universität innsbruck
Institut für Mathematik

Lineare Algebra I

Zusätzliche Bemerkungen Implementierungen mittels Maple

Tim Netzer, Mechthild Thalhammer

Wintersemester 2019/20

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 3

Vektorräume und lineare Abbildungen

VORAUSSETZUNG. In diesem Kapitel bezeichnet $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ stets einen Körper. Ein Beispiel für einen endlichen Körper ist $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$ mit einer Primzahl $p \in \mathbb{N}$; Beispiele für unendliche Körper sind $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
(Verwendung der Bezeichnung $\mathbb{K}$ statt K.)

NOTATION. Im Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen werden Elemente kartesischer Produkte als Spalten aufgefasst; die auftretenden Matrizenprodukte sind dann sinnvoll definiert

$$A \in \mathbb{K}^{m \times n}\,, \quad x \in \mathbb{K}^n = \mathbb{K}^{n \times 1}\,, \quad b \in \mathbb{K}^m = \mathbb{K}^{m \times 1}: \quad \underbrace{A}_{m \times n}\,\underbrace{x}_{n \times 1} = \underbrace{b}_{m \times 1}\,.$$

(Verwendung der (üblichen) Notation $\mathbb{K}^{m \times n}$ statt $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$. Verwendung der (üblichen) Bezeichnung A^T statt A^t für die transponierte Matrix.)

VEKTORRÄUME. Im folgenden Abschnitt werden zunächst die Begriffe Vektorraum und Untervektorraum axiomatisch eingeführt; anschließend wird der für endlich-dimensionale Vektorräume grundlegende Begriff Basis behandelt. Das Erkennen von Vektorraumstrukturen ist für ein tieferes Verständnis der Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen hilfreich

$$A \in \mathbb{K}^{m\times n}\,, \quad b \in \mathbb{K}^{m}\,, \quad L(A,b) \subseteq \mathbb{K}^{n}\,.$$

Man stellt beispielsweise fest, dass die Lösungsmenge eines Systemes von homogenen linearen Gleichungen auf einen endlich-dimensionalen Untervektorraum führt und eine vollständige Beschreibung des Lösungsraumes der Angabe einer Basis entspricht. Wesentlich ist dabei die Eigenschaft, dass die Summe von Lösungen und jedes skalare Vielfache einer Lösung wieder eine Lösung ist; etwas allgemeiner folgert man

$$\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall\, c, d \in L(A,0): \quad A\,\big(\lambda\, c + \mu\, d\big) = \lambda\, \underbrace{A\, c}_{=0} + \mu\, \underbrace{A\, d}_{=0} = 0\,.$$

Man beachte, dass die Lösungsmenge jedenfalls den Nullvektor umfasst

$$0 \in L(A,0) \subseteq \mathbb{K}^{n}\,.$$

Für ein inhomogenes lineares Gleichungssystem entspricht die Lösungsmenge einem affinen Unterraum, welcher durch eine *partikuläre* Lösung, d.h. ein Element $\overline{c} \in \mathbb{K}^n$ mit $A\,\overline{c} = b$, sowie die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Gleichungssystemes vollständig gegeben ist

$$L(A,b) = \big\{\overline{c} + c : c \in L(A,0)\big\} \subseteq \mathbb{K}^{n}\,,$$

siehe Satz 2.3.6 im Skriptum.

3.1 Vektorräume

3.1.1 Grundbegriffe

Definition 3.1.1 (VEKTORRAUM). Eine Menge V mit zwei Verknüpfungen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, wenn $(V, +)$ eine kommutative Gruppe ist und für die zweite Verknüpfung folgende Gleichheiten gelten

$$\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall\, v, w \in V :$$
$$\lambda\,(v + w) = \lambda\, v + \lambda\, w\,, \quad (\lambda + \mu)\, v = \lambda\, v + \mu\, v\,, \quad (\lambda\, \mu)\, v = \lambda\,(\mu\, v)\,, \quad 1 \cdot v = v\,.$$

Die Verknüpfung $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ wird als Skalarmultiplikation bezeichnet und ist von der Körpermultiplikation $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ zu unterscheiden. Entsprechend nennt man ein Element von $\mathbb{K}$ einen Skalar und ein Element von V einen Vektor; das neutrale Element von $(V, +)$ bezeichnet man als Nullvektor oder Ursprung. $\triangle$

Bemerkung 3.1.2. (Ergänzungen)

(i) Wie zuvor bezeichnet 1 das neutrale Element bezüglich der Körpermultiplikation.

(ii) Man beachte, dass zur Vereinfachung der Notation dasselbe Symbol für unterschiedliche Rechenoperationen verwendet wird; es treten sowohl die Körperaddition $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ und die Addition $+ : V \times V \to V$ als auch die Körpermultiplikation $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ und die Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ auf. Die Körperaddition und die Körpermultiplikation werden beispielsweise in der zweiten und dritten Gleichheit auf der linken Seite benötigt; ansonsten werden die Vektoraddition und die Skalarmultiplikation benötigt.

(iii) Analog zur vereinfachten Schreibweise bei Körpern werden Multiplikationspunkte nur in Ausnahmen wie etwa $0 \cdot v$ oder $1 \cdot v$ gesetzt; Klammern werden entsprechend der Konvention *Multiplikation vor Addition* weggelassen.

(iv) Man beachte, dass für $0 \in \mathbb{K}$ und $0 \in V$ dasselbe Symbol verwendet wird; möchte man betonen, dass die neutralen Elemente bezüglich der Addition in $\mathbb{K}$ und in V unterschiedliche Objekte sind, beispielsweise eine Zahl versus einem Tupel von Zahlen oder einer Funktion, schreibt man gegebenenfalls $0_{\mathbb{K}}$ und 0_V oder Ähnliches. Es gilt $0 \cdot v = 0$, genauer $0_{\mathbb{K}} \cdot v = 0_V$.

(v) In Vektorräumen mit zusätzlichen Eigenschaften (Prähilberträume, Hilberträume) ist außerdem ein Skalarprodukt $\cdot : V \times V \to \mathbb{K}$ definiert, vgl. Lineare Algebra II. Wesentlich für die Klassische Mechanik ist auch das Vektorprodukt $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(vi) Man merke sich: *Ein Vektor ist ein Element eines Vektorraumes.* $\triangle$

Bemerkungen, Beispiele 3.1.3. (Reihenfolge im Vergleich zum Skriptum etwas abgeändert)

(i) NULLVEKTORRAUM. Die Untersuchung des trivialen $\mathbb{K}$-Vektorraumes $V = \{0\}$, der auch als Nullvektorraum bezeichnet wird, ist von geringem Interesse. Er spielt jedoch als Untervektorraum im Zusammenhang mit eindeutig lösbaren linearen Gleichungssystemen eine Rolle; für eine quadratische Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ kann man beispielsweise folgende Aussage treffen

$$L(A,0) = \{0\} \subseteq \mathbb{K}^n \quad \Longrightarrow \quad \Big(\forall\, b \in \mathbb{K}^n \;\exists!\, c \in \mathbb{K}^n : \; L(A,b) = \{c\}\Big)\,.$$

(ii) RECHENREGELN. Mit ähnlichen Überlegungen wie für Gruppen, Ringe und Körper lassen sich aus den Vektorraumaxiomen Rechenregeln ableiten. Beispielsweise sind für einen $\mathbb{K}$-Vektorraum folgende Gleichheiten gültig

$$\forall\,\lambda \in \mathbb{K} \quad \forall\,v \in V: \quad (-\,\lambda)\,v = -\,(\lambda\,v)\,,$$
$$\forall\,\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \text{ mit } \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \forall\,v \in V \text{ mit } v \neq 0: \quad \lambda_1\,v \neq \lambda_2\,v\,;$$

falls der zugrundeliegende Körper unendlich ist, impliziert die zweite Aussage, dass jeder vom Nullvektorraum verschiedene Vektorraum unendlich viele Elemente umfasst.

Aufgabe 30

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in K, v \in V$ gilt:

(*i*) $0 \cdot v = 0$.

(*ii*) $(-\lambda_1) \cdot v = -(\lambda_1 \cdot v)$.

(*iii*) Aus $v \neq 0$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$ folgt $\lambda_1 \cdot v \neq \lambda_2 \cdot v$. Insbesondere besitzt jeder Vektorraum $V \neq \{0\}$ über einem unendlichen Körper unendlich viele Elemente.

(iii) KARTESISCHES PRODUKT. Versieht man das kartesische Produkt von zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} + : \big(V \times W\big) \times \big(V \times W\big) &\longrightarrow V \times W : \\ \big((v_1, w_1), (v_2, w_2)\big) &\longmapsto (v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2)\,, \\ \cdot : \mathbb{K} \times \big(V \times W\big) &\longrightarrow V \times W : \\ \big(\lambda, (v, w)\big) &\longmapsto \lambda\,(v, w) := (\lambda\, v, \lambda\, w)\,, \end{aligned}$$

so ergibt sich ein $\mathbb{K}$-Vektorraum; eine entsprechende Aussage gilt für mehrfache kartesische Produkte.

(iv) UNENDLICHE UND ENDLICHE VEKTORRÄUME. Ein einfaches Beispiel eines endlichen Vektorraumes ist das kartesische Produkt

$$\big(\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}\big)^2 = \big\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\big\}\,;$$

bekannte Beispiele unendlicher Vektorräume sind die Euklidischen Räume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$. Die Vektorraumaxiome weist man entweder direkt mittels der Körperaxiome nach oder verwendet die Überlegung, dass ein Körper $\mathbb{K}$ insbesondere ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist, und (iii). (Die Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sind von besonderer Bedeutung, beispielsweise in Hinblick auf die Beschreibung physikalischer Systeme im Rahmen der Klassischen Mechanik. Wie an früherer Stelle bei der Einführung der komplexen Zahlen erwähnt, veranschaulicht man sich die Vektoraddition in der Ebene $\mathbb{R}^2$ durch Parallelogramme. Die Multiplikation mit einem positiven Skalar entspricht einer Streckung oder Stauchung; bei Multiplikation mit einem negativen Skalar kommt eine eine Richtungsänderung bezüglich der zugehörigen Gerade durch den Ursprung hinzu. Entsprechendes gilt für den Raum $\mathbb{R}^3$.)

(v) ZAHLENTUPEL. Etwas allgemeiner gilt für jede positive natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, dass das kartesische Produkt $\mathbb{K}^m$ versehen mit der komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation

$$+ : \mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^m : (v, w) \longrightarrow v + w = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_m + w_m \end{pmatrix},$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^m : (\lambda, v) \longrightarrow \lambda\, v = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda\, v_1 \\ \vdots \\ \lambda\, v_m \end{pmatrix},$$

ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.
(In Hinblick auf die Vektorraumstruktur ist es unerheblich, ob die Elemente von $\mathbb{K}^m$ als Zeilen oder (platzsparender) als Spalten angegeben werden; man sollte schlussendlich eine einheitliche Schreibweise wählen.)

(vi) MATRIZEN. Die obigen Überlegungen für Zahlentupel lassen sich direkt auf Matrizen erweitern; für positive natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist die Menge aller $(m \times n)$-Matrizen $\mathbb{K}^{m\times n} = \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ versehen mit der komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K}^{m\times n} \times \mathbb{K}^{m\times n} &\longrightarrow \mathbb{K}^{m\times n} : \\ (A, B) \longrightarrow A + B &= \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & \dots & B_{mn} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & \dots & A_{1n} + B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} + B_{m1} & \dots & A_{mn} + B_{mn} \end{pmatrix}, \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{m\times n} : (\lambda, A) \longrightarrow \lambda\, A &:= \begin{pmatrix} \lambda\, A_{11} & \dots & \lambda\, A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda\, A_{m1} & \dots & \lambda\, A_{mn} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Man beachte, dass für die Definition eines Vektorraumes die Angabe von Vektoraddition und Skalarmultiplikation wesentlich ist und die Matrixmultiplikation keine Rolle spielt.
(Die Einträge einer Matrix mit Großbuchstaben $A = (A_{ij})_{(i,j)\in\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}}$ anstelle von Kleinbuchstaben $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}}$ zu bezeichnen, ist speziell bei mathematischer Software üblich. Korrektur im Skriptum $m, n \geq 1$.)

(vii) Funktionen. Als weitere Verallgemeinerung von Zahlentupeln und Matrizen ist es naheliegend, für gewisse Abbildungen komponentenweise Rechenoperationen einzuführen; genauer, betrachtet man alle auf einer Menge M definierten $\mathbb{K}$-wertigen Abbildungen, und setzt man (praktische Klammerschreibweise zur Angabe von Funktionsvorschriften)

$$\begin{gathered} \mathscr{F}(M,\mathbb{K}) := \mathbb{K}^M := \big\{f : M \to \mathbb{K}\big\}\,, \\ + : \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^M \longrightarrow \mathbb{K}^M : (f,g) \longrightarrow f+g := \big[m \longmapsto \big(f+g\big)(m) := f(m) + g(m)\big]\,, \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^M \longrightarrow \mathbb{K}^M : (\lambda, f) \longrightarrow \lambda\, f := \big[m \longmapsto \big(\lambda\, f\big)(m) := \lambda\, f(m)\big]\,, \end{gathered}$$

so ergibt sich ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.
(Man beachte, dass $\mathbb{K}^{m\times n}$ der Menge $\big\{A : \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\} \to \mathbb{K}\big\}$ entspricht; für ein Element $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ist es hilfreich, sämtliche Funktionswerte in einer Matrix, d.h. einem rechteckigen Schema, anzuordnen. In Abhängigkeit von der betrachteten Fragestellung werden unterschiedliche Strukturen von $\mathbb{K}^M$ verwendet; an früherer Stelle wurde die Ringstruktur von $\mathscr{F}(M,\mathbb{K})$ mit der komponentenweisen Addition und einer von der Skalarmultiplikation zu unterscheidenden komponentenweisen Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{K}^M \times \mathbb{K}^M \longrightarrow \mathbb{K}^M : (f,g) \longrightarrow f \cdot g := \big[m \longmapsto \big(f,g\big)(m) := f(m)\, g(m)\big]$$

besprochen.)

(viii) STETIGE FUNKTIONEN. Um zu zeigen, dass die Menge aller auf einem Intervall definierten reellwertigen stetigen Funktionen $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, ist nachzuweisen, dass die komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation stetiger Funktionen auf stetige Funktionen führen, vgl. Analysis.

(ix) POLYNOME. Ähnliche Überlegungen wie für Funktionen gelten für Polynome; genauer, die Menge

$$\mathbb{K}[t] := \left\{c_0 + c_1\,t + \cdots + c_d\,t^d : d \in \mathbb{N}_{\geq 0}\,, c_0, \ldots, c_d \in \mathbb{K}\right\}$$

versehen mit der koeffizientenweisen Addition und Skalarmultiplikation ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. $\triangle$

Definition 3.1.4. Es bezeichne V einen $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(i) UNTERVEKTORRAUM. Eine nichtleere Teilmenge $\emptyset \neq U \subseteq V$ heißt ein $\mathbb{K}$-Untervektorraum von V, wenn die Bedingung

$$\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \quad \forall\, u_1, u_2 \in U: \qquad \lambda_1\, u_1 + \lambda_2\, u_2 \in U$$

erfüllt ist.
(Setzt man $\lambda_1 = 1 = \lambda_2$ bzw. $\lambda_2 = 0$, so impliziert dies die Wohldefiniertheit (Abgeschlossenheit) der Addition $+ : U \times U \to U$ und der Skalarmutliplikation $\cdot : \mathbb{K} \times U \to U$.)

Aufgabe 31
Sei $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume von V? (begründen Sie Ihre Aussage)

(*i*) $U_1 = \{f \in V \mid f(1) = 0\}$
(*ii*) $U_2 = \{f \in V \mid f(0) = -1\}$
(*iii*) $U_3 = \{f \in V \mid \forall r \in \mathbb{R}\colon f(r) \neq 0\}$
(*iv*) $U_4 = \{f \in V \mid \forall r \in \mathbb{R}\colon |f(r)| \leq 2\}$
(*v*) $U_5 = \{f \in V \mid \exists C \in \mathbb{R}\ \forall r \in \mathbb{R}\colon |f(r)| \leq C\}$.

(ii) AFFINER UNTERRAUM. Eine Menge der speziellen Form

$$v + U := \big\{v + u : u \in U\big\} \subseteq V$$

mit $v \in V$ und einem $\mathbb{K}$-Untervektorraum $U \subseteq V$ wird als affiner $\mathbb{K}$-Unterraum von V bezeichnet. $\triangle$

Bemerkung 3.1.5. (Reihenfolge im Vergleich zum Skriptum etwas abgeändert)

(i) NULLVEKTOR. Von einem Untervektorraum wird gefordert, dass er verschieden von der leeren Menge ist; setzt man in der obigen Definition $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \in \mathbb{K}$ sowie $u_1 = u_2 = u \in U$, so folgt wegen $0 \cdot u = 0$, dass jeder Untervektorraum zumindest den Nullvektor enthält
$$0 \in U\,.$$

(ii) VEKTORRAUMEIGENSCHAFT. Für Untervektorräume wird die Wohldefiniertheit von Addition und Skalarmultiplikation vorausgesetzt; die Gültigkeit aller Vektorraumaxiome lässt sich dann leicht nachprüfen.

(iii) IMPLIKATION. Ein Untervektorraum ist insbesondere ein affiner Unterraum (mit $v = 0$); die Umkehrung ist nur dann richtig, wenn die Nullvektorbedingung erfüllt ist.

(iv) DURCHSCHNITT. Bildet man den Durchschnitt einer Familie von Untervektorräumen, so erhält man wieder einen Untervektorraum. $\triangle$

Anstelle der Bezeichnung Untervektorraum verwendet man häufig die Kurzbezeichnung Unterraum. Man beachte, dass ein affiner Unterraum im allgemeinen Fall den Nullvektor nicht enthält und deshalb kein Vektorraum ist. Es ist oft hilfreich, einen Untervektorraum als eine (abstrahierte) Gerade oder Ebene durch den Ursprung und einen zugehörigen affinen Unterraum durch eine dazu parallele Gerade oder Ebene zu veranschaulichen; entsprechend bezeichnet man zwei affine Unterräume $v + U$ und $w + U$ als parallele Unterräume.

Beispiel 3.1.6. (i) Wie zu Beginn des Kapitels bemerkt, führt die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystemes auf einen Untervektorraum und die Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystemes auf einen affinen Unterraum; es gilt folgender Zusammenhang

$$A \in \mathbb{K}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{K}^m, \quad \overline{c} \in \mathbb{K}^n, \quad A\,\overline{c} = b, \quad L(A,b) = \overline{c} + L(A,0).$$

(ii) Schränkt man den zuvor angegebenen Vektorraum aller Polynome

$$\mathbb{K}[t] := \left\{c_0 + c_1\,t + \cdots + c_d\,t^d : d \in \mathbb{N}\,, c_0, \ldots, c_d \in \mathbb{K}\right\}$$

ein, so erhält man einen $\mathbb{K}$-Untervektorraum

$$\mathbb{K}_{\leq d}[t] := \left\{c_0 + c_1\,t + \cdots + c_d\,t^d : c_0, \ldots, c_d \in \mathbb{K}\right\}; \qquad \triangle$$

die fixierte natürliche Zahl $d \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ entspricht dem maximalen Grad.

(Weitere konkrete Beispiele werden etwas später angegeben.)

Im Folgenden wird gezeigt, dass sich jede Familie von Vektoren durch die Hinzunahme sämtlicher Linearkombinationen, d.h. von Summen und skalaren Vielfachen, zu einen Untervektorraum erweitern lässt; es ist zweckmäßig, zudem den Begriff der linearen Hülle einzuführen.

Definition 3.1.7 (Linearkombination)**.** Es bezeichne V einen $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für endlich viele Vektoren $v_1, \dots, v_r \in V$ und Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ heißt ein Vektor der Form

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, v_i = \lambda_1 \, v_1 + \cdots + \lambda_r \, v_r \in V$$

eine Linearkombination von $v_1, \dots, v_r$. Es ist zweckmäßig, den Spezialfall der leeren Summe wie folgt zu definieren

$$r = 0: \quad \sum_{i=1}^{0} \lambda_i \, v_i := 0 \in V\,. \qquad \triangle$$

Lemma 3.1.8. Es bezeichne V den zugrundeliegenden $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für eine Teilmenge $M \subseteq V$ ist der kleinste $\mathbb{K}$-Untervektorraum (UVR), welcher alle Elemente von M enthält, durch die Menge aller möglichen Linearkombinationen gegeben

$$\bigcap_{\substack{M \subseteq U \subseteq V \\ U\ \mathbb{K}\text{-UVR}}} U = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i : r \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}, v_1, \ldots, v_r \in M \right\}.$$

Beweis. Siehe Skriptum. ◇
(Der Beweis beruht auf dem Nachweis der Inklusionen $\subseteq$ und $\supseteq$. Man verwendet einerseits, dass der Durchschnitt von Untervektorräumen ein Untervektorraum ist, und andererseits, dass von Untervektorräumen per Definition gefordert ist, dass sämtliche Linearkombinationen enthalten sind.
Allgemeines Prinzip: Um die kleinste Menge, welche eine bestimmte Eigenschaft hat, zu bekommen, betrachtet man häufig den Durschnitt aller Mengen mit dieser Eigenschaft.)

Definition 3.1.9. (i) LINEARE HÜLLE. Die in Lemma 3.1.8 als kleinster $\mathbb{K}$-Untervektorraum charakterisierte Menge aller möglichen Linearkombinationen der Elemente einer Menge $M \subseteq V$ bezeichnet man als $\mathbb{K}$-lineare Hülle von M und verwendet häufig die Notation (Bezeichnung *lineare Hülle* aussagekräftiger; deutsch *Spann* kaum gebräuchlich, englisch *span* im Sinne von aufgespannter Bereich)

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(M) := {}_{\mathbb{K}}\big\langle v \in M \big\rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, v_i \,:\, r \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}, v_1, \ldots, v_r \in M \right\}.$$

(ii) DIMENSIONALITÄT. Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V heißt endlich-dimensional oder endlich erzeugt, wenn es endlich viele Vektoren gibt, deren lineare Hülle V ergibt

$$\exists\, r \in \mathbb{N} \quad \exists\, v_1, \ldots, v_r \in V : \quad {}_{\mathbb{K}}\big\langle v_1, \ldots, v_r \big\rangle = V\,;$$

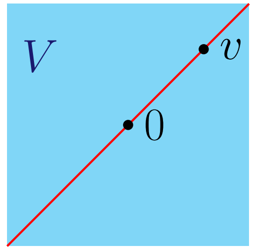
ansonsten spricht man von einem unendlich-dimensionalen Vektorraum.
(Vgl. Erzeugendensystem und Basis. Begriff der Dimensionalität entsprechend auf Untervektorräume anwendbar.) △

(Endlich-dimensionale Vektorräume wie beispielsweise der m-dimensionale Euklidische Raum $\mathbb{R}^m$ umfassen unendlich viele Elemente; da sie sich in der oben angegebenen Weise durch endlich viele reelle Zahlen beschreiben lassen, sind sie in diesem Sinne einfach zu handhaben. Entsprechendes gilt für Unterräume. Siehe Beispiele.)

Beispiel 3.1.10. (i) EINDIMENSIONALE UNTERRÄUME. Es bezeichne V einen nichttrivialen $\mathbb{K}$-Vektorraum; die lineare Hülle eines vom Nullvektor verschiedenen Vektors $0 \neq v \in V$ umfasst alle skalaren Vielfachen

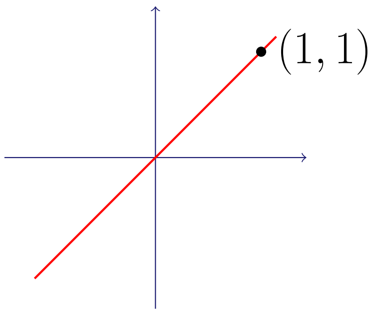
$$_{\mathbb{R}}\langle v\rangle = \left\{\lambda v : \lambda \in \mathbb{K}\right\} \subseteq V$$

und wird abstrahiert als eine Gerade durch den Ursprung veranschaulicht.



(ii) ZWEIDIMENSIONALER EUKLIDISCHER RAUM. Die Veranschaulichung von linearen Hüllen als Geraden durch den Ursprung ist insbesondere im Spezialfall der reellen Zahlenebene $V = \mathbb{R}^2$ und beispielsweise $v = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ zutreffend

$$_{\mathbb{R}}\langle(1,1)\rangle = \left\{\lambda\,(1,1) : \lambda \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{R}^2\,.$$

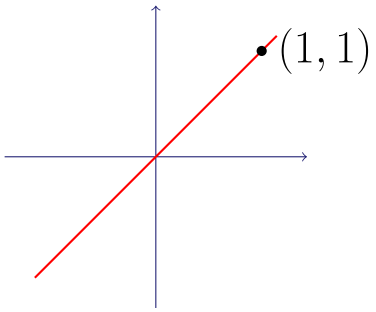


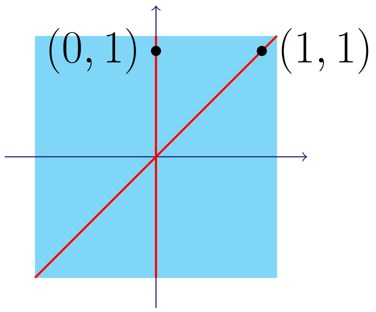
Wählt man zwei nicht parallele Vektoren, so wird die gesamte Ebene erzeugt

$$v = (1,1)\,, \quad e_2 = (0,1)\,, \quad {}_{\mathbb{R}}\big\langle v, e_2 \big\rangle = \mathbb{R}^2\,;$$

stellt man nämlich einen beliebigen Vektor $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination dar, so ist leicht einzusehen, dass das zugehörige lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar ist

$$\lambda\,(1,1) + \mu\,(0,1) = (a,b)\,, \quad \begin{cases} \lambda = a\,, \\ \lambda + \mu = b\,,\ \mu = b - a\,, \end{cases} \quad (a,b) = a\,v + (b-a)\,e_2\,.$$





Man beachte, dass die Wahl von zwei aufeinander senkrecht stehenden und normierten Vektoren naheligender ist und auf eine einfachere Darstellung führt; insbesondere gilt dies für die Standardbasisvektoren

$$e_1 = (1,0)\,, \quad e_2 = (0,1)\,, \quad {}_{\mathbb{R}}\big\langle e_1, e_2 \big\rangle = \mathbb{R}^2\,, \quad \forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2 :\ (a,b) = a\,e_1 + b\,e_2\,.$$

(Gleichwertige Schreibweise als Zeile $v = (1,1)$ oder Spalte $v = (1,1)^T$. Gleiche Schlussfolgerung für $V = \mathbb{C}^2$ mit $a,b \in \mathbb{C}$.)

(iii) STANDARDBASIS. Betrachtet man allgemeiner den Vektorraum $V = \mathbb{K}^m$ mit $m \in \mathbb{N}$ und wählt die Standardbasisvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so kann jeder Vektor in besonders einfacher Art und Weise als Linearkombination dargestellt werden

$$\forall\, a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m : \quad a = \sum_{i=1}^{m} a_i\, e_i\,;$$

damit gilt die folgende Gleichheit

$${}_{\mathbb{R}}\big\langle e_1, \dots, e_m \big\rangle = \mathbb{K}^m\,;$$

Insbesondere zeigt dies, dass $\mathbb{K}^m$ (auch für unendliche Körper) ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

(iv) POLYNOME. Da man beim Vektorraum aller Polynome $\mathbb{K}[t]$ beliebige Grade zulässt, ist dieser nicht endlich erzeugt. $\triangle$

Untervektorräume versus Kugeloberflächen im Raum. Die Untervektorräume des Raumes $\mathbb{R}^3$ sind der Nullvektorraum, erzeugt durch den Nullvektor $0 \in \mathbb{R}^3$, Geraden durch den Ursprung, erzeugt durch einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor, Ebenen durch den Ursprung, erzeugt durch zwei vom Nullvektor verschiedene und nicht parallele Vektoren, und der gesamte Raum, erzeugt durch drei *geeignet gewählte (linear unabhängige)* Vektoren $0 \neq v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} 0 \in \mathbb{R}^3 : &\quad U = {}_{\mathbb{R}}\langle 0 \rangle\,, \\ 0 \neq v \in \mathbb{R}^3 : &\quad U = {}_{\mathbb{R}}\langle v \rangle\,, \\ 0 \neq v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3 \text{ (linear unabhängig)} : &\quad U = {}_{\mathbb{R}}\langle v_1, v_2 \rangle\,, \\ 0 \neq v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3 \text{ (linear unabhängig)} : &\quad U = {}_{\mathbb{R}}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle\,. \end{aligned}$$

In diesem Sinn ist die Struktur eines Untervektorraumes wesentlich einfacher als etwa die Oberfläche einer Kugel; man kann beispielsweise alle Elemente einer Ebene $U \subset \mathbb{R}^3$ durch den Ursprung mittels Linearkombinationen darstellen

$$\forall\, w \in U \quad \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \exists\, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3 : \quad w = \lambda_1\, v_1 + \lambda_2\, v_2\,. \qquad \triangle$$

Beispiel 3.1.11 (Spaltenraum einer Matrix)**.** Siehe Skriptum.

Lemma 3.1.12. Es bezeichne V den zugrundeliegenden $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für zwei $\mathbb{K}$-Untervektorräume $U_1, U_2 \subseteq V$ ist der kleinste $\mathbb{K}$-Untervektorraum von V, der alle Elemente von U_1 und U_2 enthält, durch die $\mathbb{K}$-lineare Hülle der Vereinigung $U_1 \cup U_2$ oder äquivalent dazu durch alle Linearkombinationen der Elemente von U_1 und U_2 gegeben; eine gebräuchliche Schreibweise ist

$$U_1 + U_2 := \left\{ u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2 \right\} = \operatorname{Span}_{\mathbb{K}}(U_1 \cup U_2)\,. \qquad \diamond$$

(Gilt zusätzlich $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, so verwendet man häufig das Symbol $\oplus$ und spricht von der direkten Summe zweier Untervektorräume.)

Vgl. Illustration mittels Maple (Durchschnitt / Summe von Untervektorräumen).

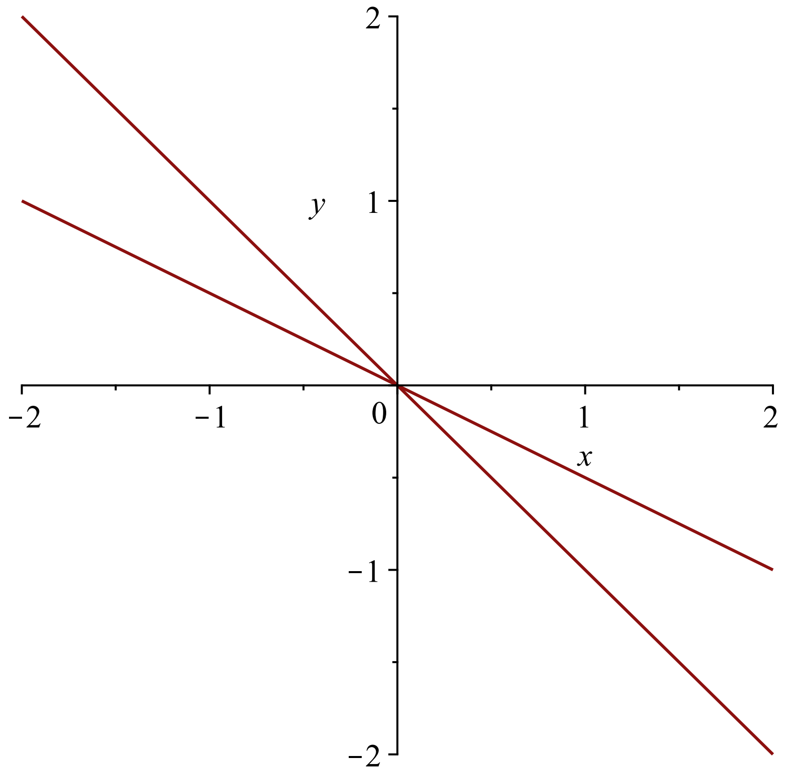
Generelle Bemerkung:
Veranschaulichung von Geraden im R^2 und deren Durchschnitt gut möglich
Veranschaulichung von Ebenen im R^3 schwieriger

Ad Bemerkung 3.1.4
Durchschnitt zweier Geraden durch Ursprung ergibt Untervektorraum

```
> restart;
  with(plots):
  G1 := x + y = 0;
  G2 := x + 2·y = 0;
  implicitplot({G1, G2}, x=-2..2, y=-2..2);
  solve({G1, G2});
```

$$G1 := x + y = 0$$

$$G2 := x + 2\,y = 0$$



$$\{x = 0, y = 0\} \quad \textbf{(1)}$$

Ad Lemma 3.1.12
Die Vereinigung der beiden Geraden ist offensichtlich KEIN Unterraum, es gilt jedoch folgende Aussage.
Betrachtet man G1 + G2 := {g1 + g2: g1 in G1, g2 in G2}, so erhält man die gesamte Ebene, denn

laut Lemma 3.1.12 ist G1 + G2 = span(G1 union G2) und andererseits span(G1 union G2) = R^2.
Wählt man beispielsweise v1 = (1,-1) in G1 (d.h. G1 = span(v1) = {lambda1 v1: lambda1 in R}) und v2 = (2,-1) in G2 (d.h. G2 = span(v2) = {lambda2 v2: lambda2 in R}), so lässt sich jeder Punkt der Ebene
w = (a,b) in R^2 also als Linearkombination von v1 und v2 darstellen.
Die Lösung eines linearen Gleichungssystemes ergibt w = - (a + 2 b) v1 + (a + b) v2;
anders ausgedrückt, mit g1 = - (a + 2 b) v1 und g2 = (a + b) v2 gilt w = g1 + g2.

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
  G1 := x + y = 0;
  G2 := x + 2·y = 0;
  v1 := ⟨1,-1⟩;
  subs({x = v1[1], y = v1[2]}, G1);
  v2 := ⟨2,-1⟩;
  subs({x = v2[1], y = v2[2]}, G2);
  w := ⟨a, b⟩;
  lambda1 · v1 + lambda2 · v2 = w;
  A := ⟨⟨1,-1⟩|⟨2,-1⟩⟩;
  A . ⟨lambda1, lambda2⟩;
  Sol := LinearSolve(A, w);
  g1 := Sol[1] · v1;
  subs({x = g1[1], y = g1[2]}, G1);
  g2 := Sol[2] · v2;
  subs({x = g2[1], y = g2[2]}, G2);
  g1 + g2 = w;
```

$$G1 := x + y = 0$$

$$G2 := x + 2\,y = 0$$

$$v1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$0 = 0$$

$$v2 := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$0 = 0$$

$$w := \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda 1 + 2\,\lambda 2 \\ -\lambda 1 - \lambda 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda 1 + 2\,\lambda 2 \\ -\lambda 1 - \lambda 2 \end{bmatrix}$$

$$Sol := \begin{bmatrix} -2\,b - a \\ b + a \end{bmatrix}$$

$$g1 := \begin{bmatrix} -2\,b - a \\ 2\,b + a \end{bmatrix}$$

$$0 = 0$$

$$g2 := \begin{bmatrix} 2\,b + 2\,a \\ -b - a \end{bmatrix}$$

$$0 = 0$$

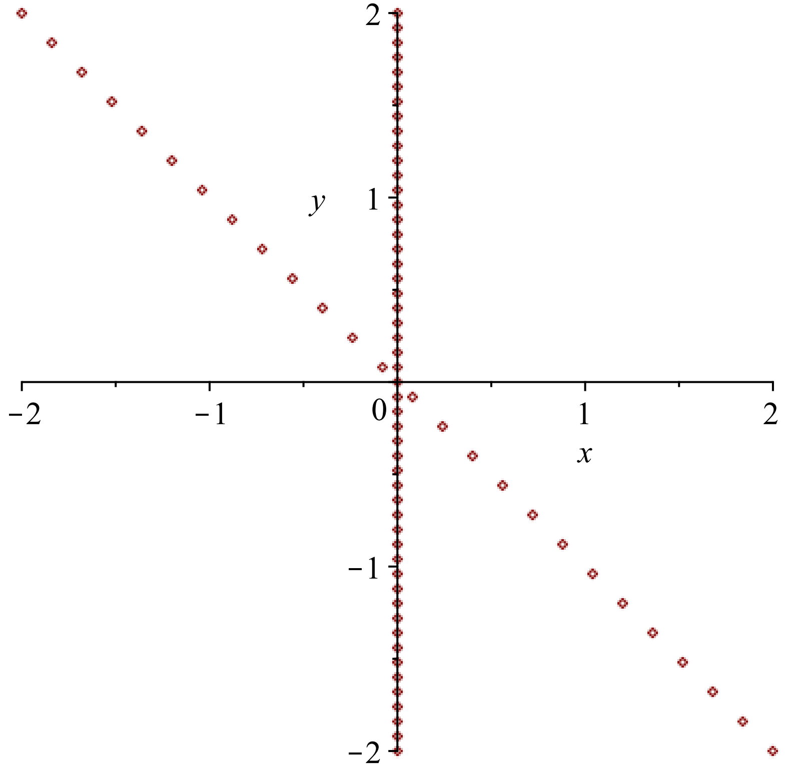
$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

Spezialfall einer Gerade, die nicht als Graph einer Funktion f: R -> R: x -> f(x) dargestellt werden kann

```
> restart;
  with(plots) :
  G1 := x + y = 0;
  G3 := x = 0;
  implicitplot({G1, G3}, x = -2 ..2, y = -2 ..2, style = point);
  solve({G1, G3});
```

$$G1 := x + y = 0$$

$$G3 := x = 0$$



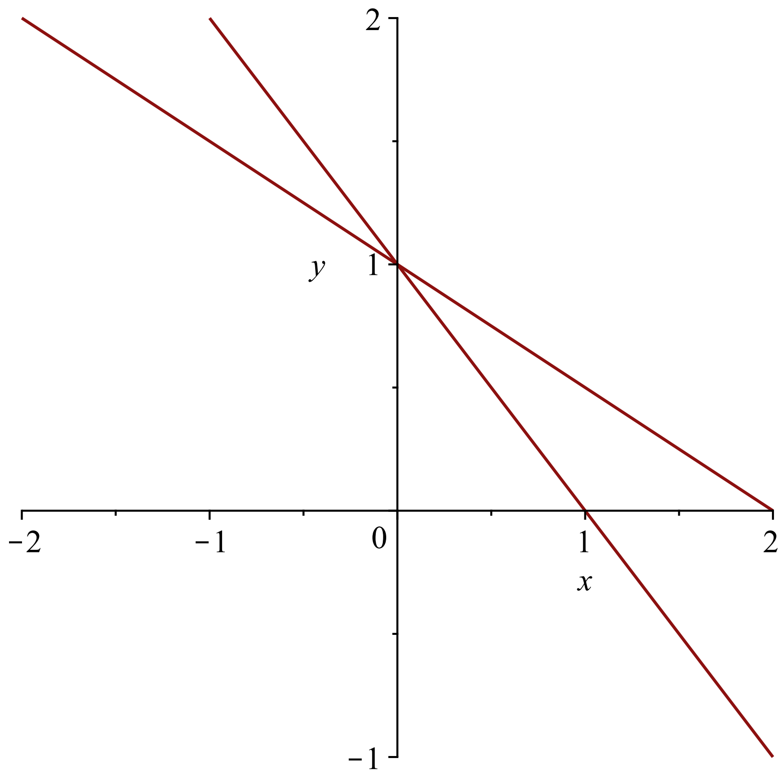
$$\{x = 0, y = 0\} \tag{3}$$

Durchschnitt zweier (allgemeiner) Geraden (affine Unterräume)

```
> restart;
  with(plots) :
  G1 := x + y = 1;
  G2 := x + 2·y = 2;
  implicitplot({G1, G2}, x = -2 ..2, y = -2 ..2);
  solve({G1, G2});
```

$$G1 := x + y = 1$$

$$G2 := x + 2\,y = 2$$



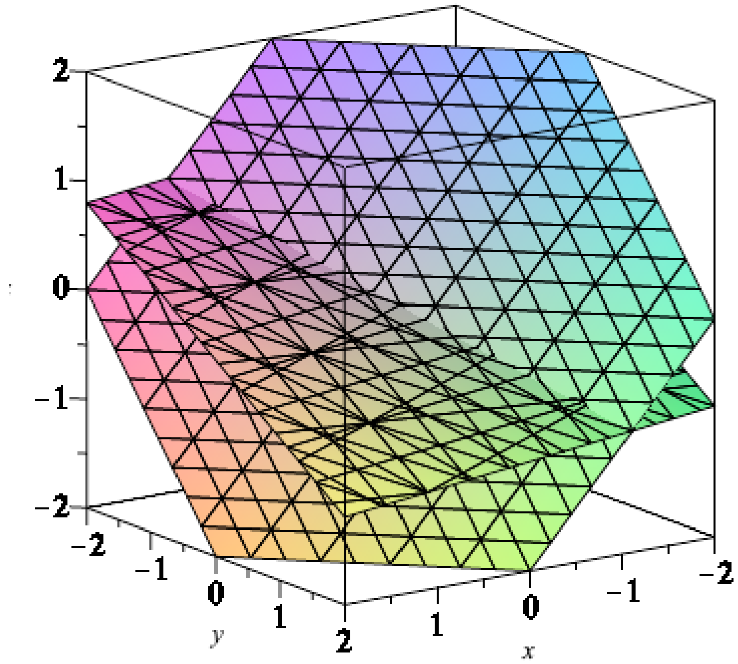
$$\{x = 0, y = 1\} \tag{4}$$

Schnitt zweier / dreier Ebenen durch Ursprung ergibt Untervektorraum
Hier würde gelten E1 + E2 = R^3 oder auch E1 + E3 = R^3 oder auch E2 + E3 = R^3

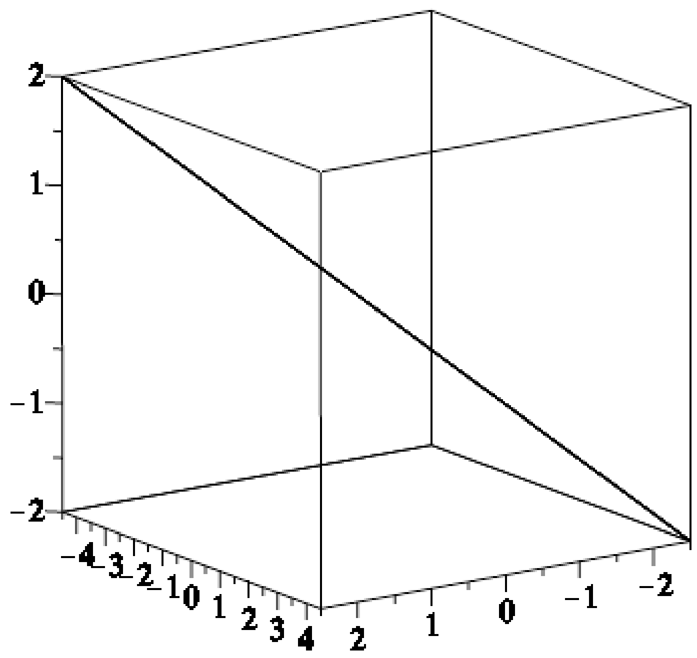
> $restart;$
$with(plots):$
$E1 := x + y + z = 0;$
$E2 := x + 5\cdot y + 10\cdot z = 0;$
$implicitplot3d(\{E1, E2\}, x = -2..2, y = -2..2, z = -2..2);$
$solve(\{E1, E2\});$
$plot3d\left(\left[\frac{5}{4}\cdot z, -\frac{9}{4}\cdot z, z\right], z = -2..2\right);$

$$E1 := x + y + z = 0$$

$$E2 := x + 5\,y + 10\,z = 0$$

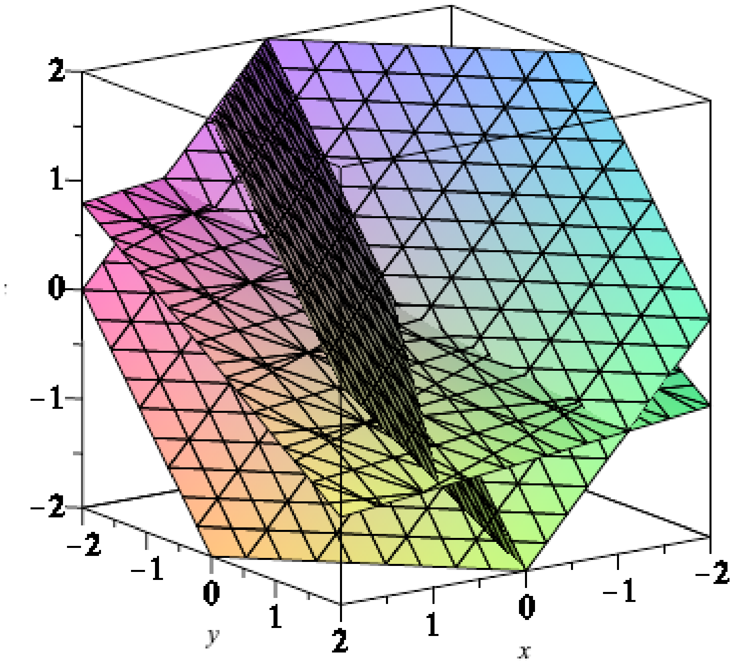


$$\left\{x = \frac{5\,z}{4}, y = -\frac{9\,z}{4}, z = z\right\}$$




```
> E3 := x - y - z = 0;
  implicitplot3d({E1, E2, E3}, x=-2..2, y=-2..2, z=-2..2);
  solve({E1, E2, E3});
```

$$E3 := x - y - z = 0$$



$$\{x = 0, y = 0, z = 0\} \tag{5}$$

>

Dimension. Der auf dem Basisbegriff beruhende Dimensionsbegriff wird an späterer Stelle eingeführt; im Wesentlichen gibt die Dimension eines Vektorraumes (bzw. Untervektorraumes) die Anzahl an Vektoren an, die zur Darstellung eines beliebigen Elementes des Vektorraumes mittels Linearkombinationen benötigt werden. Speziell für Untervektorräume des Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ gelten folgende Gleichheiten

$$\begin{aligned} \text{Nullvektorraum } U = {}_{\mathbb{R}}\langle 0 \rangle : &\quad \text{Dimension } 0\,, \\ \text{Gerade durch Ursprung } U = {}_{\mathbb{R}}\langle v \rangle : &\quad \text{Dimension } 1\,, \\ \text{Ebene durch Ursprung } U = {}_{\mathbb{R}}\langle v_1, v_2 \rangle : &\quad \text{Dimension } 2\,, \\ \text{Gesamter Raum } U = {}_{\mathbb{R}}\langle v_1, v_2, v_3 \rangle : &\quad \text{Dimension } 3\,, \end{aligned}$$

vgl. Bemerkung *Untervektorräume versus Kugeloberflächen im Raum*.

Dimensionsformel. Im Rahmen des Vertiefungsteiles der Vorlesung wird die Dimensionsformel für zwei $\mathbb{K}$-Untervektorräume U_1 und U_2 besprochen, siehe Satz 3.1.25. Im allgemeinen Fall leitet man folgenden Zusammenhang her

$$\dim_{\mathbb{K}}(U_1 + U_2) = \dim_{\mathbb{K}}(U_1) + \dim_{\mathbb{K}}(U_2) - \dim_{\mathbb{K}}(U_1 \cap U_2)\,;$$

bei einer direkten Summe ist wegen $\dim_{\mathbb{K}}(U_1 \cap U_2) = \dim_{\mathbb{K}}(\{0\}) = 0$ die Gleichheit

$$\dim_{\mathbb{K}}(U_1 \oplus U_2) = \dim_{\mathbb{K}}(U_1) + \dim_{\mathbb{K}}(U_2)$$

gültig. Ein einfaches Beispiel, welches die Dimensionsformel bestätigt, sind zwei Geraden durch den Ursprung, eingebettet in der Ebene $\mathbb{R}^2$ oder im Raum $\mathbb{R}^3$. Sind die Geraden parallel, d.h. stimmen sie überein, erhält man

$$\begin{gathered}
U_1 = U_2\,, \quad \dim(U_1) = 1 = \dim(U_2)\,,\\
U_1 + U_2 = U_1\,, \quad \dim(U_1 + U_2) = 1\,,\\
U_1 \cap U_2 = U_1\,, \quad \dim(U_1 \cap U_2) = 1\,,\\
1 = 1 + 1 - 1\,;
\end{gathered}$$

sind die beiden Geraden nicht parallel, schneiden sie sich im Ursprung, und somit folgt

$$\begin{gathered}
\dim(U_1) = 1 = \dim(U_2)\,,\\
U_1 + U_2 = \mathbb{R}^2\,, \quad \dim(U_1 + U_2) = 2\,,\\
U_1 \cap U_2 = \{0\}\,, \quad \dim(U_1 \cap U_2) = 0\,,\\
2 = 1 + 1 - 0\,.
\end{gathered}$$

Für Ebenen und Geraden im Raum gelten ähnliche Überlegungen. △

3.1.2 Lineare Unabhängigkeit, Basen und Dimension

Definition 3.1.13 (Lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensystem, Basis)**.** Siehe Skriptum.

Bemerkungen, Beispiele 3.1.14. Siehe Skriptum. (Korrektur, Seite 72, oben: Angabe als Spalte konsistent.)

Vorbemerkung. Um für endlich-dimensionale Vektorräume grundlegende Begriffe wie Lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensystem, Basis, Dimension zu verstehen, ist es erfahrungsgemäß einfacher, Resultate und deren Beweise zunächst für den Spezialfall $\mathbb{R}^3$ oder den etwas allgemeineren Fall $\mathbb{R}^m$ mit $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ nachzuvollziehen. Im Folgenden werden detailierte Überlegungen deshalb speziell für den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ angegeben; die Erweiterung auf den Vektorraum $\mathbb{K}^m$ mit $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ erfordert gewisse Modifikationen, jedoch keine neuen Beweisideen. Der Fokus auf den Vektorraum $\mathbb{K}^m$ wird an späterer Stelle gerechtfertigt; wählt man nämlich für einen m-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V eine $\mathbb{K}$-Basis $(v_1, \dots, v_m)$ und stellt einen beliebigen Vektor als Linearkombination der Basisvektoren dar, so erhält man eine eindeutige Zuordnung

$$v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, v_i \in V \quad \longleftrightarrow \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T \in \mathbb{K}^m \,,$$

d.h. in diesem Sinn entspricht jeder m-dimensionale Vektorraum V dem Vektorraum $\mathbb{K}^m$.

Da der folgende Satz und die wesentlichen Beweismethoden bereits behandelt wurden, werden alle äquivalenten Charakterisierungen einer Basis für den Euklidischen Raum und zwei Spezialfälle nachgeprüft

$$\mathbb{K}=\mathbb{R}\,,\quad V=\mathbb{R}^3\,,\quad v_1,v_2,v_3\in\mathbb{R}^3\,,\quad \text{Basis}\ \ (v_1,v_2,v_3)\,,$$

$$\text{Standardbasis:}\quad v_1=e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\,,\quad v_2=e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\,,\quad v_3=e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\,,$$

$$\text{allgemeine Basis:}\quad v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\,,\quad v_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\,,\quad v_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\,.$$

Wichtiger Zusammenhang! Linearkombinationen dieser Vektoren entsprechen Matrix-Vektor-Multiplikationen (platzsparendere Angabe der Spalte λ als Transponierte einer Zeile)

$$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3=A\,\lambda\,,\quad A=\big(v_1\big|v_2\big|v_3\big)\in\mathbb{R}^{3\times 3}\,,\quad \lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)^T\in\mathbb{R}^3\,,$$

$$\text{Standardbasis:}\quad A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\,,$$

$$\text{Allgemeine Basis:}\quad A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}\,,$$

vgl. Beispiel 3.1.11; bei der Standardbasis ist die zugehörige Matrix gleich der Einheitsmatrix.

Man beachte, dass ein unendlich-dimensionaler Vektorraum keine (wie zuvor definierte) Basis besitzt; die zusätzliche Annahme endlicher Dimensionalität ist deshalb sinnvoll.

Satz 3.1.15 (Charakterisierung von Basen)**.** Es bezeichne V einen endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für Vektoren $v_1, \dots, v_m \in V$ sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Das Tupel $(v_1, \dots, v_m)$ ist eine Basis von V, d.h. es ist sowohl die Bedingung *lineare Unabhängigkeit*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, v_i = 0 \;\text{ mit }\; \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$$

als auch die Bedingung *Erzeugendensystem von V*

$$\forall \, v \in V \quad \exists \, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K} : \quad v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, v_i$$

erfüllt.

Wie zuvor bemerkt, gilt folgende Äquivalenz

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A\,\lambda = 0\,;$$

um zu zeigen, dass das Tripel (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig ist, weist man deshalb nach, dass die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystemes nur die Nulllösung umfasst

$$\Big(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad L(A, 0) = \{0\}\,.$$

bei der Standardbasis ist dies offensichtlich

$$\text{Standardbasis:} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0\,, \\ \lambda_2 = 0\,, \\ \lambda_3 = 0\,, \end{cases} \quad L(A, 0) = \{0\}\,,$$

bei der allgemeinen Basis ist dazu eine Umformung der Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform erforderlich

$$\text{Allgemeine Basis:} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Zeile 2 - Zeile 1 / Zeile 3 - Zeile 1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -2\,\lambda_3 = 0\,, \quad \lambda_3 = 0\,, \\ -2\,\lambda_2 - 2\,\lambda_3 = 0\,, \quad \lambda_2 = -\,\lambda_3 = 0\,, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\,, \quad \lambda_1 = -\,\lambda_2 - \lambda_3 = 0\,, \end{cases} \qquad L(A, 0) = \{0\}\,.$$

Um zu zeigen, dass das Tripel (v_1, v_2, v_3) ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ist, weist man nach, dass die Lösungsmenge des zugehörigen inhomogenen linearen Gleichungssystemes nicht leer ist

$$\left(\forall\, v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : \qquad v = \lambda_1\, v_1 + \lambda_2\, v_2 + \lambda_3\, v_3\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad L(A, v) \neq \emptyset\,;$$

bei der Standardbasis ist dies offensichtlich

$$\text{Standardbasis:} \quad (A|v) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right), \quad L(A, v) \neq \emptyset\,;$$

bei der allgemeinen Basis ist dazu eine Umformung der erweiterten Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform erforderlich

$$\text{Allgemeine Basis:} \quad (A|v) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & -1 & b \\ 1 & 1 & -1 & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Zeile 2 – Zeile 1 / Zeile 3 – Zeile 1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -2 & b-a \\ 0 & 0 & -2 & c-a \end{array}\right), \quad L(A, v) \neq \emptyset\,.$$

Man beachte, dass die tatsächliche Berechnung der Lösungsmenge nicht erforderlich ist.

(ii) Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich in eindeutiger Art und Weise als Linearkombination der Vektoren $(v_1, \ldots, v_m)$ darstellen, d.h. es gilt

$$\forall\, v \in V \quad \exists!\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K} : \quad v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, v_i \,.$$

Da die eindeutige Darstellung als Linearkombination äquivalent zur eindeutigen Lösbarkeit des zugehörigen inhomogenen linearen Gleichungssystemes ist, entspricht diese für die betrachteten Spezialfälle zweckmäßige Charakterisierung einer Basis dem Nachprüfen folgender Bedingung

$$\forall\, v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \exists!\, \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \quad L(A, v) = \{\lambda\}\,;$$

Bei der Standardbasis kann man die eindeutig bestimmte Lösung direkt ablesen

$$\text{Standardbasis:}\quad (A|v) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right), \quad \begin{cases} \lambda_1 = a\,, \\ \lambda_2 = b\,, \\ \lambda_3 = c\,, \end{cases} \quad L(A,v) = \left\{(a,b,c)^T\right\};$$

bei der allgemeinen Basis führt man ausgehend von der zuvor berechnete Zeilenstufenform eine Rücksubstitution aus und erhält

$$\text{Allgemeine Basis:}\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -2 & b-a \\ 0 & 0 & -2 & c-a \end{array}\right),$$

$$\begin{cases} -2\,\lambda_3 = c-a\,, & \lambda_3 = \frac{a-c}{2}\,, \\ -2\,\lambda_2 - 2\,\lambda_3 = b-a\,, & \lambda_2 = \frac{a-b}{2} - \lambda_3 = \frac{c-b}{2}\,, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a\,, & \lambda_1 = a - \lambda_2 - \lambda_3 = \frac{a+b}{2}\,, \end{cases} \quad L(A,v) = \left\{\left(\tfrac{a+b}{2}, \tfrac{c-b}{2}, \tfrac{a-c}{2}\right)\right\}.$$

(iii) Das Tupel $(v_1, \ldots, v_m)$ ist maximal linear unabhängig, d.h. für $(v_1, \ldots, v_m)$ gilt

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, v_i = 0 \ \text{ mit } \ \lambda_1, \ldots, \lambda_m \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0\,,$$

aber die Hinzunahme eines weiteren Vektors führt auf lineare abhängige Vektoren

$$\forall\, v \in V \quad \exists\, (0, \ldots, 0) \neq (\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}) \in \mathbb{K}^{m+1} : \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, v_i + \lambda_{m+1}\, v = 0\,.$$

Die lineare Unabhängigkeit der Standardbasis und der allgemeinen Basis wurde bereits gezeigt. Die in der zweiten Bedingung auftretende Linearkombination lässt sich ähnlich wie zuvor als ein homogenes lineares Gleichungssystem formulieren

$$v = (a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3\,, \quad B = \big(v_1 \big| v_2 \big| v_3 \big| v\big) \in \mathbb{R}^{3\times 4}\,, \quad \mu = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^T \in \mathbb{R}^4\,,$$
$$\lambda_1\, v_1 + \lambda_2\, v_2 + \lambda_3\, v_3 + \lambda_4\, v = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad B\,\mu = 0\,.$$

Für lineare Gleichungssysteme mit reellen Koeffizienten ist die Lösungsmenge leer, einelementig oder unendlich; da die zweite Bedingung besagt, dass es neben der Nulllösung eine weitere Lösung gibt, ist nachzuprüfen, ob die Lösungsmenge unendlich viele Elemente umfasst

$$\#L(B, 0) = \infty\,.$$

Ähnlich wie zuvor, kann man bei der Standardbasis die Lösungsmenge nach Wahl des freien Parameters $\lambda_4 \in \mathbb{R}$ sofort ablesen

$$\text{Standardbasis:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \lambda_1 + a\,\lambda_4 = 0\,, \\ \lambda_2 + b\,\lambda_4 = 0\,, \\ \lambda_3 + c\,\lambda_4 = 0\,, \end{cases}$$

$$L(B,0) = \Big\{ (-\,a\,\lambda_4, -\,b\,\lambda_4, -\,c\,\lambda_4, \lambda_4)^T : \lambda_4 \in \mathbb{R} \Big\}, \quad \#L(B,0) = \infty\,.$$

bei der allgemeinen Basis erhält man

$$\text{Allgemeine Basis:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -\,1 & -\,1 & b \\ 1 & 1 & -\,1 & c \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -\,2 & -\,2 & b-a \\ 0 & 0 & -\,2 & c-a \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -\,2\,\lambda_3 + (c-a)\,\lambda_4 = 0\,, \quad \lambda_3 = \frac{c-a}{2}\,\lambda_4\,, \\ -\,2\,\lambda_2 - 2\,\lambda_3 + (b-a)\,\lambda_4 = 0\,, \quad \lambda_2 = \frac{b-a}{2}\,\lambda_4 - \lambda_3 = \frac{b-c}{2}\,\lambda_4\,, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + a\,\lambda_4 = 0\,, \quad \lambda_1 = -\,a\,\lambda_4 - \lambda_2 - \lambda_3 = -\,\frac{a+b}{2}\,\lambda_4\,, \end{cases}$$

$$L(B,0) = \Big\{ \Big(-\,\frac{a+b}{2}\,\lambda_4, \frac{b-c}{2}\,\lambda_4, \frac{c-a}{2}\,\lambda_4, \lambda_4 \Big)^T : \lambda_4 \in \mathbb{R} \Big\}, \quad \#L(B,0) = \infty\,.$$

Man beachte den direkten Zusammenhang mit der Lösungsmenge $L(A,v)$.

(iv) Das Tupel $(v_1, \ldots, v_m)$ ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h. die lineare Hülle von $(v_1, \ldots, v_m)$ ergibt ganz V

$$\forall\, v \in V \quad \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}: \quad v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, v_i\,,$$

aber nach Wegnahme eines Vektors $v_1, \ldots, v_m$ ist dies nicht mehr richtig.

Die erste Bedingung entspricht der Forderung, dass die Standardbasis und die allgemeine Basis ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ist; dies wurde bereits gezeigt. Man müsste zusätzlich nachweisen, dass die linearen Hüllen

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\big(\{v_1, v_2\}\big)\,, \quad \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\big(\{v_1, v_3\}\big)\,, \quad \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\big(\{v_2, v_3\}\big)\,,$$

nicht den gesamten Raum ergeben. Ein Gegenbeispiel für die Standardbasis ist

$$\nexists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}: \quad e_3 = \lambda_1\, e_1 + \lambda_2\, e_2\,;$$

für das zugehörige lineare Gleichungssystem existiert offensichtlich keine Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0\,, \\ \lambda_2 = 0\,, \\ 0 = 1\,, \ \text{Widerspruch!} \end{cases}$$

$$C = \big(e_1 \big| e_2\big)\,, \quad L(C, e_3) = \emptyset\,.$$

△

Beispiel 3.1.16. (i) STANDARDBASIS. Zuvor wurde bewiesen, dass das Tripel (e_1, e_2, e_3) eine $\mathbb{R}$-Basis des Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ ist. Die angegebenen Überlegungen lassen sich auf den Vektorraum $\mathbb{K}^m$ mit $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ übertragen, insbesondere für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und mit leichten Adaptionen für allgemeine endliche oder unendliche Körper; allgemeiner gilt, dass die Standardbasis

$$(e_1, e_2, \ldots, e_m)\,, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m\,, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m\,, \quad \ldots \quad e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m\,,$$

eine $\mathbb{K}$-Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraumes $\mathbb{K}^m$ ist, vgl. Beispiel 3.1.10.

(ii) POLYNOMBASIS. Eine $\mathbb{K}$-Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraumes aller Polynome mit maximalem Grad $d \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ erhält man beispielsweise mittels Monomen

$$\mathbb{K}_{\leq d}[t] := \left\{ c_0 + c_1\,t + \cdots + c_d\,t^d : c_0, \ldots, c_d \in \mathbb{K} \right\}, \quad \left(1, t, t^2, \ldots, t^d\right). \qquad \triangle$$

Korollar 3.1.17. Jeder endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorraum besitzt eine Basis.

Beweis. Laut Definition 3.1.9 besitzt ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum ein Erzeugendensystem

$$\exists\, r \in \mathbb{N} \quad \exists\, v_1, \ldots, v_r \in V : \quad \operatorname{Span}_{\mathbb{K}}\big(\{v_1, \ldots, v_r\}\big) = V\,;$$

durch schrittweises Weglassen von Vektoren erhält man ein minimales Erzeugendensystem, und nach Satz 3.1.15 ist dieses eine Basis. $\diamond$

Da der folgende Satz auf ähnlichen Beweismethoden beruht, werden stattdessen illustrierende Beispiele ergänzt.

Satz 3.1.18. Für einen endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum gelten folgende Aussagen.

(i) Ist $(v_1, \ldots, v_r)$ ein Erzeugendensystem von V und $(w_1, \ldots, w_k)$ linear unabhängig, so gilt

$$k \leq r\,.$$

Beweisidee. Unter der Annahme $r < k$ stellt man die linear unabhängigen Vektoren $w_1, \ldots, w_k$ als Linearkombinationen der Vektoren $v_1, \ldots, v_r$ dar und leitet einen Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit her. Vgl. Vorbemerkung! Details im Skriptum.

Wie zuvor wird speziell der Euklidische Raum betrachtet; ein einfaches Beispiel, das die Aussage bestätigt, ist

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}\,, \quad V = \mathbb{R}^3\,,$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{Erzeugendensystem:} \quad r = 4\,, \quad (v_1, v_2, v_3, v_4)\,, \quad v_4 = e_1\,,$$

$$\text{Linear unabhängiges Vektorenpaar:} \quad k = 2\,, \quad (w_1, w_2)\,, \quad w_1 = e_2\,, \quad w_2 = e_3\,.$$

(ii) Länge von Basen (Dimension). Zwei Basen von V haben dieselbe Länge, d.h. sie umfassen gleich viele Vektoren.

Beweis. Die erste Basis ist insbesondere ein Erzeugendensystem, die zweite Basis ist insbesondere linear unabhängig; somit gilt *Länge Basis 2* $\leq$ *Länge Basis 1*. Vertauscht man die Rollen der Basen folgt auch *Länge Basis 1* $\leq$ *Länge Basis 2*. Dies zeigt die behauptete Gleichheit *Länge Basis 1* = *Länge Basis 2*.

Alternative zur Bestimmung eines minimalen Erzeugungssystemes und damit einer Basis.

(iii) BASISERGÄNZUNGSSATZ. Wie zuvor bezeichne $(v_1, \dots, v_r)$ ein Erzeugendensystem von V und $(w_1, \dots, w_k)$ ein linear unabhängiges Tupel; wenn man von $(w_1, \dots, w_k)$ ausgehend schrittweise Vektoren des Erzeugendendensystemes hinzunimmt und dabei sicherstellt, dass die Eigenschaft der linearen Unabhängigkeit gültig ist, erhält man eine Basis von V.

Beweis. Konstruktives Verfahren, welches auf der Charakterisierung einer Basis als maximal linear unabhängiges Tupel beruht. Details im Skriptum.

Als Beispiel werden folgende Vektoren des Raumes $\mathbb{R}^3$ betrachtet

$$v_1 = (1,1,1)^T\,, \quad v_2 = (2,2,2)^T\,, \quad v_3 = (1,-1,1)^T\,, \quad v_4 = (1,-1,-1)^T\,,$$
$$w_1 = (2,-2,2)^T\,;$$

die schrittweise Ergänzung von w_1 mittels des Erzeugendensystemes (v_1, v_2, v_3, v_4) zu einer Basis, wobei jeweils die Eigenschaften linear unabhängig und Erzeugendensystem überprüft werden, führt beispielsweise auf die Basis

$$(w_1, v_1, v_4)\,.$$

Man beachte, dass Basen nicht eindeutig bestimmt sind und die Vorgehensweise bei der Basisergänzung nicht eindeutig festgelegt ist; so sind etwa auch folgende Tripel Basen

$$(w_1, v_4, v_1)\,, \quad (w_1, v_2, v_4)\,.$$

Zusätzliche Rechnungen mittels Maple, siehe unten.

Definition 3.1.19 (Dimension)**.** Es bezeichne V einen endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(v_1, \ldots, v_m)$ eine $\mathbb{K}$-Basis. Die Dimension von V über $\mathbb{K}$ ist definiert durch die Anzahl der Basisvektoren

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = m \,. \qquad \triangle$$

(Aus den zuvor angegebenen Überlegungen folgt, dass jede Basis eines endlich-dimensionalen Vektorraumes dieselbe Anzahl an Vektoren umfasst; die Dimension ist also unabhängig von der gewählten Basis und damit eine wohldefinierte Größe. Dem Nullvektorraum weist man die Dimension 0 zu.)

Beispiel 3.1.20. (i) SPALTEN UND MATRIZEN. Für die endlich-dimensionalen Vektorräume $\mathbb{K}^m$ und $\mathbb{K}^{m\times n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt (obige Überlegungen, am einfachsten mittels Standardbasis)

$$\dim_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{K}^m\right) = m\,, \quad \dim_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{K}^{m\times n}\right) = m\cdot n\,;$$

insbesondere gilt

$$\dim_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}\right) = 1\,, \quad \dim_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^2\right) = 2\,, \quad \dim_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^3\right) = 3\,,$$
$$\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}\right) = 1\,.$$

Aufgabe 32
Bestimmen Sie alle Untervektorräume von $\mathbb{C}$, wobei Sie $\mathbb{C}$ einmal als $\mathbb{C}$- und einmal als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen (die Skalarmultiplikation ist einfach die bekannte Multiplikation von Zahlen).

(ii) BASISERGÄNZUNG. Bei Basisergänzungen im endlich-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{K}^m$ nützt man häufig Standardbasisvektoren; beispielsweise gilt

$$V = \mathbb{Q}^3\,, \quad w_1 = (1,1,1)^T \in \mathbb{Q}^3\,, \quad w_2 = (2,-1,1)^T \in \mathbb{Q}^3\,,$$
$$e_1 = (1,0,0)^T \in \mathbb{Q}^3\,, \quad (w_1, w_2, e_1) \text{ Basis}\,.$$

(iii) Polynome. An früherer Stelle wurde für den $\mathbb{K}$-Vektorraum aller Polynome mit maximalem Grad $d \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ eine $\mathbb{K}$-Basis angegeben

$$\mathbb{K}_{\leq d}[t] := \left\{c_0 + c_1\, t + \cdots + c_d\, t^d : c_0, \ldots, c_d \in \mathbb{K}\right\}, \quad \left(1, t, t^2, \ldots, t^d\right);$$

folglich gilt

$$\dim_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{K}[t]_{\leq d}\right) = d + 1\,.$$

Weitere Beispiele für Basen sind

$$d = 2: \quad \left(1 + t, 1 - t, t^2\right), \quad \left(1, t - 1, (t - 1)^2\right), \quad \left(1, t - 1, (t - 1)\,(t - 2)\right). \qquad \triangle$$

Vgl. Maple (zusätzliche Rechnungen).

Überprüfung der Überlegungen zu Satz 3.1.15

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
```

Definition der zugehörigen Matrix

Überprüfung des Zusammenhanges A lambda = lambda1 v1 + lambda2 v2 + lambda3 v3

```
> lambda := ⟨lambda1, lambda2, lambda3⟩;
```

$$\lambda := \begin{bmatrix} \lambda 1 \\ \lambda 2 \\ \lambda 3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

```
> e1 := ⟨1, 0, 0⟩;
  e2 := ⟨0, 1, 0⟩;
  e3 := ⟨0, 0, 1⟩;
  AStandardbasis := ⟨e1|e2|e3⟩;
  AStandardbasis . lambda = lambda1·e1 + lambda2·e2 + lambda3·e3;
```

$$e1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$AStandardbasis := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda 1 \\ \lambda 2 \\ \lambda 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda 1 \\ \lambda 2 \\ \lambda 3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

```
> v1 := ⟨1, 1, 1⟩;
  v2 := ⟨1, -1, 1⟩;
  v3 := ⟨1, -1, -1⟩;
  AAllgemein := ⟨v1|v2|v3⟩;
  AAllgemein . lambda = lambda1·v1 + lambda2·v2 + lambda3·v3;
```

$$v1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v3 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$AAllgemein := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda 1 + \lambda 2 + \lambda 3 \\ \lambda 1 - \lambda 2 - \lambda 3 \\ \lambda 1 + \lambda 2 - \lambda 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda 1 + \lambda 2 + \lambda 3 \\ \lambda 1 - \lambda 2 - \lambda 3 \\ \lambda 1 + \lambda 2 - \lambda 3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Überprüfung der linearen Unabhängigkeit

Zugehöriges homogenes lineares Gleichungssystem hat Nulllösung als einzige Lösung

```
> LinearSolve(AStandardbasis, ⟨0, 0, 0⟩ );
  LinearSolve(AAllgemein, ⟨0, 0, 0⟩ );
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Eindeutige Darstellung eines Vektors als Linearkombination

```
> v := ⟨a, b, c⟩;
  LinearSolve(AStandardbasis, v);
  LinearSolve(AAllgemein, v);
```

$$v := \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{b}{2} + \frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} + \frac{c}{2} \\ \frac{a}{2} - \frac{c}{2} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(5)}$$

Maximale lineare Unabhängigkeit

```
> BStandardbasis := ⟨e1|e2|e3|v⟩;
  LinearSolve(BStandardbasis, ⟨0, 0, 0⟩);
  LinearSolve(AStandardbasis, v);
  BAllgemein := ⟨v1|v2|v3|v⟩;
  LinearSolve(BAllgemein, ⟨0, 0, 0⟩);
  LinearSolve(AAllgemein, v);
```

$$BStandardbasis := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -a\,\_t3_4 \\ -b\,\_t3_4 \\ -c\,\_t3_4 \\ \_t3_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$BAllgemein := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & -1 & b \\ 1 & 1 & -1 & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\, a\, \_t5_4 - \frac{1}{2}\, b\, \_t5_4 \\ \frac{(b-c)\, \_t5_4}{2} \\ -\frac{(a-c)\, \_t5_4}{2} \\ \_t5_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{b}{2} + \frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} + \frac{c}{2} \\ \frac{a}{2} - \frac{c}{2} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(6)}$$

Minimales Erzeugendensystem

```
> lambda1·e1 + lambda2·e2 = e3;
  C := ⟨e1|e2⟩;
  C . ⟨lambda1, lambda2⟩ = e3;
  LinearSolve(C, e3)
```

$$\begin{bmatrix} \lambda 1 \\ \lambda 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda 1 \\ \lambda 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
Error, (in LinearAlgebra:-LinearSolve) inconsistent system
```

Überlegungen zu Satz 3.1.18

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
  # Erzeugendensystem, linear abhängig
  v1 := ⟨1, 1, 1⟩;
  v2 := ⟨2, 2, 2⟩;
  v3 := ⟨1,-1, 1⟩;
  v4 := ⟨1,-1,-1⟩;
  LinearSolve(⟨v1|v2|v3|v4⟩, ⟨a, b, c⟩);
```

 # Vektor verschieden vom Nullvektor, somit linear unabhängig
$w1 := \langle 2, -2, 2 \rangle;$

$$v1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$v3 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v4 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2\,\_t_2 + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} \\ \_t_2 \\ -\frac{b}{2} + \frac{c}{2} \\ \frac{a}{2} - \frac{c}{2} \end{bmatrix}$$

$$w1 := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(7)}$$

\> *# Ausgangsvektor, Erzeugendensystem NICHT gegeben (Widerspruch)*
$A := \langle w1 \rangle;$
$LinearSolve(A, \langle 0, 0, 0 \rangle);$
$LinearSolve(A, \langle a, b, c \rangle);$

 # Ergänzung, Lineare Unabhängigkeit gegeben (nur Nulllösung), Erzeugendensystem NICHT gegeben
$A := \langle w1 | v1 \rangle;$
$LinearSolve(A, \langle 0, 0, 0 \rangle);$
$LinearSolve(A, \langle a, b, c \rangle);$

 # Ergänzung, Lineare Unabhängigkeit NICHT gegeben
$A := \langle w1 | v1 | v2 \rangle;$
$LinearSolve(A, \langle 0, 0, 0 \rangle);$
 # LinearSolve$(A, \langle a, b, c \rangle);$

```
# Ergänzung, Lineare Unabhängigkeit NICHT gegeben
A := ⟨w1|v1|v3⟩;
LinearSolve(A, ⟨0, 0, 0⟩ );
# LinearSolve(A, ⟨a, b, c⟩ );

# Ergänzung, Lineare Unabhängigkeit gegeben, Erzeugendensystem gegeben
A := ⟨w1|v1|v4⟩;
LinearSolve(A, ⟨0, 0, 0⟩ );
LinearSolve(A, ⟨a, b, c⟩ );
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Error, (in LinearAlgebra:-LinearSolve) inconsistent system

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Error, (in LinearAlgebra:-LinearSolve) inconsistent system

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2\,\_t4_3 \\ \_t4_3 \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \_t5_1 \\ 0 \\ -2\,\_t5_1 \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{b}{4} + \frac{c}{4} \\ \frac{b}{2} + \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} - \frac{c}{2} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Basisergänzung (Beispiel 3.1.20)

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
  w1 := <1, 1, 1>;
  w2 := <2,-1, 1>;
  e1 := <1, 0, 0>;
  A := <w1|w2|e1>;
  LinearSolve(A, <0, 0, 0>);
```

$$w1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w2 := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Proposition 3.1.21. Um für den m-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{K}^m$ zu überprüfen, dass Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{K}^m$ eine $\mathbb{K}$-Basis bilden, reicht es aus, zu zeigen, dass die zugehörige Matrix (Vektoren als Spalteneinträge)

$$\left(v_1\middle|\ldots\middle|v_m\right) \in \mathbb{K}^{m\times m}$$

invertierbar ist.

Siehe Überlegungen zu Satz 3.1.15 für Spezialfall $\mathbb{R}^3$. Mittels Transformation auf Zeilenstufenform erkennt man die Invertierbarkeit einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times m}$ oder gleichbedeutend ob $L(A,0) = \{0\}$. Nachweis im Rahmen des Proseminares.

Zusammenfassung von Überlegungen zu linearen Gleichungssystemen.

Konstruktion 3.1.22. Wie üblich bezeichnet (A, b) mit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$ die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystemes.

(i) Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystemes ist ein Untervektorraum des zugrundeliegenden Vektorraumes $\mathbb{K}^n$; eine vollständige Beschreibung der Lösungsmenge entspricht der Angabe einer Basis. Somit gilt eine Darstellung der Form

$$L(A, 0) = \left\{ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i\, v_i : \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{K} \right\} \subseteq \mathbb{K}^n\,,$$

wobei die Spalten $v_1, \ldots, v_s \in \mathbb{K}^n$ den Basisvektoren und die Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{K}$ den freien Parametern entsprechen. Mittels Transformation der Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform erkennt man den Zusammenhang

$$\begin{aligned} n &= \text{Anzahl der Spalten (Unbekannten)} \\ &= \text{Anzahl der Stufen (Pivots)} + \text{Anzahl der freien Parameter} = r + s\,; \end{aligned}$$

die Dimension des homogenen Lösungsraumes ist somit

$$\dim_{\mathbb{K}} \big(L(A, 0)\big) = \text{Anzahl der Spalten} - \text{Anzahl der Stufen} = n - r\,;$$

Basisvektoren bestimmt man beispielsweise dadurch, dass man den Gauß-Algorithmus durchführt und dann jeweils einen Skalar auf Eins und alle anderen Skalare auf Null setzt. Man beachte, dass die Dimension unabhängig von der gewählten Basis ist, und deshalb auch nicht von der konkreten Durchführung des Gauß-Algorithmus abhängt.

(ii) Die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystemes ist ein affiner Unterraum des zugrundeliegenden Vektorraumes; eine vollständige Beschreibung der Lösungsmenge beruht auf der Angabe einer partikulären Lösung und einer Basis des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystemes

$$\overline{c} \in \mathbb{K}^n \,, \quad A\,\overline{c} = b \,, \quad L(A,b) = \left\{ \overline{c} + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i\, v_i : \lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{K} \right\} \subseteq \mathbb{K}^n \,.$$

Man beachte, dass bei linearen Gleichungssystemen endlich viele Daten $\overline{c}$ und $v_1, \dots, v_s$ zur vollständigen Beschreibung einer möglicherweise unendlichen Lösungsmenge ausreichen. △

Beispiel 2.1.9. Erweiterte Koeffizientenmatrix mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ und $b \in \mathbb{R}^3$, Transformation auf Zeilenstufenform und Bestimmung der Lösungsmenge (adaptierte Notation: x_3, x_4 statt λ_1, λ_2, nun Spaltenschreibweise statt Zeilenschreibweise)

$$(A,b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & -2 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$L(A,b) = \left\{ \left(x_3 + 2\,x_4 + \tfrac{1}{2}, -2\,x_3 - 3\,x_4 - \tfrac{3}{4}, x_3, x_4\right)^T : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ablesen von Dimensionen, partikulärer Lösung und Basisvektoren durch Vergleich mit allgemeiner Darstellung

$$L(A,b) = \left\{ \overline{c} + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i\, v_i : \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n \,,$$

$$n = \text{Anzahl Spalten} = 4\,, \quad r = \text{Anzahl Stufen (Pivots)} = 2\,,$$

$$\text{Anzahl freie Parameter} = s = n - r = 2\,,$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_3 + 2\,\lambda_4 + \frac{1}{2} \\ -\,2\,\lambda_3 - 3\,\lambda_4 - \frac{3}{4} \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\overline{c}} + \lambda_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -\,2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1} + \lambda_4 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_2} .$$

Proposition 3.1.23 (★). Siehe Vertiefungsteil der Vorlesung.

Bemerkung 3.1.24 (★). Siehe Vertiefungsteil der Vorlesung.

Satz 3.1.25 (Dimensionsformel für Untervektorräume ★). Vgl. zuvor angegebene Beispiele und Vertiefungsteil der Vorlesung.

Beispiel 3.1.26 (★). Siehe Vertiefungsteil der Vorlesung.

(Vorlesung 25. November)

Proseminaraufgaben im Kontext *(Unter-)Vektorraum, Lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensystem, Basis, Dimension.*

Aufgabe 33

Bestimmen Sie für die folgende Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{3,5}(\mathbb{Q})$ eine Basis des Lösungsraums $L(A,0) \subseteq \mathbb{Q}^5$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -7 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 34

Bestimmen Sie für die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^4$ jeweils eine Basis und die Dimension:

(i) $U_1 = \big\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \mid a_3 = 0\big\}$
(ii) $U_2 = \big\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \mid a_2 = a_1 - a_3 + a_4\big\}$
(iii) $U_1 \cap U_2$
(iv) $U_1 + U_2$.

Aufgabe 35

Sei W ein K-Vektorraum und $w_1, \ldots w_n \in W$ linear unabhängig. Zeigen Sie, dass für $w \in W \setminus \mathrm{Span}_K(\{w_1, \ldots, w_n\})$ auch

$$w_1, \ldots, w_n, w$$

linear unabhängig sind.

Aufgabe 36

Sei $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\cos(x), \cos(2x), \ldots, \cos(nx)$$

als Elemente von V $\mathbb{R}$-linear unabhängig sind.

Siehe Skriptum.

3.2 Lineare Abbildungen

3.2.1 Grundbegriffe

Definition 3.2.1 (Lineare Abbildung, Isomorphismus).

Bemerkungen, Beispiele 3.2.2.

Lemma 3.2.3.

Bemerkung 3.2.4.

Satz 3.2.5.

Bemerkung 3.2.6.

Definition 3.2.7 (Koordinatenvektor).

Beispiel 3.2.8.

Zusammenfassung wichtiger Definitionen und Resultate.

(i) **Lineare Abbildung.** Eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W erfüllt die Bedingung (Additivität für $\lambda_1 = 1 = \lambda_2$, Homogenität für $\lambda_2 = 0$)

$$\varphi : V \longrightarrow W\,,$$
$$\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \quad \forall\, v_1, v_2 \in V: \quad \varphi(\lambda_1\, v_1 + \lambda_2\, v_2) = \lambda_1\, \varphi(v_1) + \lambda_2\, \varphi(v_2)\,.$$

(ii) **Matrizen.** Eine $(m{\times}n)$-Matrix mit Koeffizienten in einem Körper $\mathbb{K}$ definiert eine lineare Abbildung zwischen $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$

$$A \in \mathbb{K}^{m\times n}\,, \qquad \mu_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m : c \longmapsto \underbrace{A}_{m\times n}\,\underbrace{c}_{n\times 1}\,,$$

denn es gilt (Additivität für $\lambda_1 = 1 = \lambda_2$, Homogenität für $\lambda_2 = 0$)

$$\begin{aligned}\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \quad \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{K}^n: \quad \mu_A(\lambda_1\, c_1 + \lambda_2\, c_2) &= A\,(\lambda_1\, c_1 + \lambda_2\, c_2) = \lambda_1\, A\, c_1 + \lambda_2\, A\, c_2 \\ &= \lambda_1\, \mu_A(c_1) + \lambda_2\, \mu_A(c_2)\,.\end{aligned}$$

(iii) **Komposition und Matrixmultiplikation.** Die Komposition zweier durch Matrizen definierter linearer Abbildungen ist durch das Produkt der zugehörigen Matrizen gegeben (Voraussetzung: Anzahl der Spalten von B gleich der Anzahl der Zeilen von A)

$$A \in \mathbb{K}^{m\times n}\,, \qquad B \in \mathbb{K}^{r\times m}\,,$$
$$\mu_B \circ \mu_A : \mathbb{K}^n \xrightarrow{\mu_A} \mathbb{K}^m \xrightarrow{\mu_B} \mathbb{K}^r : c \longmapsto A\, c \longmapsto \underbrace{B}_{r\times m}\,\underbrace{A}_{m\times n}\,\underbrace{c}_{n\times 1}\,.$$

(iv) Isomorphismus. Eine bijektive lineare Abbildung nennt man einen Isomorphismus.

(v) Invertierbare Matrizen und Isomorphismen. Eine durch eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ definierte lineare Abbildung ist genau dann bijektiv und somit ein Isomorphismus, wenn die Dimensionen von Definitions- und Bildmenge übereinstimmen und die zugehörige Matrix invertierbar ist

$$\mu_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m : c \longmapsto A\,c \text{ Isomorphismus} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m = n\,, \\ A \in \mathbb{K}^{m\times m} \text{ invertierbar}\,. \end{cases}$$

(vi) Vektoren und Koordinatenvektoren. Wählt man für einen m-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V eine $\mathbb{K}$-Basis $(v_1, \dots, v_m)$, so wird durch die Zuordnung

$$\begin{array}{ccc} \text{Vektor} & \longleftrightarrow & \text{Koordinatenvektor} \\ v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, v_i \in V & \longleftrightarrow & (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T \in \mathbb{K}^m \end{array}$$

eine bijektive lineare Abbildung definiert; dies impliziert, dass jeder m-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorraum isomorph zum Vektorraum $\mathbb{K}^m$ ist.

Vereinfachte Überlegungen und Veranschaulichungen! Dieser Isomorphismus rechtfertigt Überlegungen für die anschaulicheren Vektorräume $\mathbb{K}^m$ für $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ (anstelle allgemeiner Vektorräume) sowie für durch Matrizen definierte lineare Abbildungen (anstelle von linearen Abbildungen zwischen allgemeinen Vektorräumen). Vergleiche Vorbemerkung und Satz 3.2.5.

(vii) ISOMORPHISMEN UND INVERTIERBARE MATRIZEN. Aus den Überlegungen in (vi) folgt, dass die Dimensionen von zwei endlich-dimensionalen isomorphen $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W übereinstimmen; durch die Wahl von Basen und die Bestimmung der Koordinatenvektoren von Vektoren $v \in V$ und $w \in W$ ergibt sich eine durch eine invertierbare Matrix definierte lineare Abbildung

$$\begin{gathered}
\text{Basis} \;\; (v_1, \dots, v_m) \;\; \text{von} \;\; V\,, \quad \text{Basis} \;\; (w_1, \dots, w_m) \;\; \text{von} \;\; W\,, \\
v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, v_i \in V\,, \quad w = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \, w_i \in W\,, \\
\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T \in \mathbb{K}^m \quad \longleftrightarrow \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)^T \in \mathbb{K}^m\,, \\
A \in \mathbb{K}^{m \times m} \text{ invertierbar}\,, \quad \mu = A\,\lambda\,, \quad \lambda = A^{-1}\,\mu\,.
\end{gathered}$$

(viii) BASISWECHSEL. Beim Übergang von einer Basis zu einer anderen Basis spricht man von einem Basiswechsel oder auch von einer linearen Koordinatentransformation

$$\begin{gathered}
\text{Basis} \;\; (v_1, \dots, v_m) \;\; \text{von} \;\; V\,, \quad \text{Basis} \;\; (w_1, \dots, w_m) \;\; \text{von} \;\; V\,, \\
\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, v_i = v = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \, w_i \in V\,, \\
\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T \in \mathbb{K}^m \quad \longleftrightarrow \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)^T \in \mathbb{K}^m\,, \\
A \in \mathbb{K}^{m \times m} \text{ invertierbar}\,, \quad \mu = A\,\lambda\,, \quad \lambda = A^{-1}\,\mu\,.
\end{gathered}$$

(ix) BEISPIEL. Betrachtet man wie zuvor den Euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ einerseits mit der Standardbasis und andererseits mit einer allgemeinen Basis

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}\,, \quad V = \mathbb{R}^3\,,$$

$$\text{Standardbasis } (e_1, e_2, e_3): \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{allgemeine Basis } (v_1, v_2, v_3): \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

so sind für einen Vektor

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

folgende Darstellungen als Linearkombinationen gültig (Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen, Lösungen wurden an früherer Stelle berechnet)

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, e_i = v = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \, v_i \in \mathbb{R}^3\,,$$

$$a\, e_1 + b\, e_2 + c\, e_3 = v = \tfrac{a+b}{2}\, v_1 + \tfrac{c-b}{2}\, v_2 + \tfrac{a-c}{2}\, v_3\,.$$

Der Vektor wurde in *kartesischen Koordinaten*, d.h. bezüglich der in Richtung der Koordinatenachsen zeigenden Standardbasisvektoren, angegeben; somit stimmen der Vektor und der Koordinatenvektor bezüglich der Standardbasis überein.

Der Übergang auf den Koordinatenvektor bezüglich der allgemeinen Basis entspricht einer linearen Koordinatentransformation

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \lambda = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto \mu = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} a+b \\ c-b \\ a-c \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} ;$$

da diese Abbildung durch die Multiplikation mit einer Matrix gegeben ist, ist sie offensichtlich linear. Man stellt außerdem fest, dass der Basiswechsel durch die Bilder der Standardbasisvektoren festgelegt ist und diese die Spalten der definierenden Matrix wiedergeben

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ;$$

für einen allgemeinen Vektor bestätigt dies die Gleichheit

$$v = a\, e_1 + b\, e_2 + c\, e_3 \in \mathbb{R}^3 , \quad \varphi(v) = a\, \varphi(e_1) + b\, \varphi(e_2) + c\, \varphi(e_3) .$$

Dieses Resultat gilt in einem allgemeineren Kontext. △

Der Übergang von kartesischen Koordinaten auf Polarkoordinaten führt auf eine *nichtlineare* Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\, \cos(\vartheta) \\ r\, \sin(\vartheta) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \end{pmatrix} ,$$

vgl. Komplexe Zahlen und Zylinderkoordinaten oder Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$.

(Man merke sich: *Eine lineare Abbildung ist durch die Bilder einer Basis in eindeutiger Art und Weise festgelegt.* Wesentlich ist die Wahl einer Basis der Definitionsmenge, die Bilder können beliebig gewählt werden.)

Satz 3.2.9. Es bezeichne V einen $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(v_1, \ldots, v_m)$ eine $\mathbb{K}$-Basis von V. Eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung zwischen V und einem $\mathbb{K}$-Vektorraum W ist durch die Vorgabe der Bilder der Basisvektoren eindeutig bestimmt

$$\varphi : V \longrightarrow W\,, \quad \varphi(v_1) = w_1 \in W\,, \quad \ldots, \quad \varphi(v_m) = w_m \in W\,;$$

da die Darstellung eines Vektors $v \in V$ als Linearkombination der Basisvektoren eindeutig ist, ist nämlich auch das zugehörige Bild festgelegt

$$\forall\, v \in V \quad \exists!\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}: \quad v = \lambda_1\, v_1 + \cdots + \lambda_m\, v_m\,,$$
$$\varphi(v) = \varphi\big(\lambda_1\, v_1 + \cdots + \lambda_m\, v_m\big) = \lambda_1\, \varphi(v_1) + \cdots + \lambda_m\, \varphi(v_m) = \lambda_1\, w_1 + \cdots + \lambda_m\, w_m\,.$$

Beweis. Im Gegensatz zum Skriptum wurde die lineare Abbildung im Satz angegeben; ihre Existenz und Eindeutigkeit sind offensichtlich. $\diamond$

Im Spezialfall $V = \mathbb{K}^m$ mit Basisvektoren $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{K}^m$ und (beliebigen) Bildvektoren in $W = \mathbb{K}^n$ kann man die auftretenden Linearkombinationen als Matrix-Vektor-Multiplikationen schreiben

$$\begin{gathered}
\varphi : V \longrightarrow W\,, \quad \varphi(v_1) = w_1 \in \mathbb{K}^n\,, \quad \dots, \quad \varphi(v_m) = w_m \in \mathbb{K}^n\,, \\
A_v = \big(v_1\big|\dots\big|v_m\big) \in \mathbb{K}^{m\times m}\,, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m\,, \quad A_w = \big(w_1\big|\dots\big|w_m\big) \in \mathbb{K}^{n\times m}\,, \\
v = \lambda_1\, v_1 + \cdots + \lambda_m\, v_m = A_v\, \lambda \in \mathbb{K}^m\,, \quad \varphi(v) = \lambda_1\, w_1 + \cdots + \lambda_m\, w_m = A_w\, \lambda \in \mathbb{K}^n\,.
\end{gathered}$$

Vorsicht! Im Fall allgemeinerer Vektorräume wie beispielsweise endlich-dimensionalen Polynomräumen oder Funktionenräumen umfassen A_v und A_w keine Zahlen sondern Polynome oder Funktionen, d.h. die Matrixschreibweise

$$\begin{gathered}
\varphi : V \longrightarrow W\,, \\
v_1 \in V\,, \quad \dots, \quad v_m \in V\,, \quad \varphi(v_1) = w_1 \in W\,, \quad \dots, \quad \varphi(v_m) = w_m \in W\,, \\
A_v = \big(v_1\big|\dots\big|v_m\big)\,, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m\,, \quad A_w = \big(w_1\big|\dots\big|w_m\big)\,, \\
v = \lambda_1\, v_1 + \cdots + \lambda_m\, v_m = A\, \lambda \in V\,, \quad \varphi(v) = \lambda_1\, w_1 + \cdots + \lambda_m\, w_m = A_w\, \lambda \in W\,,
\end{gathered}$$

ist als symbolische Kurzschreibweise zu verstehen, vgl. Beweis von Satz 3.2.9 im Skriptum.

Im Spezialfall der Standardbasis erhält man (Umbenennung von A_w zu A wie im Skriptum)

$$\varphi : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n \,,$$
$$e_1 \in \mathbb{K}^m \,, \quad \ldots, \quad e_m \in \mathbb{K}^m \,, \quad I = \big(e_1\big|\ldots\big|e_m\big) \in \mathbb{K}^{m\times m} \,, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{K}^m \,,$$
$$v = \lambda_1\, e_1 + \cdots + \lambda_m\, e_m = \lambda \in \mathbb{K}^m \,,$$
$$\varphi(e_1) = w_1 \in \mathbb{K}^n \,, \quad \ldots, \quad \varphi(e_m) = w_m \in \mathbb{K}^n \,, \quad A = \big(w_1\big|\ldots\big|w_m\big) \in \mathbb{K}^{n\times m} \,,$$
$$\varphi(v) = \lambda_1\, w_1 + \cdots + \lambda_m\, w_m = A\,\lambda \,.$$

Dies zeigt das nächste Resultat; es sei daran erinnert, dass

$$\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n\big)$$

den Vektorraum aller linearen Abbildungen zwischen $\mathbb{K}^m$ und $\mathbb{K}^n$, versehen mit der punktweisen bzw. komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation, bezeichnet.

Korollar 3.2.10. Für jede $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ gibt es eine eindeutig bestimmte Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, sodass folgende Gleichheit gilt

$$\varphi = \mu_A : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n : \lambda \longrightarrow A\,\lambda \,.$$

Mit anderen Worten, die Zuordnung (Bezeichnung μ im Skriptum)

$$\mathbb{K}^{n\times m} \longrightarrow \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n\big) : A \longmapsto \big[\mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n : \lambda \longrightarrow A\,\lambda\big]$$

ist ein Isormorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen.

Beweis. Obige Übelegungen basierend auf Satz 3.2.9. Bemerkung 3.2.4 (ii) zeigt Linearität. $\diamond$

Beispiel 3.2.11. (i) Für die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a - 2\,c \\ a + b \end{pmatrix}$$

ist es offensichtlich, dass sie durch die Multiplikation mit einer Matrix gegeben und somit linear ist

$$\begin{pmatrix} a - 2\,c \\ a + b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} , \quad \varphi(v) = A\,v\,;$$

die Spalten der Matrix entsprechen den Bildern der Standardbasisvektoren und bestimmen die lineare Abbildung vollständig

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A_{-1}\,, \quad \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A_{-2}\,, \quad \varphi(e_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = A_{-3}\,.$$

(ii) Zu grundlegenden Bewegungen in der Ebene zählen Drehungen; bei Fixierung des Ursprunges führt die Drehung gegen den Uhrzeigersinn um einen Winkel $\vartheta \in [0, 2\pi)$ auf eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : v \longmapsto \text{Drehung von } v \text{ um Winkel } \vartheta\,.$$

Um die zugehörige *Drehmatrix* zu bestimmen, reicht es also aus, die Bilder der Basisvektoren anzugeben

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad A = \big(\varphi(e_1)\big|\varphi(e_2)\big)\,;$$

bei einer Drehung um $45°$ erhält man beispielsweise

$$\vartheta = \tfrac{\pi}{4}\,, \quad \sin(\vartheta) = \cos(\vartheta) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7\,.$$

Die Überlegungen lassen sich auf den Raum, d.h. Drehungen um eine durch den Ursprung gehende Gerade (Achse), erweitern. △

3.2.2 Die Dimensionsformel

(Zu Beginn des Kapitels wurde erwähnt, dass eine *lineare* Abbildung zwischen zwei Vektorräumen eine *strukturerhaltende* Abbildung zwischen diesen Vektorräumen ist; man spricht auch davon, dass *lineare Abbildungen die Strukturen von (Unter-)vektorräumen erhalten*. Gemeint ist damit insbesondere, dass das Bild und der Kern einer linearen Abbildung auf Untervektorräume führt.)

Bild. Das Bild einer $\mathbb{K}$-linearen Abbildung zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen

$$\varphi : V \longrightarrow W\,, \quad \mathrm{Bild}(\varphi) := \big\{\varphi(v) : v \in V\big\} \subseteq W\,,$$

ist ein $\mathbb{K}$-Untervektorraum von W, d.h. sämtliche Linearkombinationen von zwei Bildvektoren $w_1, w_2 \in \mathrm{Bild}(\varphi)$ sind ebenfalls im Bild enthalten

$$\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \quad \forall\, w_1, w_2 \in \mathrm{Bild}(\varphi) : \quad \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in \mathrm{Bild}(\varphi)\,;$$

da Vektoren $v_1, v_2 \in V$ mit $w_1 = \varphi(v_1)$ und $w_2 = \varphi(v_2)$ existieren, folgt mittels der Linearität der Abbildung nämlich auch

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 \varphi(v_1) + \lambda_2 \varphi(v_2) = \varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \in \mathrm{Bild}(\varphi)\,.$$

(Ein weiterer relevanter Unterraum ist der Kern einer linearen Abbildung.)

Definition 3.2.12 (Kern)**.** Für eine lineare Abbildung zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W ist das Urbild des Nullvektors $0 \in W$ ein Untervektorraum und wird als Kern der Abbildung bezeichnet

$$\varphi : V \longrightarrow W\,, \quad \mathrm{Kern}(\varphi) := \varphi^{-1}\big(\{0\}\big) = \big\{v \in V : \varphi(v) = 0\big\} \subseteq V\,.$$

Kern. Ähnlich wie für das Bild, sind die Eigenschaften eines Untervektorraumes leicht nachzuprüfen. Da für Vektoren $v_1, v_2 \in \mathrm{Kern}(\varphi)$ die Gleichheiten $\varphi(v_1) = 0$ und $\varphi(v_2) = 0$ gelten, folgt mittels der Linearität der Abbildung auch

$$\varphi(\lambda_1\, v_1 + \lambda_2\, v_2) = \lambda_1\, \varphi(v_1) + \lambda_2\, \varphi(v_2) = 0$$

und damit die gewünschte Implikation

$$\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \quad \forall\, v_1, v_2 \in \mathrm{Kern}(\varphi) : \quad \lambda_1\, v_1 + \lambda_2\, v_2 \in \mathrm{Kern}(\varphi)\,.$$

(Für den Spezialfall $V = \mathbb{K}^m$ und $W = \mathbb{K}^n$ gilt folgender Zusammenhang mit homogenen linearen Gleichungssystemen; man verwendet, dass eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ durch die Multiplikation mit einer Matrix gegeben ist.)

Bemerkung 3.2.13. Für eine lineare Abbildung zwischen den $\mathbb{K}$-Vektorräumen $\mathbb{K}^m$ und $\mathbb{K}^n$ stimmt der Kern der Abbildung mit der Lösungsmenge des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystemes überein

$$A \in \mathbb{K}^{m\times n}, \quad \varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m : \lambda \longmapsto A\,\lambda\,,$$
$$\mathrm{Kern}(\varphi) = \big\{c \in \mathbb{K}^n : A\,c = 0\big\} = L(A, 0) \subseteq \mathbb{K}^n\,.$$

Lemma 3.2.14. Es bezeichne $\varphi : V \to W$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen.

(i) Das Bild und der Kern der linearen Abbildung sind Untervektorräume.

Die Untervektorraumeigenschaften wurden zuvor gezeigt. Man beachte, dass für eine lineare Abbildung der Nullvektor $0 \in V$ auf den Nullvektor $0 \in W$ abgebildet wird

$$\varphi(0) = 0 \in W\,;$$

der Nullvektor $0 \in V$ ist also immer ein Element des Kernes

$$0 \in \mathrm{Kern}(\varphi) \subseteq \mathrm{V}$$

und der Nullvektor $0 \in W$ ist immer ein Element des Bildes

$$0 \in \mathrm{Bild}(\varphi) \subseteq \mathrm{W}\,.$$

(ii) Die lineare Abbildung ist genau dann injektiv, wenn die folgende Gleichheit gilt

$$\mathrm{Kern}(\varphi) = \{0\} \subseteq \mathrm{V}\,.$$

(a) *Nachweis der Implikation*

$$\varphi \text{ injektiv} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Kern}(\varphi) = \{0\}\,.$$

Mit Hilfe der Charakterisierung

$$\varphi \text{ injektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, v_1, v_2 \in V \text{ mit } v_1 \neq v_2 : \quad \varphi(v_1) \neq \varphi(v_2)$$

sieht man, dass ein vom Nullvektor verschiedener Vektor nicht auf den Nullvektor abgebildet werden kann

$$\varphi \text{ injektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, v \in V \text{ mit } v \neq 0 : \quad \varphi(v) \neq \varphi(0) = 0\,,$$

und daher der Kern nur den Nullvektor umfasst.

(b) *Nachweis der Implikation*

$$\mathrm{Kern}(\varphi) = \{0\} \quad \Longrightarrow \quad \varphi \text{ injektiv}\,.$$

Mit Hilfe der Charakterisierung

$$\varphi \text{ injektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, v_1, v_2 \in V \text{ mit } \varphi(v_1) = \varphi(v_2): \quad v_1 = v_2$$

und der Linearität der Abbildung folgert man

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) = \varphi(v_2) \quad &\Longrightarrow \quad \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi(v_1 - v_2) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad v_1 - v_2 \in \mathrm{Kern}(\varphi)\,; \end{aligned}$$

da der Kern nur den Nullvektor umfasst, zeigt dies $v_1 - v_2 = 0$ und somit $v_1 = v_2$. $\diamond$

Beispiel 3.2.15. (i) Die lineare Abbildung

$$\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto a - b$$

ist surjektiv, weil man jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ als Bild der Vektors $(a, 0)$ erhält

$$\text{Bild}(\varphi_1) = \mathbb{R}\,;$$

das Bild der Abbildung ist ein eindimensionaler Vektorraum. Als Kern der Abbildung ergibt sich ein eindimensionaler Untervektorraum (Gerade durch Ursprung mit Steigung 1)

$$\text{Kern}(\varphi_1) = \left\{(a, b)^T \in \mathbb{R}^2 : a - b = 0\right\} = \left\{(a, a)^T : a \in \mathbb{R}\right\};$$

deshalb ist die Abbildung nicht injektiv.

(ii) Die lineare Abbildung

$$\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ist sowohl surjektiv als auch injektiv und damit bijektiv; mittels der Lösung linearer Gleichungssysteme oder aus der Invertierbarkeit der zugehörigen Matrix sieht man nämlich

$$\begin{aligned} \text{Bild}(\varphi_2) &= \big\{(a-b, a+b)^T \in \mathbb{R}^2 : a, b \in \mathbb{R}\big\} = \mathbb{R}^2\,, \\ \text{Kern}(\varphi_2) &= \big\{(a,b)^T \in \mathbb{R}^2 : a-b=0, a+b=0\big\} = \{0\}\,. \end{aligned}$$

Die Behauptung für das Bild entspricht der Lösbarkeit des zugehörigen inhomogenen linearen Gleichungssystemes für eine beliebige rechte Seite

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^2 : \quad L(A,v) \neq \emptyset\,.$$

Die Behauptung für den Kern entspricht der eindeutigen Lösbarkeit des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystemes

$$L(A,0) = \{0\}\,.$$

Satz 3.2.16 (Dimensionsformel für lineare Abbildungen)**.** Es bezeichne V einen endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum und W einen (zunächst beliebigen) $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ gilt

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}\left(\mathrm{Kern}(\varphi)\right) + \dim_{\mathbb{K}}\left(\mathrm{Bild}(\varphi)\right).$$

(Es wird gezeigt, dass W endlich-dimensional ist.)

Beweis.

(i) Für eine Familie von linear unabhängigen Vektoren $w_1, \dots, w_n \in \mathrm{Bild}(\varphi)$ wählt man Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ mit

$$\varphi(v_1) = w_1\,, \quad \dots, \quad \varphi(v_n) = w_n\,;$$

zusammen mit der Linearität der Abbildung impliziert dies die lineare Unabhängigkeit von $v_1, \dots, v_n \in V$, denn

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \varphi(v_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i\right) = \varphi(0) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, w_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0\,, \quad \dots, \quad \lambda_n = 0\,. \end{aligned}$$

(ii) Man beachte, dass V nach Voraussetzung endlich-dimensional ist. Wegen (i) muss deshalb auch W endlich-dimensional sein; weiters muss gelten

$$\dim_{\mathbb{K}}\left(\mathrm{Bild}(\varphi)\right) \leq \dim_{\mathbb{K}}(V) < \infty\,.$$

(iii) Die zuvor betrachteten Familien werden durch maximal linear unabhängige Familien ersetzt; die verwendeten Bezeichnungen werden beibehalten. Genauer, es wird angenommen, dass die Vektoren $(w_1, \dots, w_n)$ eine Basis des Bildes sind; wegen (i) sind die zugehörigen Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ mit

$$\varphi(v_1) = w_1 \,, \quad \dots, \quad \varphi(v_n) = w_n \,,$$

linear unabhängig und können durch eine Basis des Kernes $(u_1, \dots, u_m)$ ergänzt werden. Um zu zeigen, dass man durch

$$(v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m)$$

eine Basis von V erhält, sind die Eigenschaften Erzeugendensystem und lineare Unabhängigkeit oder äquivalent dazu die eindeutige Darstellung als Linearkombination nachzuweisen, siehe Satz 3.1.15. (Verwendung dieser Charakterisierung einer Basis verkürzt den Beweis, vgl. Skriptum.)

Für einen beliebigen Vektor $v \in V$ betrachtet man das zugehörige Bild $\varphi(v) \in \mathrm{Bild}(\varphi)$ und verwendet die Basiseigenschaft von $(w_1, \ldots, w_n)$, d.h. es gilt

$$\exists!\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}: \quad \varphi(v) = \lambda_1\, w_1 + \cdots + \lambda_n\, w_n\,;$$

mittels Linearität sieht man, dass die durch diese Skalare definierte Linearkombination

$$v - \lambda_1\, v_1 - \cdots - \lambda_n\, v_n$$

im Kern liegt und folglich als Linearkombination der Basis $(u_1, \ldots, u_m)$ dargestellt werden kann, denn

$$\varphi(v - \lambda_1\, v_1 - \cdots - \lambda_n\, v_n) = \varphi(v) - \Big(\lambda_1\, \underbrace{\varphi(v_1)}_{=w_1} + \cdots + \lambda_n\, \underbrace{\varphi(v_n)}_{=w_n}\Big) = \varphi(v) - \varphi(v) = 0\,,$$

$$v - \lambda_1\, v_1 - \cdots - \lambda_n\, v_n \in \mathrm{Kern}(\varphi)\,,$$

$$\exists!\, \mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{K}: \quad v - \lambda_1\, v_1 - \cdots - \lambda_n\, v_n = \mu_1\, u_1 + \cdots + \mu_m\, u_m\,.$$

Insgesamt zeigt dies

$$\forall\, v \in V \quad \exists!\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{K}:$$
$$v = \lambda_1\, v_1 + \cdots + \lambda_n\, v_n + \mu_1\, u_1 + \cdots + \mu_m\, u_m\,.$$

(iv) Als direkte Folgerung ergibt sich die Dimensionformel

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = m + n = \dim_{\mathbb{K}}\big(\mathrm{Kern}(\varphi)\big) + \dim_{\mathbb{K}}\big(\mathrm{Bild}(\varphi)\big)\,. \qquad \diamond$$