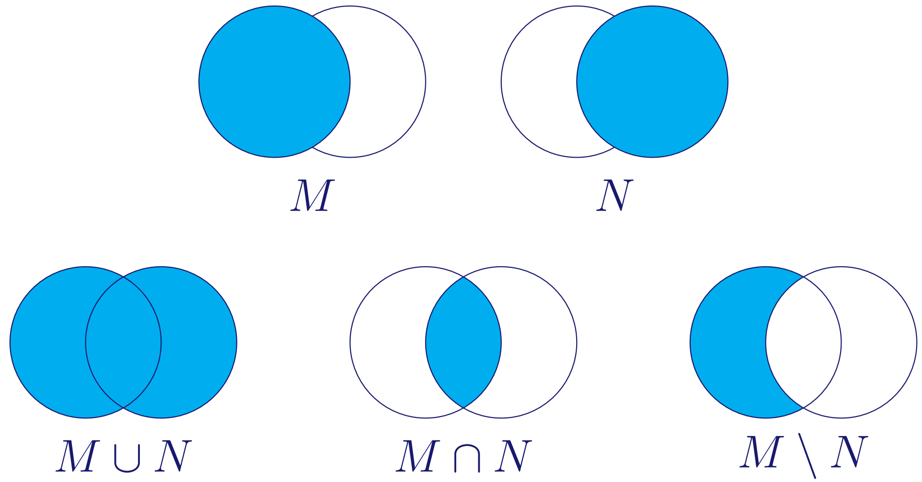
(Aufgrund der besseren Lesbarkeit und Verständlichkeit empfehle ich zusätzliche Klammern und die zweite kompakte Formulierung.)
(Graphik: Es wurde die Farbe so angepasst, dass N erkennbar ist.)

(ii) VEREINIGUNG, DURCHSCHNITT, DIFFERENZ. Für zwei Mengen M und N sind die Vereinigungsmenge $M \cup N$ und die Durchschnittsmenge $M \cap N$ definiert durch

$$M \cup N := \{a : a \in M \vee a \in N\}\,,$$
$$M \cap N := \{a : a \in M \wedge a \in N\}\,;$$

die Mengendifferenz von M und N ist definiert durch

$$M \setminus N := \{a : a \in M \wedge a \notin N\}\,.$$



(Graphik: Zusätzliche Angabe der Mengen M, N.)

(iii) KARTESISCHES PRODUKT. Das kartesische Produkt von zwei Mengen M und N umfasst alle geordnete Paare von Elementen aus M und N

$$M \times N := \left\{(a, b) : a \in M, b \in N\right\}. \qquad \triangle$$

(Schreibweise kartesisch durchgehend korrigieren)

Bemerkungen, Beispiele 1.3.3. (i) LEERE MENGE. Als leere Menge bezeichnet man jene eindeutig bestimmte Menge, welche keine Elemente enthält

$$\emptyset := \{\}.$$

(ii) KARTESISCHES PRODUKT. Man beachte, dass die Elemente des kartesischen Produktes zweier Mengen M, N geordnete Paare sind und daher die Reihenfolge wesentlich ist; im Allgemeinen führen $M \times N$ und $N \times M$ deshalb auf unterschiedliche Mengen. Hat M genau m und N genau n Elemente, so umfasst $M \times N$ genau $m \cdot n$ Elemente.

(iii) ERWEITERUNG. Das kartesische Produkt von n Mengen $M_1, \ldots, M_n$ umfasst n–Tupel

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n := \left\{(a_1, \ldots, a_n) : a_1 \in M_1, \ldots, a_n \in M_n\right\}.$$

Im Spezialfall $M_1 = \ldots = M_n = M$ wird die Kurzschreibweise

$$M^n := \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n-\text{mal}}$$

verwendet; bekannte Beispiele sind die Mengen aller Tupel und Tripel reeller Zahlen

$$\mathbb{R}^2 := \left\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\right\},$$
$$\mathbb{R}^3 := \left\{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\right\},$$

veranschaulicht durch die zweidimensionale Ebene und den dreidimensionalen Raum.

(iv) BEISPIELE. Es gilt

$$
\begin{gathered}
\{a,b,c\} \cup \{a,7,\pi\} = \{a,b,c,7,\pi\}\,, \\
\{a,b,c\} \cap \{a,7,\pi\} = \{a\}\,, \\
\{a,b,c\} \setminus \{a,7,\pi\} = \{b,c\}\,, \\
\{a,b,c\} \times \{7,\pi\} = \big\{(a,7),(a,\pi),(b,7),(b,\pi),(c,7),(c,\pi)\big\}\,, \\
(a,\pi) \in \{a,b,c\} \times \{7,\pi\}\,, \quad (\pi,a) \notin \{a,b,c\} \times \{7,\pi\}\,, \\
\#\{a,b,c\} = 3\,, \quad \#\{7,\pi\} = 2\,, \quad \#\{a,b,c\} \times \{7,\pi\} = 6\,.
\end{gathered}
\qquad \triangle
$$

VGL. ILLUSTRATION MITTELS MAPLE.

Kapitel I.3 Mengen, Relationen, Abbildungen
Mengen

Angabe von endlichen Mengen durch Aufzählen der Elemente
Spezialfall der leeren Menge

```
> restart;
> M0 := { };
  M1 := {a, b, c, d};
  M2 := {Klaus, Bello, Patscherkofel};
  M3 := {1, Pi};
```

$$M0 := \varnothing$$
$$M1 := \{a, b, c, d\}$$
$$M2 := \{Bello, Klaus, Patscherkofel\}$$
$$M3 := \{1, \pi\} \qquad (1)$$

Überprüfen der Elementeigenschaft
Vorsicht in MAPLE!
Klein- und Großschreibung (Buchstabe pi versus mathematische Konstante Pi)

```
> evalf(pi);
  evalf(Pi);
```

$$\pi$$
$$3.141592654 \qquad (2)$$

```
> evalb(Bello in M1);
  evalb(Bello in M2);
  evalb(pi in M3);
  evalb(Pi in M3);
```

$$false$$
$$true$$
$$false$$
$$true \qquad (3)$$

Geänderte Reihenfolge oder Wiederholung spielen keine Rolle

```
> restart;
> M := {a, b, c};
  N := {c, b, a};
  evalb(M = N);
  N := {a, a, b, c};
  evalb(M = N);
```

$$M := \{a, b, c\}$$
$$N := \{a, b, c\}$$
$$true$$
$$N := \{a, b, c\}$$
$$true \qquad (4)$$

Teilmengen

```
> restart;
```

```
> M := {a, b, c} ;
  N1 := {a, b};
  evalb(N1 subset M);
  N2 := {a, d};
  evalb(N2 subset M);
```
$$M := \{a, b, c\}$$
$$N1 := \{a, b\}$$
$$true$$
$$N2 := \{a, d\}$$
$$false \quad (5)$$

Vereinigung von Mengen (Zusammenhang mit "oder")

```
> restart;
> M1 := {1, 3, 5};
  M2 := {2, 4, 6};
  M := M1 union M2;
```
$$M1 := \{1, 3, 5\}$$
$$M2 := \{2, 4, 6\}$$
$$M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad (6)$$

Durchschnitt von Mengen (Zusammenhang mit "und")

```
> restart;
> M := {1, 2, 3, 4, 5, 6};
  N := M intersect {1, 3, 5};
  N := M intersect {1, 3, 5, 7};
```
$$M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$N := \{1, 3, 5\}$$
$$N := \{1, 3, 5\} \quad (7)$$

Mengendifferenz (Zusammenhang mit "und" sowie "Verneinung")

```
> restart;
> M := {1, 2, 3, 4, 5, 6};
  N := M minus {2, 4, 6};
  N := M minus {2, 4, 6, 8};
```
$$M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$N := \{1, 3, 5\}$$
$$N := \{1, 3, 5\} \quad (8)$$

Kartesisches Produkt von Mengen
Reihenfolge wesentlich
Vorsicht in MAPLE!
Schreibweise für Paare (Operationen ausführbar, jedoch mit Klammerung leichter lesbar)

```
> restart;
> A := (a, 1);
  A[1];
  A + A;
  A - (1, a);
```

```
A - [1, a];
A := [a, 1];
A[1];
A + A;
A - [1, a];
```

$$A := a, 1$$
$$a$$
$$2\,a, 2$$
$$a - 1, 1 - a$$
$$(a, 1) + [-1, -a]$$
$$A := [a, 1]$$
$$a$$
$$[2\,a, 2]$$
$$[a - 1, 1 - a] \tag{9}$$

```
> M1 := {a, b};
  M1[1];
  M1[2];
  m1 := numelems(M1);
  M2 := {1, 2, 3};
  m2 := numelems(M2);
```

$$M1 := \{a, b\}$$
$$a$$
$$b$$
$$m1 := 2$$
$$M2 := \{1, 2, 3\}$$
$$m2 := 3 \tag{10}$$

```
> M := {[a, 1], [b, 1], [a, 2], [b, 2], [a, 3], [b, 3]};
  evalb([a, 1] in M);
  evalb([1, a] in M);
  m1 · m2 = numelems(M);
```

$$M := \{[a, 1], [a, 2], [a, 3], [b, 1], [b, 2], [b, 3]\}$$
$$true$$
$$false$$
$$6 = 6 \tag{11}$$

Alternative

```
> N := { } :
  counter := 0 :
  for i from 1 to m1 do
    for j from 1 to m2 do
      counter := counter + 1;
      N := N union {[M1[i], M2[j]]};
    od;
```

```
od;
counter = numelems(N);
N;
M;
```

$$6 = 6$$

$$\{[a, 1], [a, 2], [a, 3], [b, 1], [b, 2], [b, 3]\}$$

$$\{[a, 1], [a, 2], [a, 3], [b, 1], [b, 2], [b, 3]\} \quad \textbf{(12)}$$

Mögliche Ergebnisse beim Wurf zweier Münzen bzw. Würfel

```
> restart;
> M := {Kopf, Zahl};
N := { } :
counter := 0 :
for i from 1 to numelems(M) do
  for j from 1 to numelems(M) do
    counter := counter + 1;
    N := N union {[M[i], M[j]]};
  od;
 od;
 counter = numelems(N);
 N;
```

$$M := \{Kopf, Zahl\}$$

$$4 = 4$$

$$\{[Kopf, Kopf], [Kopf, Zahl], [Zahl, Kopf], [Zahl, Zahl]\} \quad \textbf{(13)}$$

```
> restart;
> M := {1, 2, 3, 4, 5, 6};
N := { } :
counter := 0 :
for i from 1 to numelems(M) do
  for j from 1 to numelems(M) do
    counter := counter + 1;
    N := N union {[M[i], M[j]]};
  od;
 od;
 counter = numelems(N);
 N;
```

$$M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$36 = 36$$

$$\{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [1, 6], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [2, 4], [2, 5], [2, 6], [3, 1], [3, 2], [3, 3], [3, 4], [3, 5], [3, 6], [4, 1], [4, 2], [4, 3], [4, 4], [4, 5], [4, 6], [5, 1], [5, 2], [5, 3], [5, 4], [5, 5], [5, 6], [6, 1], [6, 2], [6, 3], [6, 4], [6, 5], [6, 6]\} \quad \textbf{(14)}$$

```
> M := {1, 2, 3, 4};
N := { } :
counter := 0 :
for i from 1 to numelems(M) do
```

```
      for j from 1 to numelems(M) do
        for k from 1 to numelems(M) do
          counter := counter + 1;
          N := N union {[M[i], M[j], M[k]]};
        od;
      od;
    od;
    counter = numelems(N);
    N;
```

$$M := \{1, 2, 3, 4\}$$

$$64 = 64$$

$$\{[1, 1, 1], [1, 1, 2], [1, 1, 3], [1, 1, 4], [1, 2, 1], [1, 2, 2], [1, 2, 3], [1, 2, 4], [1, 3, 1], [1, 3, 2], [1, 3, 3], [1, 3, 4], [1, 4, 1], [1, 4, 2], [1, 4, 3], [1, 4, 4], [2, 1, 1], [2, 1, 2], [2, 1, 3], [2, 1, 4], [2, 2, 1], [2, 2, 2], [2, 2, 3], [2, 2, 4], [2, 3, 1], [2, 3, 2], [2, 3, 3], [2, 3, 4], [2, 4, 1], [2, 4, 2], [2, 4, 3], [2, 4, 4], [3, 1, 1], [3, 1, 2], [3, 1, 3], [3, 1, 4], [3, 2, 1], [3, 2, 2], [3, 2, 3], [3, 2, 4], [3, 3, 1], [3, 3, 2], [3, 3, 3], [3, 3, 4], [3, 4, 1], [3, 4, 2], [3, 4, 3], [3, 4, 4], [4, 1, 1], [4, 1, 2], [4, 1, 3], [4, 1, 4], [4, 2, 1], [4, 2, 2], [4, 2, 3], [4, 2, 4], [4, 3, 1], [4, 3, 2], [4, 3, 3], [4, 3, 4], [4, 4, 1], [4, 4, 2], [4, 4, 3], [4, 4, 4]\} \tag{15}$$

```
>
```

1.3.2 Relationen

Definition 1.3.4 (Relation)**.** Eine Relation zwischen zwei Mengen M und N ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes

$$R \subseteq M \times N\,.$$

Anstelle der Paarschreibweise $(a, b) \in R$ verwendet man häufig die Schreibweise $a\,R\,b$ und die Sprechweise *Element a steht zu Element b in der Relation R*; im Spezialfall

$$N = M: \quad R \subseteq M \times M$$

spricht man von einer Relation auf M. △

Bemerkungen, Beispiele 1.3.5. (i) RELATION. Eine Relation gibt an, ob zwischen Objekten eine Beziehung besteht oder nicht; im mathematischen Kontext wird dies durch zwei Mengen M und N und die Gültigkeit der Eigenschaft $(a, b) \in R$ oder $(a, b) \notin R$ wiedergegeben.

(ii) BEISPIEL. Für die Mengen

$$M := \{\text{Erika}, \text{Gabi}, \text{Monika}\},$$
$$N := \{\text{Horst}, \text{Klaus}, \text{Martin}\},$$

wird eine Relation wie etwa *Person 1 und Person 2 haben an einem Abend miteinander getanzt* durch die Menge

$$R := \big\{(\text{Erika}, \text{Horst}), (\text{Erika}, \text{Klaus}), (\text{Gabi}, \text{Martin}), (\text{Monika}, \text{Martin})\big\} \subset M \times N$$

beschrieben; man beachte, dass hier Paare wie $(\text{Erika}, \text{Monika}) \in M \times M$ nicht zugelassen sind.
(Skriptum: zusätzlicher Definitionsdoppelpunkt)

(iii) GLEICHHEITSRELATION. Auf jeder Menge M ist die Gleichheitsrelation definiert

$$G := \{(a,a) : a \in M\} \subseteq M \times M\,;$$

anstelle von $a\,G\,a$ wird die bekannte Schreibweise $a = a$ verwendet.
(Man beachte, dass die Gleichheit von zwei Objekten von der Gleichheit per Definition zur Einführung neuer Objekte oder auch symbolischer Notationen zu unterscheiden ist. Im ersten Fall verwendet man das Gleichheitszeichen. Im zweiten Fall verwendet man das Symbol $:=$; oft läßt man den Doppelpunkt jedoch weg und verwendet ebenfalls nur das Gleichheitszeichen.)

(iv) VERGLEICHSRELATION. Eine grundlegende Relation auf der Menge der reellen Zahlen ist die Vergleichsrelation

$$\leq := \left\{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \exists\, c \in \mathbb{R} : a + c^2 = b\right\},$$
$$\leq := \left\{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ derart, dass } a + c^2 = b\right\};$$

eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ steht genau dann in Relation zu einer reellen Zahl $b \in \mathbb{R}$, wenn a (echt) kleiner als b ist oder a gleich b ist.
(Alternative Schreibweisen. Man könnte auch die Formulierung $b - a = c^2$ verwenden.)

(v) TEILBARKEITSRELATION. Eine grundlegende Relation auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist die Teilbarkeitsrelation

$$T := \left\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists\, c \in \mathbb{N} : a \cdot c = b\right\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$
$$T := \left\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists\, c \in \mathbb{N} \text{ derart, dass } a\,c = b\right\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N};$$

anstelle von $(a,b) \in T$ ist die Schreibweise $a \mid b$ und die Sprechweise a *teilt* b üblich.
(Alternative Schreibweisen. Multiplikationspunkt wird oft weggelassen.) $\triangle$

Eigenschaften von Relationen. Es ist hilfreich, zusätzliche Eigenschaften von Relationen begrifflich zu unterscheiden.
(Allgemeine Bemerkung: Bei deutschsprachigen Texten sollte man die Phrase *Es sei* oder *Es bezeichne* und nicht *Sei* (wie im Englischen *Let* oder im Französischen *Soit*) verwenden.)

Definition 1.3.6. Es bezeichne $R \subseteq M \times M$ eine Relation auf einer Menge M.

(i) Relexivität, Symmetrie, Antisymmetrie, Transitivität, Vollständigkeit.

(a) R heißt reflexiv genau dann, wenn

$$\forall\, a \in M : \quad (a, a) \in R\,.$$

(b) R heißt symmetrisch genau dann, wenn

$$\forall\, a, b \in M : \quad \big((a, b) \in R \implies (b, a) \in R\big)\,.$$

(c) R heißt antisymmetrisch genau dann, wenn

$$\forall\, a, b \in M : \quad \big((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \implies a = b\big)\,.$$

(d) R heißt transitiv genau dann, wenn

$$\forall\, a, b, c \in M : \quad \big((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \implies (a, c) \in R\big)\,.$$

(e) R heißt vollständig genau dann, wenn

$$\forall\, a, b \in M : \quad (a, b) \in R \vee (b, a) \in R\,.$$

(ii) ORDNUNGSRELATION. Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf M wird als eine partielle Ordnungsrelation auf M bezeichnet; ist zusätzlich die Eigenschaft der Vollständigkeit erfüllt, so spricht man von einer vollständigen oder totalen Ordnungsrelation.

(iii) ÄQUIVALENZRELATION. Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation auf M wird als eine Äquivalenzrelation auf M bezeichnet. △

Bemerkungen, Beispiele 1.3.7. (i) GLEICHHEITSRELATION. Die zuvor angegebene Gleichheitsrelation definiert eine Äquivalenzrelation auf einer beliebigen Menge.
(Erinnerung

$$G := \{(a,a) : a \in M\} \subseteq M \times M\,.$$

Es sind die Eigenschaften Reflexivität

$$\forall\, a \in M : \quad \underbrace{(a,a) \in G}_{a=a},$$

Symmetrie

$$\forall\, a, b \in M : \quad \big(\underbrace{(a,b) \in G}_{a=b} \implies \underbrace{(b,a) \in G}_{b=a}\big)$$

und Transitivität

$$\forall\, a, b, c \in M : \quad \big(\underbrace{(a,b) \in G}_{a=b} \wedge \underbrace{(b,c) \in G}_{b=c} \implies \underbrace{(a,c) \in G}_{a=c}\big)$$

gefordert.)

(ii) Vergleichsrelation. Die zuvor angegebene Vergleichsrelation $\leq$ definiert eine vollständige Ordnungsrelation auf der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.
(Erinnerung

$$R = \leq := \big\{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ derart, dass } a + c^2 = b\big\}\,.$$

Es sind die Eigenschaften Reflexivität

$$\forall\, a \in \mathbb{R}: \quad \underbrace{(a, a) \in R}_{a \leq a},$$

Antisymmetrie

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}: \quad \Big(\underbrace{(a, b) \in R}_{a \leq b} \wedge \underbrace{(b, a) \in R}_{b \leq a} \implies a = b\Big)\,,$$

Transitivität

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}: \quad \Big(\underbrace{(a, b) \in R}_{a \leq b} \wedge \underbrace{(b, c) \in R}_{b \leq c} \implies \underbrace{(a, c) \in R}_{a \leq c}\Big)$$

und Vollständigkeit

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}: \quad \underbrace{(a, b) \in R}_{a \leq b} \vee \underbrace{(b, a) \in R}_{b \leq a}$$

gefordert.)

(iii) Teilbarkeitsrelation. Die zuvor angegebene Teilbarkeitsrelation definiert eine partielle Ordnungsrelation auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$; sie ist jedoch nicht vollständig und führt somit nicht auf eine totale Ordnung.
(Vollständigkeit

$$\forall\, a, b \in M = \mathbb{N} : \qquad (a, b) \in R \vee (b, a) \in R$$

nicht gültig, denn 2 teilt 3 nicht und 3 teilt 2 nicht.)

(iv) Äquivalenzrelation. In gewissen Situation ist es zweckmäßig, mehrere Elemente miteinander zu identifizieren; eine Äquivalenzrelation mit den Eigenschaften reflexiv, symmetrisch und transitiv ermöglicht die Einführung eines verallgemeinerten Gleichheitsbegriffes. Für eine Äquivalenzrelation $R \subseteq M \times M$ ist anstelle von $a\, R\, b$ für $a, b \in M$ die Schreibweise $a \sim_R b$ oder $a \sim b$ und die Sprechweise *a und b sind äquivalent* gebräuchlich.

(v) Beispiel. Auf der Menge aller Personen, die im Studienjahr 2019/20 mit der Lehrveranstaltung *Lineare Algebra* zu tun haben, definiert man die Äquivalenzrelation

$$H := \big\{(a, b) : a \text{ und } b \text{ haben dieselbe Haarfarbe}\big\} . \qquad \triangle$$

Definition 1.3.8 (Äquivalenzklasse)**.** Es bezeichne R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M. Für ein Element $a \in M$ ist die zugehörige Äquivalenzklasse bezüglich R durch

$$[a] := \{b \in M : (a, b) \in R\} \subseteq M$$

gegeben; insbesondere gilt

$$a \in [a].$$

△

Lemma 1.3.9 (★, Zerlegung von Mengen in Äquivalenzklassen)**.** *(i) Sei R eine Äquivalenzrelation auf M. Für $a, b \in M$ gilt dann stets*

$$[a] = [b] \text{ oder } [a] \cap [b] = \emptyset.$$

Die Äquivalenzklassen liefern also eine Zerlegung von M in paarweise disjunkte Teilmengen.

(ii) Sei I eine beliebige Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei $M_i \subseteq M$ eine Teilmenge. Es gelte

$$M_i \cap M_j = \emptyset \text{ für } i \neq j \quad \text{sowie} \quad M = \bigcup_{i \in I} M_i.$$

Dann liefert folgende Setzung eine Äquivalenzrelation auf M, deren Äquivalenzklassen gerade die Mengen M_i sind:

$$R := \{(a, b) \in M \times M \mid \exists i \in I \colon a, b \in M_i\}.$$

Proof. (i) Angenommen es gilt $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Wir zeigen, dass dann $[a] = [b]$ gelten muss.

Es gibt nun also $c \in M$ mit $c \in [a]$ und $c \in [b]$. Aus der Definition von Äquivalenzklassen folgt $(a, c) \in R$ und $(b, c) \in R$. Die Symmetrie von R impliziert $(c, b) \in R$ und aus der Transitivität folgt damit $(a, b) \in R$.

Sei nun $d \in [a]$ beliebig. Aus $(a, d) \in R$ folgt $(d, a) \in R$ und mit $(a, b) \in R$ dann wieder aus der Transitivität $(d, b) \in R$. Die Symmetrie impliziert $(b, d) \in R$, also $d \in [b]$. Wir haben gezeigt dass jedes Element aus $[a]$ auch zu $[b]$ gehört, also $[a] \subseteq [b]$. Die Inklusion $[b] \subseteq [a]$ zeigt man genauso (da die Voraussetzung $[a] \cap [b] = \emptyset$ aber völlig symmetrisch bezüglich a und b ist, muss eigentlich nichts mehr gezeigt werden). Damit gilt $[a] = [b]$.

Wegen $a \in [a]$ für jedes $a \in M$ liefern die Äquivalenzklassen also eine disjunkte Zerlegung von ganz M.

(ii) Die Relation R ist nach Konstruktion offensichtlich reflexiv und symmetrisch. Für die Transitivität gelte $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$. Es gibt also $i, j \in I$ mit $a, b \in M_i$ und $b, c \in M_j$. Aus $i \neq j$ würde $M_i \cap M_j = \emptyset$ folgen, was wegen $b \in M_i \cap M_j$ nicht sein kann. Also gilt $i = j$, und somit $a, c \in M_i$, also $(a, c) \in R$. Damit ist gezeigt, dass R eine Äquivalenzrelation ist. Wegen

$$b \in [a] \;\Leftrightarrow\; (a, b) \in R \;\Leftrightarrow\; \exists i \in I : a, b \in M_i$$

folgt für $a \in M_i$ schon $[a] = M_i$. Die Mengen M_i sind also gerade die Äquivalenzklassen von R. $\square$

Definition 1.3.10 (Faktormenge)**.** Die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich einer Relation $R \subseteq M \times M$ heißt Faktormenge; man verwendet dafür die Schreibweise

$$M/R := \{[a] : a \in M\}$$

und die Sprechweise *Faktormenge* M *modulo* R. △

Bemerkungen, Beispiele 1.3.11. (i) Äquivalenzklasse, Vertreter. Mittels Äquivalenzklassen werden alle Elemente, die man bezüglich einer Relation $R \subseteq M \times M$ miteinander identifiziert, zusammengefasst. Neben $a \in M$ ist auch jedes Element $b \in [a]$ ein Vertreter derselben Äquivalenzklasse, denn insbesondere gilt

$$a, b \in [a] = [b] \, .$$

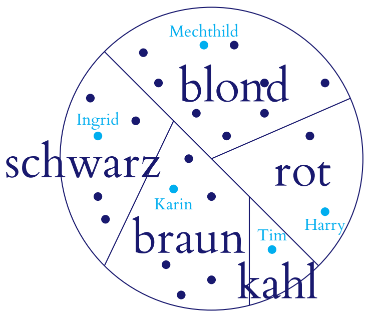
Die Faktormenge M/R umfasst gewisse Teilmengen von M; im Allgemeinen ist die Anzahl der Elemente von M/R verglichen mit der Anzahl der Elemente von M deutlich reduziert.
(Vorteil beim Übergang auf Faktormenge liegt in geringeren Komplexität)

(ii) BEISPIEL. Im zuvor angegebenen Beispiel 1.3.7 wird die Menge aller Personen, die im Studienjahr 2019/20 mit der Lehrveranstaltung *Lineare Algebra* zu tun haben, betrachtet; dies sind rund 400 Personen. Eine Äquivalenzklasse bezüglich der Relation

$$H := \{(a, b) : a \text{ und } b \text{ haben dieselbe Haarfarbe}\}$$

umfasst alle Personen mit gleicher Haarfarbe; wählt man VertreterInnen der einzelnen Äquivalenzklassen, so erhält man eine Darstellung der Faktormenge

$$\{[\text{Harry}], [\text{Ingrid}], [\text{Karin}], [\text{Mechthild}], [\text{Tim}]\} .$$



Man beachte, dass die Anzahl der Elemente der Faktormenge den Haarfarben (braun etc.) entspricht; bei einer etwas genaueren Klassifizierung (hellbraun, rotbraun, dunkelbraun etc.) würde sich die Anzahl der Äquivalenzklassen erhöhen, jedoch weiterhin deutlich unter der Anzahl der betrachteten Personen liegen. △

Konstruktion 1.3.12 (★ Rationale Zahlen (Vgl. ganze Zahlen)). *Wenn wir $\mathbb{Z}$ mit den Rechenregeln als bekannt voraussetzen, können wir nun eine exakte Definition von $\mathbb{Q}$ geben. Dazu definieren wir zunächst eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$:*

$$(a, b) \sim (c, d) \;:\Leftrightarrow\; ad = bc.$$

Man muss nun zunächst nachrechnen, dass es sich hier wirklich um eine Äquivalenzrelation handelt. Ist dies erledigt, definieren wir $\mathbb{Q}$ einfach als Faktormenge dieser Äquivalenzrelation:

$$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})) \,/ \sim .$$

Für die Äquivalenzklasse von (a, b) schreibt man statt $[(a, b)]$ hier gewöhnlich $\frac{a}{b}$, was zur bekannte Notation

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

führt. Es gilt beispielsweise

$$(1, 2) \sim (2, 4), \quad \textit{denn} \;\; 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2.$$

Daraus folgt $[(1, 2)] = [(2, 4)]$, oder in anderer Schreibweise gerade

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}.$$

Nun versieht man $\mathbb{Q}$ gewöhnlich mit Addition und Multiplikation, die folgendermaßen definiert wird:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}.$$

Hier taucht ein wichtiges Phänomen auf, nämlich das der Wohldefiniertheit. Wir definieren hier Addition und Multiplikation von Äquivalenzklassen, also streng genommen von Teilmengen von $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Auf der rechten Seite der Definition wird aber Bezug auf einen Vertreter der Äquivalenzklasse Bezug genommen, also auf ein Element der jeweiligen Menge. Dieser Vertreter ist aber keineswegs eindeutig. Theoretisch könnte das zu Problem führen. Zum Beispiel erhalten wir mit der oberen Formel

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}.$$

Wir hätten aber statt $\frac{1}{2}$ auch $\frac{2}{4}$ schreiben können, und erhielten dann

$$\frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{20}.$$

Formal betrachtet haben wir im ersten Fall für die Äquivalenzklasse $\frac{1}{2}$ den Vertreter $(1, 2)$ in der Formel verwendet und im zweiten Fall den Vertreter $(2, 4)$. Erfreulicherweise gilt nun aber

$$\frac{3}{10} = \frac{6}{20},$$

wie man direkt sieht, d.h. die Elemente $(3, 10)$ und $(6, 20)$ liegen in der selben Äquivalenzklasse. Das kann (und muss) man nun noch ganz Allgemein für $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Q}$ beweisen. △

1.3.3 Abbildungen

ABBILDUNGSBEGRIFF. Der Abbildungsbegriff kann auf den elementaren Mengenbegriff zurückgeführt werden; genauer, eine Abbildung entspricht einer Relation, welche gewisse Eigenschaften erfüllt.

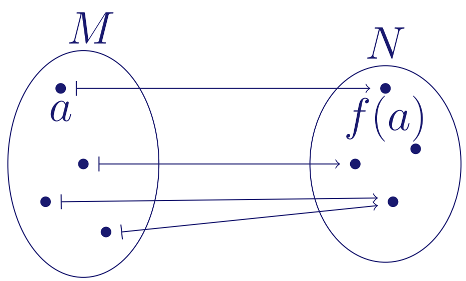
Definition 1.3.13 (ABBILDUNG)**.** Eine Abbildung f von einer Menge M nach einer Menge N ist eine linkstotale und rechtseindeutige Relation zwischen M und N, d.h. eine Teilmenge $f \subseteq M \times N$ mit der Eigenschaft

$$\forall a \in M \quad \exists!\, b \in N : \qquad (a, b) \in f\,;$$

die Menge M wird als Definitionsmenge und die Menge N als Bildmenge bezeichnet.
(Oft auch Bereich statt Menge.) $\triangle$

Bemerkung 1.3.14. (i) ZUORDNUNG, BILD, GRAPH, URBILD. Die Definition einer Abbildung besagt, dass jedem Element der Definitionsmenge ein eindeutig bestimmtes Element der Bildmenge entspricht; deshalb wird eine Abbildung meist als eine Zuordnung zwischen zwei Mengen M und N verstanden und folgende Schreibweise verwendet

$$f : M \longrightarrow N : a \longmapsto f(a) .$$



Veranschaulichung einer Abbildung $f : M \to N$.

Für ein Element $a \in M$ wird $f(a) \in N$ als das Bild von a unter f bezeichnet, und das Bild einer Teilmenge $M_0 \subseteq M$ unter f ist durch die Menge

$$f(M_0) := \{f(a) : a \in M_0\} \subseteq N$$

gegeben; die Menge aller Bildelemente

$$\mathrm{Bild}(f) := f(M) = \{f(a) : a \in M\} \subseteq N$$

heißt das Bild von f und ist im allgemeinen Fall eine Teilmenge der Bildmenge.

Es reicht aus, den Graph einer Abbildung, d.h. die Menge

$$\mathrm{Graph}(f) = \Big\{\big(a, f(a)\big) : a \in M\Big\} \subseteq M \times \mathrm{Bild}(f) \subseteq M \times N\,,$$

anzugeben, weil diese alle wesentlichen Informationen enthält.
(Man beachte, dass das Bild durch den Graph bestimmt ist, jedoch nicht die Bildmenge.)
Für eine Teilmenge $N_0 \subseteq N$ wird die Menge

$$f^{-1}(N_0) := \big\{a \in M : f(a) \in N_0\big\}$$

als Urbild von N_0 unter f bezeichnet; das Urbild kann auch durch die leere Menge gegeben sein. Zur Vereinfachung der Notation setzt man für ein Element $b \in N$

$$f^{-1}(b) := f^{-1}\big(\{b\}\big) = \big\{a \in M : f(a) = b\big\}\,.$$

Man beachte, dass f^{-1} im Allgemeinen nicht auf eine Abbildung von N nach M führt, weil das Urbild eines Elementes kein oder mehr als ein Element umfassen kann und somit die Rechtseindeutigkeit nicht sichergestellt ist.

(ii) Funktion. Der Begriff Funktion wird im Folgenden als Synonym für den Begriff Abbildung verwendet; die Bezeichnung Funktion ist insbesondere im Zusammenhang mit der Menge der reellen Zahlen üblich. $\triangle$

(Druckfehler im Skriptum: In strengen Sinn.)
(VORZIEHEN: Injektivität, Surjektivität, Bijektivität)

Beispiel 1.3.15. (i) IDENTITÄT. Auf jeder Menge M ist die Identitätsabbildung definiert

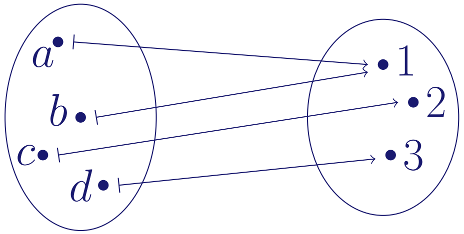
$$\mathrm{id}_M : M \longrightarrow M : a \longmapsto a\,.$$

(Vereinfachte Schreibweise in einer Zeile mit Doppelpunkt oder Komma.)

(ii) **Beispiel.** Wir betrachten die Abbildung

$$f : M = \{a, b, c, d\} \longrightarrow N = \{1, 2, 3\} : \begin{cases} a \longmapsto 1\,, \\ b \longmapsto 1\,, \\ c \longmapsto 2\,, \\ d \longmapsto 3\,. \end{cases}$$

Da Definitionsmenge und Bildmenge nur wenige Elemente umfassen, ist es hilfreich, sich die Abbildung in folgender Art und Weise zu veranschaulichen.



Der Graph der Abbildung ist durch

$$\mathrm{Graph}(f) = \big\{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 3)\big\} \subset M \times N$$

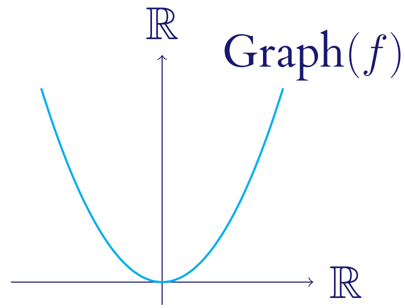
gegeben. Es gilt beispielsweise

$$f\big(\{a, c\}\big) = \{1, 2\}\,,$$
$$f^{-1}(1) = f^{-1}\big(\{1\}\big) = \{a, b\}\,, \quad f^{-1}(3) = f^{-1}\big(\{3\}\big) = \{d\}\,,$$
$$f^{-1}\big(\{1, 3\}\big) = \{a, b, d\}\,.$$

(iii) PARABEL. Der Graph der reellen Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : a \longmapsto a^2\,,$$
$$\mathrm{Graph}(f) = \Big\{ \big(a, a^2\big) : a \in \mathbb{R} \Big\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,,$$

stellt eine Parabel dar



Es gilt beispielsweise

$$f(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \mathbb{R}_{\geq 0}\,, \quad \mathrm{Bild}(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}\,,$$
$$f^{-1}\big(\{2, 4\}\big) = \{-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\}\,. \qquad \triangle$$

(Im Zusammenhang mit reellen und komplexen Zahlen wird oft die Bezeichnung Funktion verwendet. Quadratische Funktion, Polynom vom Grad 2.)

Definition 1.3.16 (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität.)**.** Eine Abbildung $f : M \to N$ zwischen zwei Mengen M und N heißt

(i) injektiv genau dann, wenn jedes Element der Bildmenge höchstens ein Urbild hat

$$\forall\, b \in N : \quad \# f^{-1}(b) \leq 1\,,$$

(ii) surjektiv genau dann, wenn jedes Element der Bildmenge mindestens ein Urbild hat

$$\forall\, b \in N : \quad \# f^{-1}(b) \geq 1\,,$$

(iii) bijektiv genau dann, wenn f injektiv und surjektiv ist, d.h. wenn jedes Element der Bildmenge genau ein Urbild hat

$$\forall\, b \in N : \quad \# f^{-1}(b) = 1\,. \qquad \triangle$$

(Mit *falls* ist *genau dann, wenn* gemeint. Alternative Bezeichnung Zielbereich (statt Bildmenge). Symbol # steht für Anzahl der Elemente, also eine natürliche Zahl oder *Unendlich*.)

Bemerkungen, Beispiele 1.3.17. (i) INJEKTIVITÄT. Zum Nachprüfen der Injektivität einer Abbildung $f : M \to N$ ist es zweckmäßig, folgende Charakterisierungen zu verwenden (Klammern sinnvoll für bessere Lesbarkeit)

$$\begin{aligned} &\Big(\forall\, b \in N :\; \# f^{-1}(b) \leq 1\Big) \\ \Longleftrightarrow \quad &\Big(\forall\, a, b \in M :\; \big(a \neq b \implies f(a) \neq f(b)\big)\Big) \\ \Longleftrightarrow \quad &\Big(\forall\, a, b \in M :\; \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)\Big)\,, \end{aligned}$$

oder gleichbedeutend
(Kompaktere Formulierung)

$$\begin{aligned} &\Big(\forall\, b \in N :\; \# f^{-1}(b) \leq 1\Big) \\ \Longleftrightarrow \quad &\Big(\forall\, a, b \in M \text{ mit } a \neq b :\; f(a) \neq f(b)\Big) \\ \Longleftrightarrow \quad &\Big(\forall\, a, b \in M \text{ mit } f(a) = f(b) :\; a = b\Big)\,. \end{aligned}$$

Um die Injektivität einer Abbildung zu betonen, wird manchmal folgende Notation verwendet

$$f : M \hookrightarrow N\,.$$

(*Einbettung* der Definitionsmenge in die Bildmenge mittels einer injektiven Abbildung)

Bei einer injektiven Abbildung werden zwei voneinander verschiedenen Elementen der Definitionsmenge also stets zwei voneinander verschiedene Elemente der Bildmenge zugeordnet; bei einer Veranschaulichung bedeutet dies, dass von zwei Elementen ausgehende Pfeile bei injektiven Abbildungen niemals am selben Punkt enden. Man beachte, dass sich diese Eigenschaft von der für alle Abbildungen geforderten Rechtseindeutigkeit unterscheidet; diese besagt gerade, dass von jedem Element der Definitionsmenge genau ein Pfeil ausgeht.

Abbildung injektiv

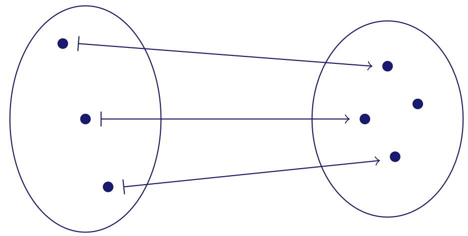
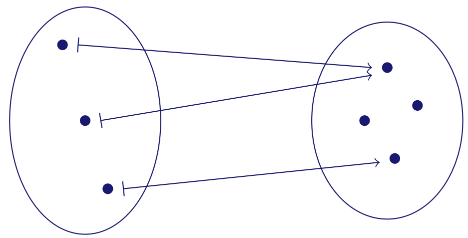


Abbildung nicht injektiv



(ii) SURJEKTIVITÄT. Um die Surjektivität einer Abbildung $f : M \to N$ nachzuweisen, ist zu zeigen, dass für jedes Element der Bildmenge zumindest ein Urbild existiert, d.h. das Bild der Abbildung und die Bildmenge stimmen überein

$$\begin{aligned} &\Big(\forall\, b \in N :\ \# f^{-1}(b) \geq 1\Big) \\ \iff\quad &\Big(\forall\, b \in N\ \exists\, a \in M :\ f(a) = b\Big) \\ \iff\quad &f(M) = N\,; \end{aligned}$$

die Surjektivität einer Abbildung kann man also durch die Einschränkung der Bildmenge auf das Bild erreichen

$$f : M \longrightarrow f(M)\,.$$

Um auf die Surjektivität einer Abbildung hinzuweisen, wird manchmal folgende Notation verwendet (nicht empfohlen)

$$f : M \twoheadrightarrow f(M)\,.$$

Bei der Veranschaulichung einer surjektiven Abbildung bedeutet dies, dass bei jedem Element der Bildmenge ein Pfeil endet.

Abbildung surjektiv

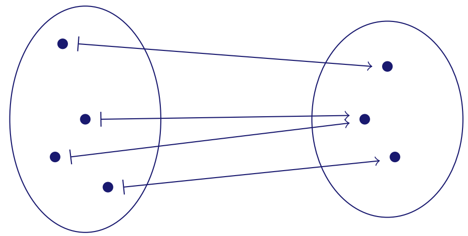
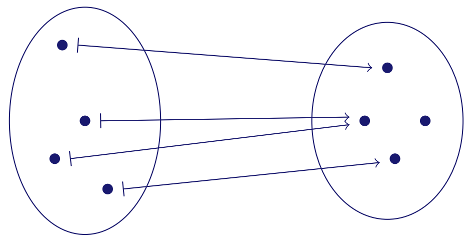


Abbildung nicht surjektiv

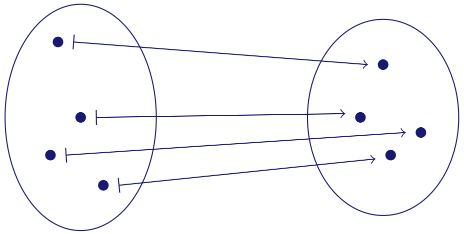


(iii) Injektivität, Surjektivität. Man beachte, dass Injektivität und Surjektivität voneinander unabhängige Forderungen sind, also sich weder gegenseitig bedingen noch ausschließen.

(iv) BIJEKTIVITÄT, INVERSE ABBILDUNG. Eine bijektive Abbildung

$$f : M \longrightarrow N$$

stellt eine eins-zu-eins-Zuordnung zwischen allen Elementen der Mengen M und N her; in diesem Sinn kann man die beiden Mengen miteinander identifizieren.

Abbildung bijektiv 

Um die Bijektivität einer Abbildung nachzuweisen, ist zu zeigen, dass die Abbildung sowohl injektiv als auch surjektiv ist; eine kompakte Charakterisierung lautet

$$\forall\, b \in N\ \exists!\, a \in M : \quad f(a) = b\,.$$

Für eine bijektive Abbildung zwischen M und N ist durch die Urbilder eine Abbildung zwischen N und M definiert; diese Abbildung wird als Umkehrabbildung oder inverse Abbildung, kurz Inverse, bezeichnet

$$f : M \longrightarrow N\,, \quad f^{-1} : N \longrightarrow M\,,$$
$$\text{Graph}(f) := \big\{(a,b) \in M \times N : f(a) = b\big\}\,,$$
$$\text{Graph}\big(f^{-1}\big) := \big\{(b,a) \in N \times M : f(a) = b\big\}\,.$$

Ersetzt man für eine injektive Abbildung die Bildmenge durch das Bild, so ist diese Abbildung bijektiv und folglich invertierbar

$$f : M \longrightarrow f(M)\,, \quad f^{-1} : f(M) \longrightarrow M\,.$$

Bei einer nicht injektiven Abbildung ist es notwendig, zusätzlich die Definitionsmenge geeignet einzuschränken.

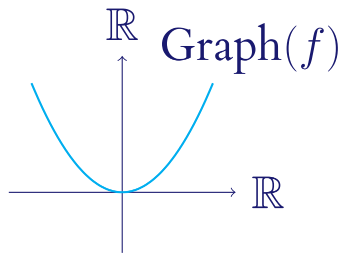
(v) BEISPIELE. Die Identitätsabbildung auf einer beliebigen Menge ist ein sehr einfaches Beispiel einer bijektiven Abbildung

$$\mathrm{id}_M : M \longrightarrow M\,.$$

Zu bijektiven (linearen) Abbildungen auf der Ebene $\mathbb{R}^2$ oder dem Raum $\mathbb{R}^3$ zählen Drehungen und Spiegelungen. $\triangle$

Beispiel 1.3.18. QUADRATISCHE FUNKTION, WURZELFUNKTION. Wir betrachten die Funktion

$$f : M = \mathbb{R} \longrightarrow N = \mathbb{R} : a \longmapsto a^2 ;$$



man sieht leicht ein, dass diese Funktion auf $M = \mathbb{R}$ weder injektiv noch surjektiv ist, denn beispielsweise gilt

$$f(-1) = 1 = f(1) , \quad -1 \notin f(M) = \mathbb{R}_{\geq 0} .$$

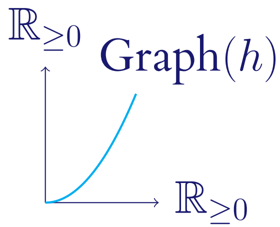
In Hinblick auf die Einführung einer Inversen ist somit eine geeignete Einschränkung der Definitionsmenge erforderlich

$$h : M_0 \subset \mathbb{R} \longrightarrow f(M_0) : a \longmapsto a^2 ;$$

die sich ergebende Inverse ist dann eindeutig bestimmt.

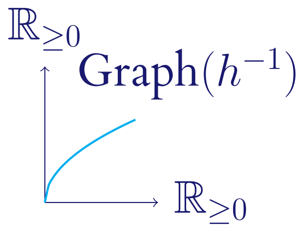
Es ist naheliegend, die nicht-negativen reellen Zahlen zu betrachten

$$h : M_0 = \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow f(M_0) = \mathbb{R}_{\geq 0} : a \longmapsto a^2 \, ;$$



die zugehöhrige Inverse ist die Wurzelfunktion mit der bekannten Notation

$$h^{-1} : f(M_0) = \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow M_0 = \mathbb{R}_{\geq 0} : a \longmapsto \sqrt{a} \, .$$



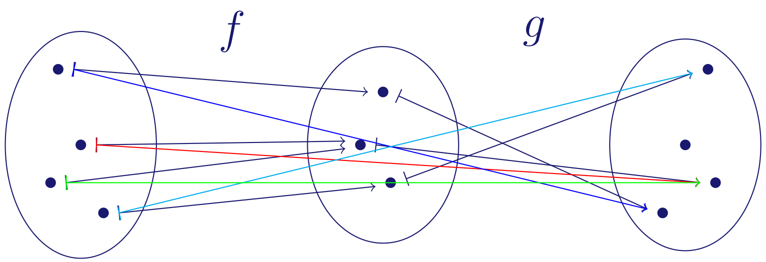
Vgl. Illustration mittels Maple. $\triangle$

Definition 1.3.19 (Komposition)**.** Für Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to O$ ist die Hintereinanderausführung oder Komposition von f und g definiert durch

$$g \circ f : M \longrightarrow O : a \longmapsto g\big(f(a)\big)\,;$$

da zunächst der Wert $b = f(a)$ und danach der Wert $g(b) = g(f(a))$ bestimmt wird, spricht man das Symbol $\circ$ als *nach*.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & N \arrow[r, "g"] & O \end{tikzcd}$$



$g \circ f$

$\triangle$

(Wesentlich in Hinblick auf eine sinnvolle Definition ist die Voraussetzung, dass das Bild von f eine Teilmenge des Definitionsbereiches von g ist.)

Bemerkungen, Beispiele 1.3.20. (i) Komposition mit Identität. Für jede Abbildung gilt

$$f : M \longrightarrow N\,, \quad f \circ \mathrm{id}_M = f\,, \quad \mathrm{id}_N \circ f = f\,.$$

(ii) Komposition mit Inversen. Für eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ und ihre Inverse $f^{-1} : N \to M$ gilt

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M\,, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N\,.$$

(iii) Assoziativität, Kommutativität. Die Komposition von Abbildungen ist assoziativ, d.h. für $f : M \to N$, $g : N \to O$ und $h : O \to P$ gilt

$$h \circ \big(g \circ f\big) = \big(h \circ g\big) \circ f\,,$$

im Allgemeinen jedoch nicht kommutativ, d.h. es gibt Abbildungen $f, g : M \to M$ mit

$$g \circ f \neq f \circ g\,;$$

ein Gegenbeispiel ist

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2\,, \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sin(x)\,,$$
$$g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sin\big(x^2\big)\,, \quad f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \big(\sin(x)\big)^2\,.$$

(iv) Beispiel. Für die Abbildungen

$$f : M = \{a,b,c\} \longrightarrow N = \{1,2\} : \begin{cases} a \longmapsto 1\,, \\ b \longmapsto 2\,, \\ c \longmapsto 1\,, \end{cases}$$

$$g : N = \{1,2\} \longrightarrow O = \{\text{Klaus}, \text{Bello}, \text{Patscherkofel}\} : \begin{cases} 1 \longmapsto \text{Patscherkofel}\,, \\ 2 \longmapsto \text{Bello}\,, \end{cases}$$

ist die Komposition $g \circ f$ gegeben durch

$$g \circ f : M = \{a,b,c\} \longrightarrow O = \{\text{Klaus}, \text{Bello}, \text{Patscherkofel}\} : \begin{cases} a \longmapsto \text{Patscherkofel}\,, \\ b \longmapsto \text{Bello}\,, \\ c \longmapsto \text{Patscherkofel}\,; \end{cases}$$

man beachte, dass $f \circ g$ nicht definiert ist. $\triangle$

Vgl. Illustration mittels Maple.

Kapitel I.3 Mengen, Relationen, Abbildungen
Funktionen

```
> restart;
> f := proc(x)
   description "definition of a function {a,b,c,d} -> {1,2,3}";
     if x = a or x = b then f(x) := 1 elif x = c then f(x) := 2 elif x = d then f(x) := 3
     end if;
   end proc:
  f(a);
  f(b);
  f(c);
  f(d);
```

$$1$$
$$1$$
$$2$$
$$3 \qquad (1)$$

Vorsicht in MAPLE!
Klammerung für Paare

```
> Graph_f := {[a,f(a)], [b,f(b)], [c,f(c)], [d,f(d)]};
```

$$Graph\_f := \{[a, 1], [b, 1], [c, 2], [d, 3]\} \qquad (2)$$

Vorsicht in MAPLE!
Zwei Varianten möglich.
(Besser gelöst z.B. in Matlab, wo zwischen Funktionsname und Funktionswert unterschieden wird
output = funktionsname(input))

```
> restart;
  f := proc(x)
   description "definition of a function {a,b,c,d} -> {1,2,3}";
     if x = a or x = b then f := 1 elif x = c then f := 2 elif x = d then f := 3
     end if;
   end proc:
  f(a);
  f(b);
  f(c);
  f(d);
  Graph_f := {[a,f(a)], [b,f(b)], [c,f(c)], [d,f(d)]};
```

```
Warning, `f` is implicitly declared local to procedure `f`
Warning, `f` is implicitly declared local to procedure `f`
```

$$1$$
$$1$$
$$2$$
$$3$$
$$Graph\_f := \{[a, 1], [b, 1], [c, 2], [d, 3]\} \qquad (3)$$

Bildmenge

```
> {f(a),f(b),f(c),f(d)};
```

$$\{1, 2, 3\} \tag{4}$$

```
> M := { };
  for x in {a, c} do
   M := M union {f(x)};
  od;
```

$$M := \varnothing$$

$$M := \{1\}$$

$$M := \{1, 2\} \tag{5}$$

Urbildmengen

```
> for y in {1, 2, 3} do
  Urbild[y] := { } :
  for x in {a, b, c, d} do
   if f(x) = y then Urbild[y] := Urbild[y] union {x} end if:
  od:
  print(y, Urbild[y]);
  od:
  Urbild[1, 3] := Urbild[1] union Urbild[3];
```

$$1, \{a, b\}$$

$$2, \{c\}$$

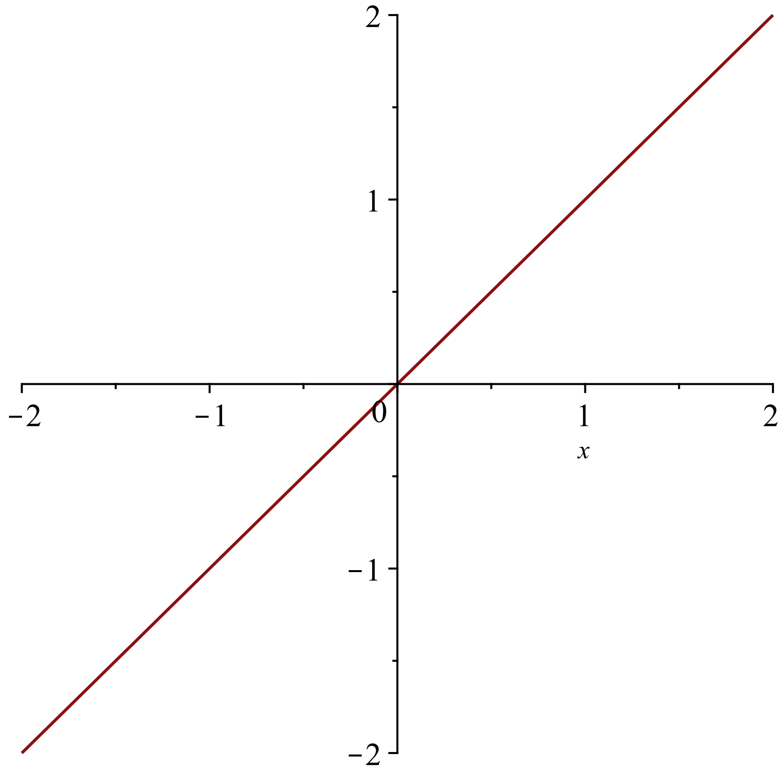
$$3, \{d\}$$

$$Urbild_{1, 3} := \{a, b, d\} \tag{6}$$

Identitätsfunktion auf Teilbereich der reellen Zahlen

```
> restart;
> id := x -> x;
  plot(id(x), x = -2 .. 2);
```

$$id := x \mapsto x$$

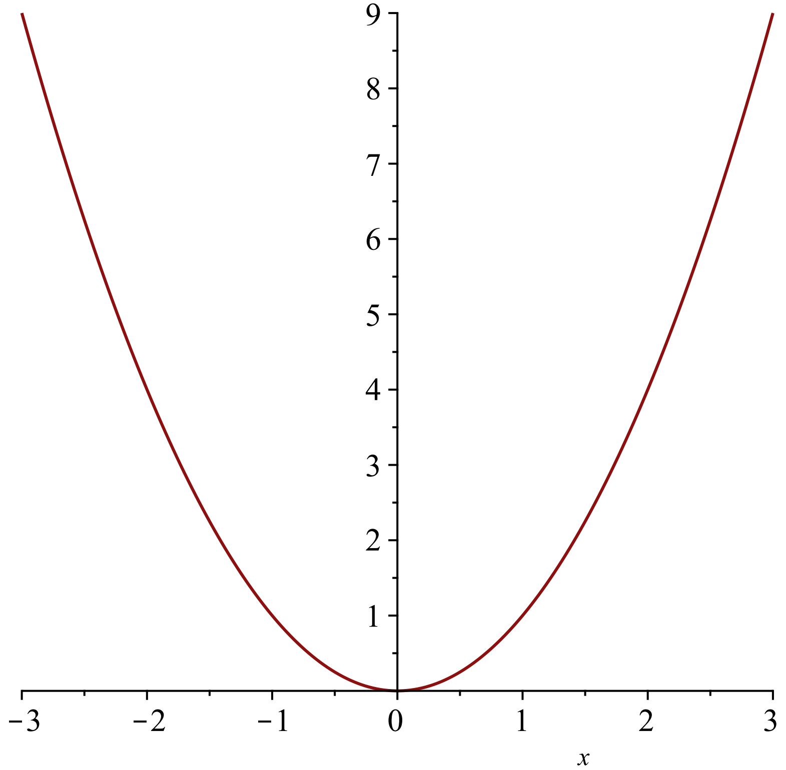


Quadratische Funktion (Graph ist Parabel)
Einschränkung auf nicht-negative reelle Zahlen
Wurzelfunktion als zugehörige inverse Funktion
"Spiegelung" an Identität

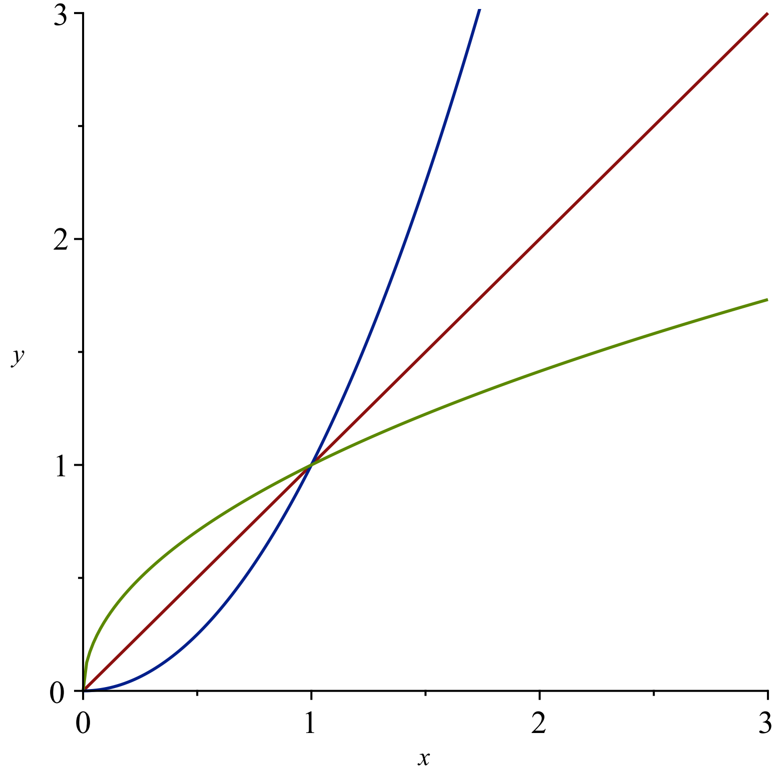
> *restart*;

> $f := x \to x^2$;
$plot(f(x), x = -3..3)$;

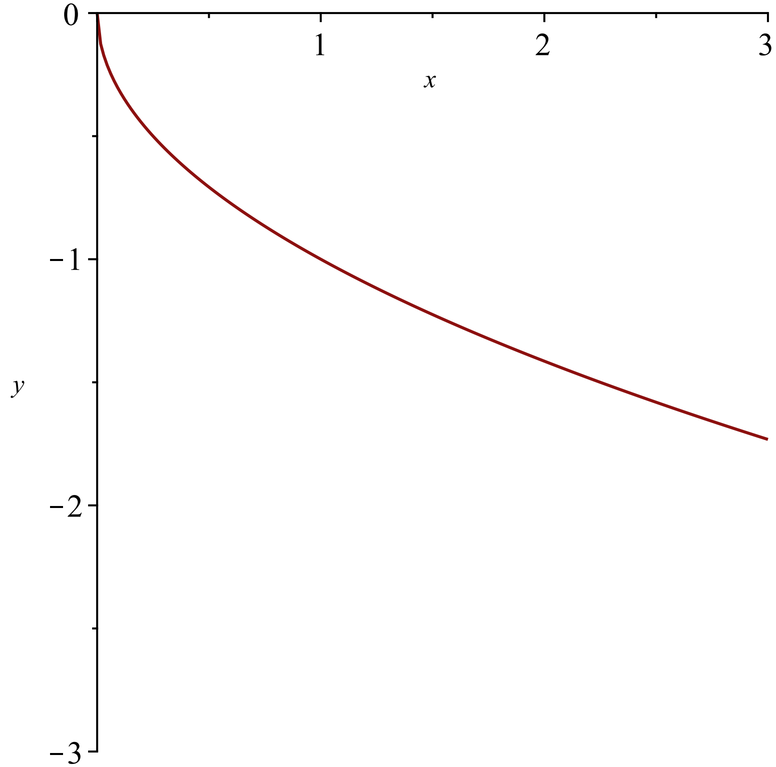
$$f := x \mapsto x^2$$



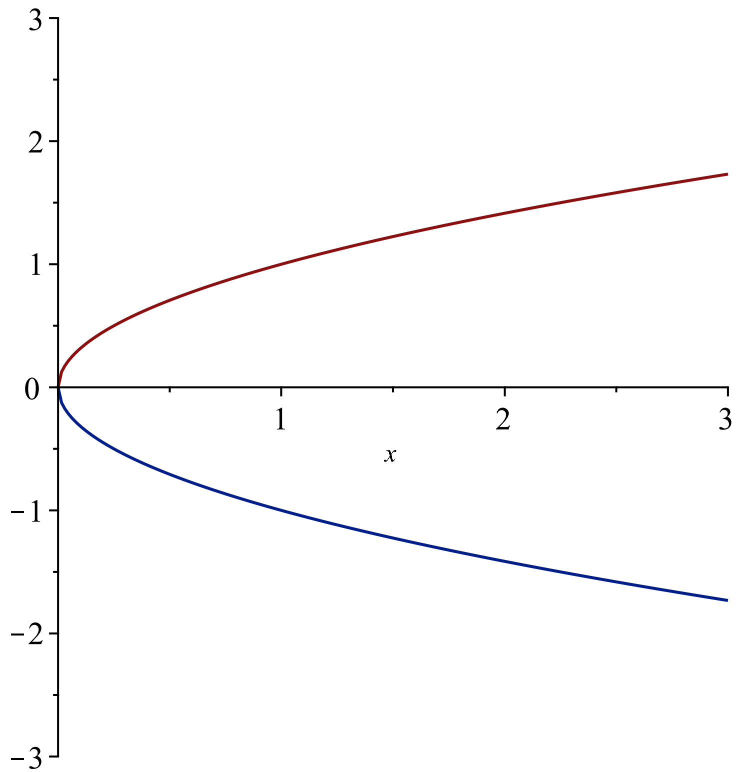
> $plot(\{x, f(x), \mathrm{sqrt}(x)\}, x = 0 .. 3, y = 0 .. 3);$



> $plot(-\operatorname{sqrt}(x), x = 0..3, y = -3..0);$
> $plot(\{\operatorname{sqrt}(x), -\operatorname{sqrt}(x)\}, x = 0..3, y = -3..3);$



0
1
2
3
x
y
−1
−2
−3



Komposition

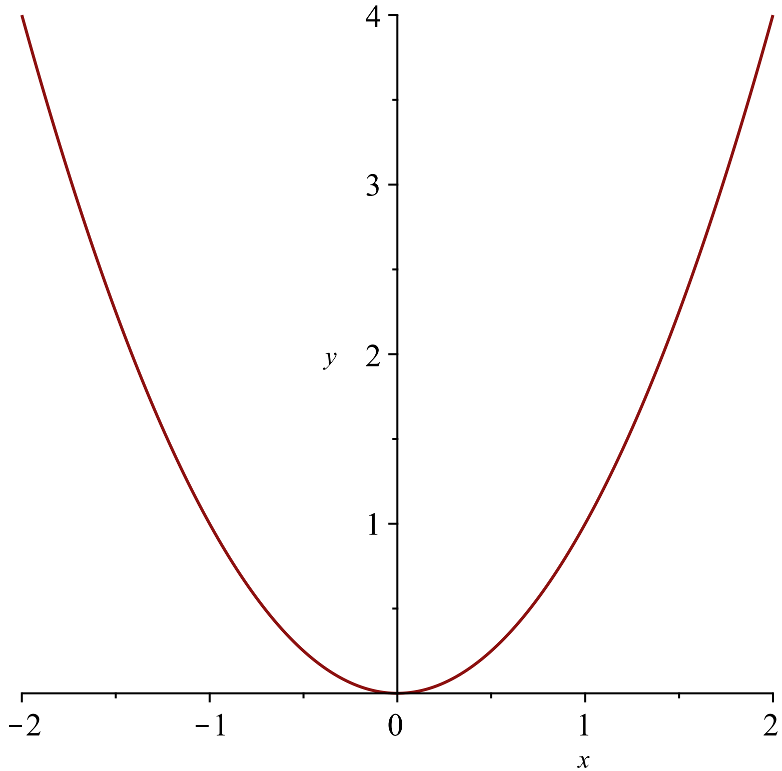
I.a. nicht kommutativ, d.h. f(g(x)) verschieden von g(f(x))

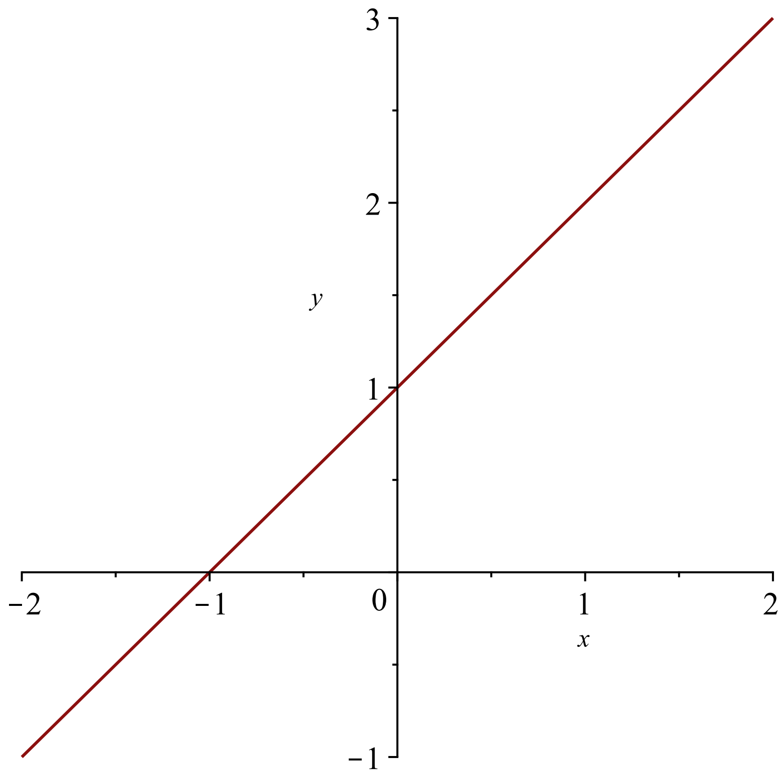
> $restart;$

> $f := x \to x^2$;
$g := x \to x + 1$;

$$f := x \mapsto x^2$$
$$g := x \mapsto x + 1 \tag{7}$$

> $plot(f(x), x = -2 .. 2, y = 0 .. 4)$;
$plot(g(x), x = -2 .. 2, y = -1 .. 3)$;


4
3
y
2
1
−2
−1
0
1
2
x

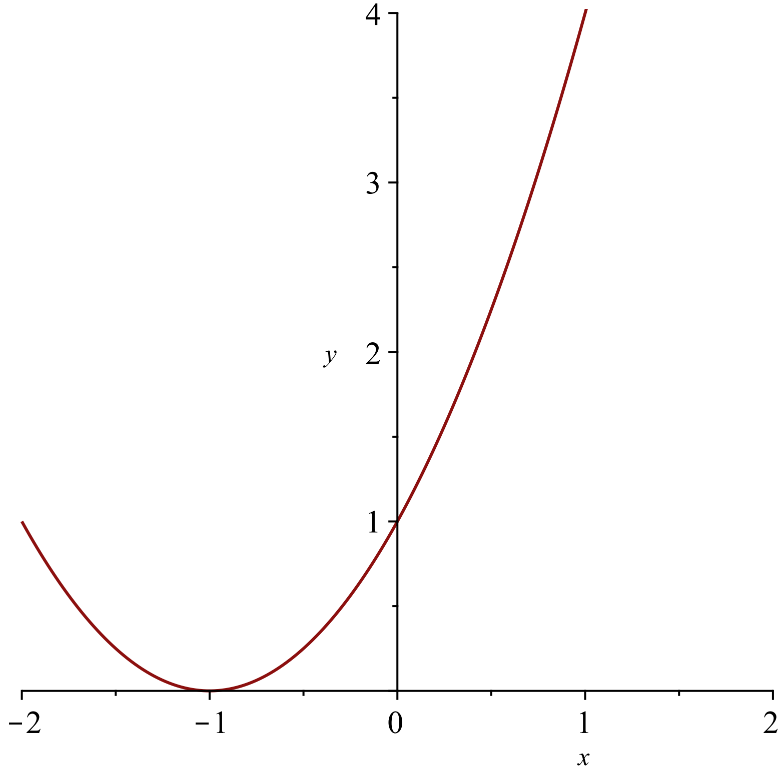


> $a := -2;$
$b := 2\ ;$
$c := 0;$
$d := 4;$

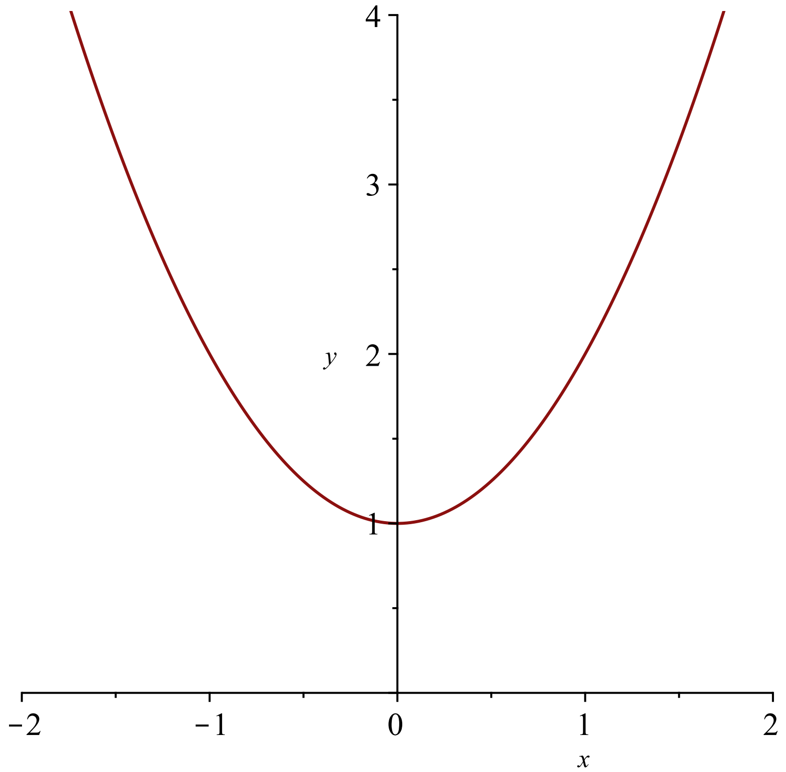
$$a := -2$$
$$b := 2$$
$$c := 0$$
$$d := 4 \tag{8}$$

> $f(g(x));$
$plot(f(g(x)), x = a\,..\,b, y = c\,..\,d);$
$g(f(x));$
$plot(g(f(x)), x = a\,..\,b, y = c\,..\,d);$

$$(x+1)^2$$



$x^2 + 1$



Komposition von quadratischer Funktion und zugehöroger inverser Funktion
(gilt für nichtnegative reelle Zahlen)

> *restart*;

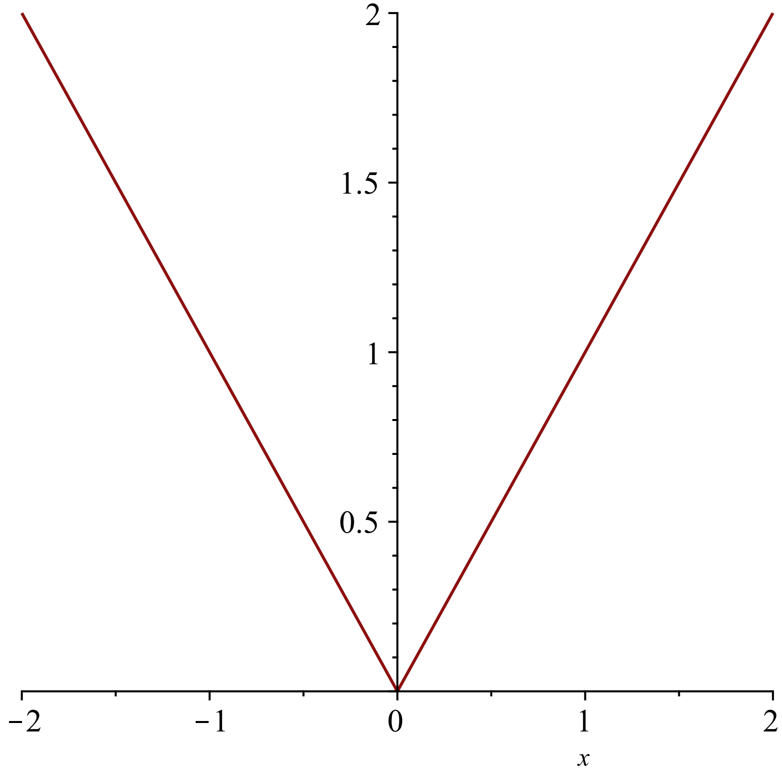
> $f := x \rightarrow x^2;$
$g := x \rightarrow \mathrm{sqrt}(x);$

$$f := x \mapsto x^2$$
$$g := x \mapsto \sqrt{x} \tag{9}$$

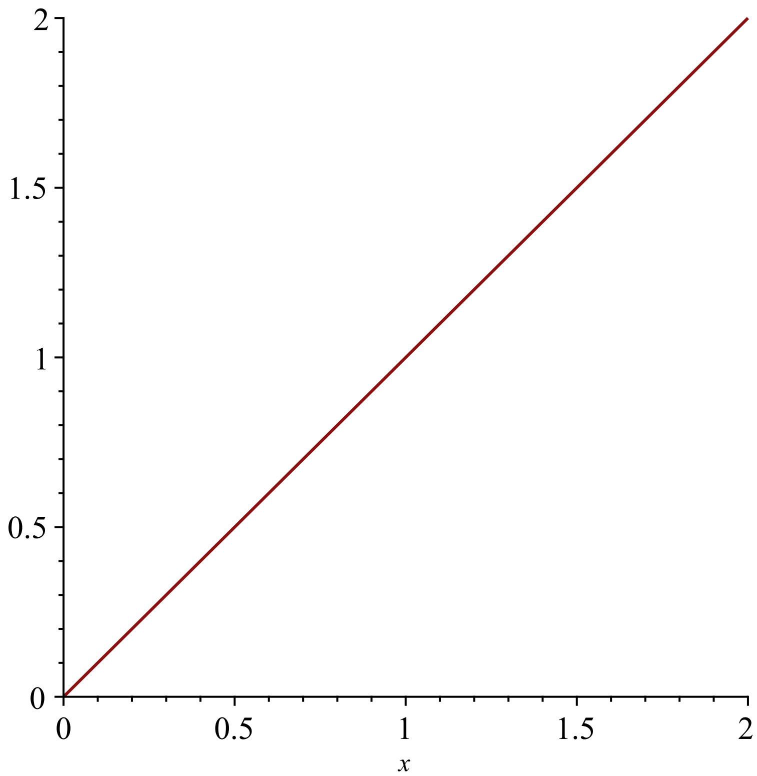
> $f(g(x));$
$g(f(x));$

$$x$$
$$\sqrt{x^2} \tag{10}$$

> $plot(g(f(x)), x = -2 .. 2);$



> $plot(g(f(x)), x = 0 .. 2);$



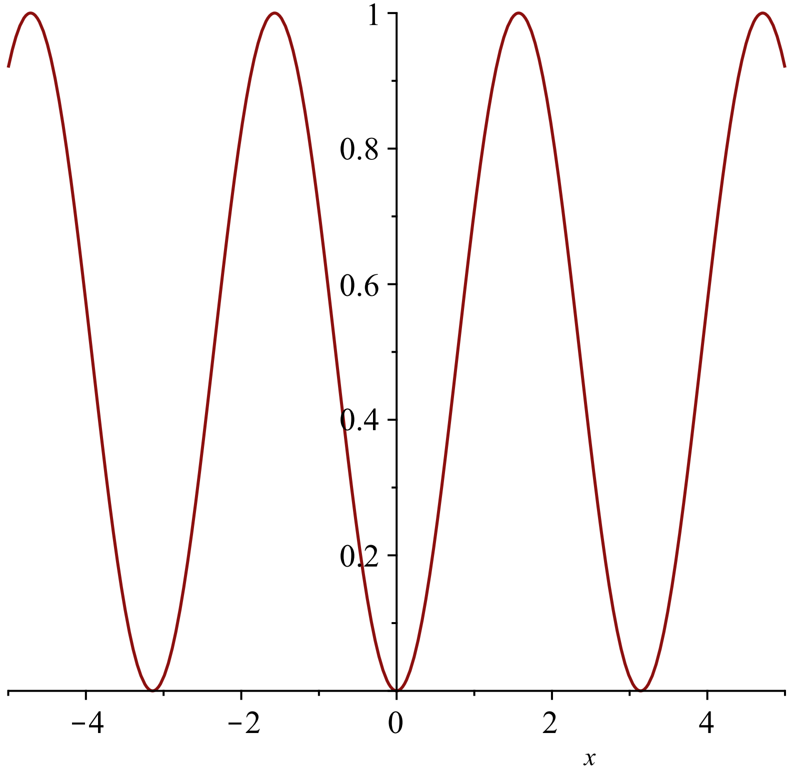
Komposition

```
> f := x → x^2;
  g := x → sin(x);
  f(g(x));
  plot(f(g(x)), x=-5..5);
  g(f(x));
  plot(g(f(x)), x=-5..5);
```

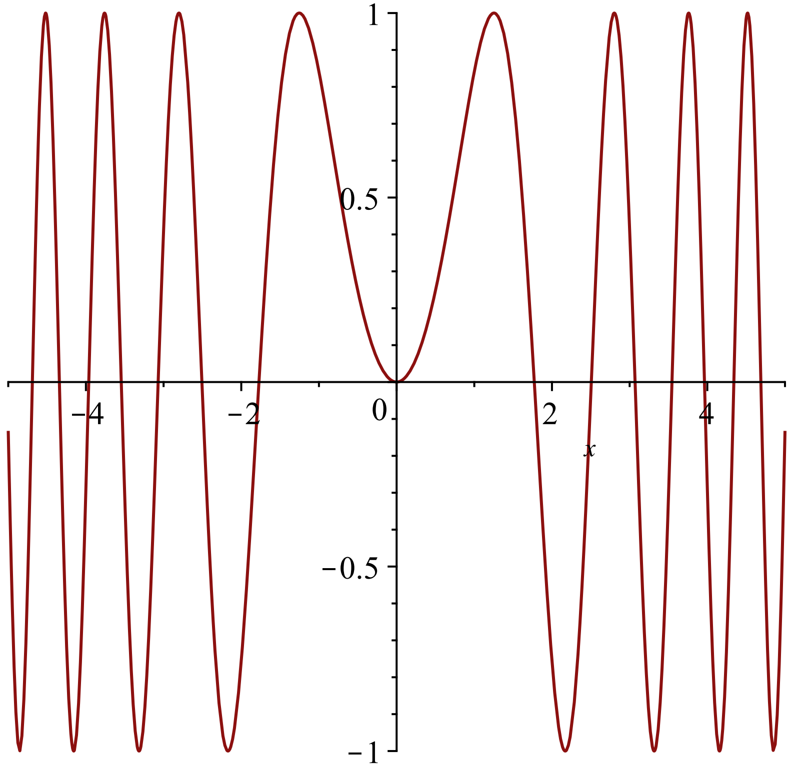
$$f := x \mapsto x^2$$

$$g := x \mapsto \sin(x)$$

$$\sin(x)^2$$



$\sin(x^2)$



1
0.5
−0.5
−1
−4
−2
0
2
4
x

>

>