universität
innsbruck
Institut für Mathematik

Lineare Algebra I

Zusätzliche Bemerkungen Implementierungen mittels Maple

Tim Netzer, Mechthild Thalhammer

Wintersemester 2019/20

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 4

Die Determinante

INHALT. In diesem Kapitel wird der grundlegende Begriff der Determinante behandelt und dafür die Signatur von Permutationen definiert.

(Im Skriptum wird ein etwas anderer Zugang gewählt: die Determinante wird nicht als Abbildung sondern mittels der Leibnitz-Formel für quadratische Matrizen eingeführt.)
Determinante. Die Determinante wird üblicherweise als eine alternierende, multilineare und bezüglich der Standardbasis normierte Abbildung (siehe Bestimmung der Determinante in den Spezialfällen $m = 2$ und $m = 3$)

$$\det : (\mathbb{K}^m)^m \longrightarrow \mathbb{K} : (v_1, \dots, v_m) \longmapsto \det(v_1, \dots, v_m)$$

eingeführt; falls der Wert der Determinante verschieden von Null ist, sind Vektoren linear unabhängig und bilden damit eine Basis

$$\det(v_1, \dots, v_m) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (v_1, \dots, v_m) \ \text{Basis von} \ \mathbb{K}^m \,.$$

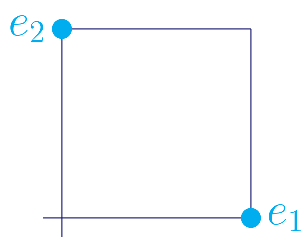
Fasst man die auftretenden Vektoren als Spalten oder Zeilen einer Matrix auf, so charakterisiert die Determinante also auch die Invertierbarkeit dieser quadratischen Matrix

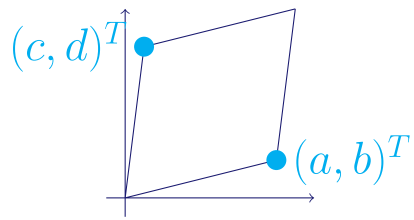
$$A = \big(v_1\big| \dots \big|v_m\big) \in \mathbb{K}^{m \times m}, \quad \det(A) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A \ \text{invertierbar}\,.$$

Im Spezialfall der Ebene und des Raumes entspricht der Absolutbetrag der Determinante dem Flächeninhalt von Parallelogrammen und Parallelepipeden; die Determinante tritt deshalb im Zusammenhang mit Integraltransformationen für Funktionen in zwei oder drei Variablen auf, insbesondere bei linearen oder nichtlinearen Koordinatentransformationen der Ebene und des Raumes.
(In der Quantenmechanik tritt die *Slater-Determinante* bei der Beschreibung von (hochdimensionalen) Systemen von Fermionen auf.)

Spezialfall ($m = 2$). Im Spezialfall der Ebene geht man von der Fläche des Einheitsquadrates aus und berechnet die Determinante von zwei beliebigen Vektoren mit Hilfe der Eigenschaften *linear in jeder Komponente* und *alternierend*

$$m = 2\,, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}\,,$$
$$\det : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad \det(e_1, e_2) = 1\,,$$
$$\det(e_2, e_1) = -\det(e_1, e_2) = -1\,,$$
$$\begin{cases} \det(e_1, e_1) = -\det(e_1, e_1)\,, \\ \det(e_2, e_2) = -\det(e_2, e_2)\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \det(e_1, e_1) = 0 = \det(e_2, e_2)\,,$$
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\,e_1 + b\,e_2 \in \mathbb{R}^2\,, \quad \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = c\,e_1 + d\,e_2 \in \mathbb{R}^2\,,$$
$$\det\left(a\,e_1 + b\,e_2, c\,e_1 + d\,e_2\right) = a\,\det\left(e_1, c\,e_1 + d\,e_2\right) + b\,\det\left(e_2, c\,e_1 + d\,e_2\right)$$
$$= a\,c\,\underbrace{\det(e_1, e_1)}_{=0} + a\,d\,\underbrace{\det(e_1, e_2)}_{=1} + b\,c\,\underbrace{\det(e_2, e_1)}_{=-1} + b\,d\,\underbrace{\det(e_2, e_2)}_{=0} = a\,d - b\,c\,.$$





Für zugehörige Matrizen erhält man somit

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\,, \quad \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = a\,d - b\,c\,.$$

Allgemeiner Fall. Für eine allgemeine quadratische Matrix erhält man mit dem obigen Zugang die sogenannte Leibnitz-Formel, welche im Skriptum zur Definition der Determinante gewählt wird

$$A = \big(A_{ij}\big)_{i,j\in\{1,\dots,m\}} \in \mathbb{K}^{m\times m}\,, \quad \det(A) = \sum_{\sigma\in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma)\, A_{\sigma(1)1}\cdots A_{\sigma(m)m} \in \mathbb{K}\,.$$

Die auftretende Signatur $\operatorname{sgn}(\sigma)$ einer Permutation $\sigma \in S_m$ wird im Folgenden eingeführt.

Spezialfall $(m = 2)$. Im zuvor betrachteten Spezialfall bestätigt eine kurze Rechnung die behauptete Gleichheit (wobei $a = A_{11}, b = A_{21}, c = A_{12}, d = A_{22}$)

$$\begin{gathered}
m = 2\,, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}\,,\\
S_2 = \big\{\sigma : \{1,2\} \to \{1,2\} \text{ bijektiv}\big\} = \big\{\sigma_1, \sigma_2\big\}\,,\\
\sigma_1 : \{1,2\} \to \{1,2\} : \begin{cases} 1 \mapsto 1\,,\\ 2 \mapsto 2\,, \end{cases} \qquad \sigma_2 : \{1,2\} \to \{1,2\} : \begin{cases} 1 \mapsto 2\,,\\ 2 \mapsto 1\,, \end{cases}\\
\operatorname{sgn}(\sigma_1) = 1\,, \quad \operatorname{sgn}(\sigma_2) = -1\,,\\
\det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma\in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma)\, A_{\sigma(1)1}\, A_{\sigma(2)2} = A_{11}\, A_{22} - A_{21}\, A_{12} \in \mathbb{R}\,.
\end{gathered}$$

4.1 Permutationen

PERMUTATIONEN. Betrachtet man die Menge aller bijektiven Selbstabbildungen einer Menge M mit der Komposition als Verknüpfung

$$S(M) := \{f : M \to M \ \text{bijektiv}\}, \quad \circ : S(M) \times S(M) \longrightarrow S(M),$$

so erhält man eine (für $|M| \geq 3$ *nicht* kommutative) Gruppe, welche als Permutationsgruppe oder Symmetriegruppe von M bezeichnet wird, vgl. Beispiel 2.2.2. In Hinblick auf die Einführung der Determinante reicht es aus, Permutationen der endlichen Mengen

$$M = \{1, \dots, m\}, \quad |M| = m, \quad m \in \mathbb{N}_{\geq 1},$$

zu untersuchen; es ist zweckmäßig, folgende Kurzschreibweisen zu verwenden

$$S_m := \{\sigma : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, m\} \ \text{bijektiv}\} \quad \text{statt} \quad S(\{1, \dots, m\}),$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(m) \end{pmatrix} \in S_m \quad \text{statt} \quad \sigma : \{1, \dots, m\} \longrightarrow \{1, \dots, m\} : \begin{cases} 1 \mapsto \sigma(1), \\ \quad \vdots \\ m \mapsto \sigma(m). \end{cases}$$

(Vorsicht! Eine Permutation ist keine Matrix!)

Beispiele. Einfache Beispiele für die Komposition von zwei Permutationen und die Inverse einer Permutation sind (ausführliche Schreibweise, praktische Kurzschreibweise)

$$\sigma_1 : \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\} : \begin{cases} 1 \mapsto 1\,, \\ 2 \mapsto 3\,, \\ 3 \mapsto 2\,, \end{cases} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma_2 : \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\} : \begin{cases} 1 \mapsto 3\,, \\ 2 \mapsto 2\,, \\ 3 \mapsto 1\,, \end{cases} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 : \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\} : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \mapsto 3\,, \\ 2 \mapsto 3 \mapsto 1\,, \\ 3 \mapsto 2 \mapsto 2\,, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma_3 : \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\} : \begin{cases} 1 \mapsto 3\,, \\ 2 \mapsto 1\,, \\ 3 \mapsto 2\,, \end{cases} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} ,$$

$$\sigma_3^{-1} : \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\} : \begin{cases} 1 \mapsto 2\,, \\ 2 \mapsto 3\,, \\ 3 \mapsto 1\,, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Definition der Signatur einer Permutation beruht auf einer Darstellung der Permutation als eine Komposition von speziellen Permutationen (im ersten Schritt elementfremde Zykel, im zweiten Schritt Zykel der Länge 2).

Elementfremde Zykel. Ausgehend von einer Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(m) \end{pmatrix} \in S_m$$

erhält man einen zugehörigen Zykel, wenn man mit einer Zahl $j \in \{1, \dots, m\}$ beginnt und die auftretenden Funktionswerte solange verfolgt bis die ursprüngliche Zahl wieder auftritt

$$\text{Zykel } \rho \in S_m \text{ zu } j \in \{1, \dots, m\}: \quad j \mapsto \sigma(j) \mapsto \sigma\big(\sigma(j)\big) \mapsto \dots \mapsto j\,;$$

man verwendet die Kurzschreibweise

$$\rho = \big(j \; \sigma(j) \; \sigma\big(\sigma(j)\big) \; \dots\big) \in S_m\,,$$

wobei die (erste und letzte) Zahl j nur ein einziges Mal angegeben wird. Man beachte, dass jene Zahlen, die auf sich selbst abgebildet werden, in der Kurzschreibweise nicht angegeben werden. Wendet man diese Vorgehensweise auf die noch nicht vorgekommenen Zahlen an, erhält man schließlich eine Darstellung der Form

$$\sigma = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k \in S_m\,.$$

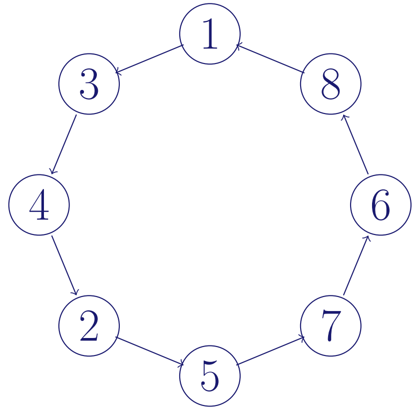
Wesentlich ist die Bedingung, dass alle Zykel elementfremd sind, d.h. keine gemeinsamen Zahlen enthalten; in diesem Fall kann man die Reihenfolge der Kompositionen beliebig vertauschen.

(Singular Zykel = Plural Zykel)

Bemerkungen, Beispiele.

(i) Die angegebene Permutation entspricht einem einzigen Zykel; es ist hilfreich, sich den Zykel als kreisförmige Vertauschung der Zahlen vorzustellen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 7 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} =$$



$$= (1\,3\,4\,2\,5\,7\,6\,8) \in S_8\,.$$

Man beachte, dass die Darstellung eines Zykels nicht eindeutig ist; beispielsweise gilt

$$(1\,3\,4\,2\,5\,7\,6\,8) = (3\,4\,2\,5\,7\,6\,8\,1) = (8\,1\,3\,4\,2\,5\,7\,6) \in S_8\,.$$

(Vorsicht! Man verwendet hier einerseits die Schreibweise als Permutation und andererseits die Schreibweise als Zykel.)

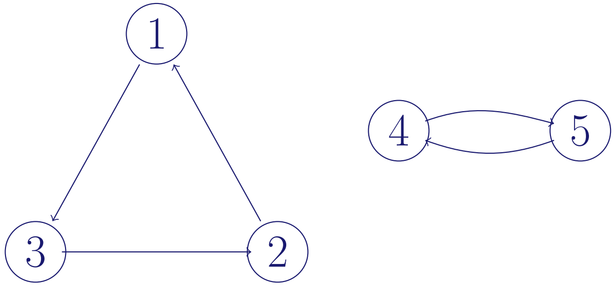
(ii) Die Inverse eines Zykel erhält man besonders einfach, nämlich durch Umkehrung der Reihenfolge der Zahlen; beispielsweise gilt

$$\begin{cases} 1 \mapsto 3\,, \\ 2 \mapsto 4\,, \\ 3 \mapsto 2\,, \\ 4 \mapsto 5\,, \\ 5 \mapsto 1\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 \mapsto 5\,, \\ 2 \mapsto 3\,, \\ 3 \mapsto 1\,, \\ 4 \mapsto 2\,, \\ 5 \mapsto 4\,, \end{cases}$$

$$(1\;3\;2\;4\;5)^{-1} = (5\;4\;2\;3\;1) = (1\;5\;4\;2\;3)\,.$$

(iii) Die angegebene Permutation umfasst zwei elementfremde Zykel. Üblicherweise beginnt man mit der Zahl 1 und bestimmt den zugehörigen Zykel; anschließend wählt man die kleinste noch nicht aufgetretene Zahl und bestimmt dafür den zugehörigen Zykel. Dies ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} =$$



$$= (1\;3\;2) \circ (4\;5) \in S_5\,;$$

man beachte, dass die Darstellung der Zykel nicht eindeutig ist und die Reihenfolge der Zykel vertauscht werden kann, weil sie elementfremd sind

$$(1\;3\;2) \circ (4\;5) = (4\;5) \circ (1\;3\;2) = (5\;4) \circ (2\;1\;3) \in S_5\,.$$

(iv) Anstelle von Kompositionen spricht man oft von Produkten und lässt die Kompositionszeichen weg

$$\sigma = \rho_1 \cdots \rho_k \in S_m\,;$$

im zuvor angegebenen Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1\;3\;2) \circ (4\;5) \in S_5$$

ist $m = 5$ und $k = 2$.

(v) Mit Hilfe der Darstellung einer Permutation als Komposition von elementfremden Zykel kann man die Struktur der Permutation leichter erfassen; es ist zwar nicht die Darstellung aber die Anzahl der auftretenden elementfremden Zykel eindeutig bestimmt. Dies trifft *nicht* auf die Darstellung einer Permutation als Komposition von *nicht* elementfremden Zykeln zu; hier ist auch die gewählte Reihenfolge wesentlich. Beispielsweise gilt

$$(1\;3\;2)\;(2\;4\;5) = (1\;3\;2\;4\;5)\,, \quad \begin{cases} 1 \mapsto 1 \mapsto 3\,, \\ 2 \mapsto 4 \mapsto 4\,, \\ 3 \mapsto 3 \mapsto 2\,, \\ 4 \mapsto 5 \mapsto 5\,, \\ 5 \mapsto 2 \mapsto 1\,, \end{cases}$$

$$(2\;4\;5)\;(1\;3\;2) = (1\;3\;4\;5\;2)\,, \quad \begin{cases} 1 \mapsto 3 \mapsto 3\,, \\ 2 \mapsto 1 \mapsto 1\,, \\ 3 \mapsto 2 \mapsto 4\,, \\ 4 \mapsto 4 \mapsto 5\,, \\ 5 \mapsto 5 \mapsto 2\,, \end{cases}$$

$$(1\;3\;2)\;(2\;4\;5) \neq (2\;4\;5)\;(1\;3\;2)\,.$$

(vi) Bei der Darstellung einer Permutation als Komposition von elementfremden Zykel können Zykel der Länge 1 auftreten; da man Zykel der Länge 1 bei bekannter Gesamtlänge einer Permutation leicht bestimmen kann, werden sie bei der Angabe einer Permutation meist weggelassen. Beispielsweise schreibt man kurz

$$(1\ 6\ 3\ 4)\ (2)\ (5\ 8\ 7)\ (9) = (1\ 6\ 3\ 4)\ (5\ 8\ 7) \in S_9\,.$$

Man beachte, dass Zykel der Länge 1 der identischen Abbildung entsprechen und deshalb keine Rolle spielen; es gilt

$$(1) = \cdots = (m) \in S_m\,.$$

Das Hinzufügen von einem Zykel der Länge 1 würde eine Permutation nicht ändern

$$(1\ 6\ 3\ 4)\ (2)\ (5\ 8\ 7)\ (9) = (1)\ (1\ 6\ 3\ 4)\ (2)\ (5\ 8\ 7)\ (9)\,;$$

wenn man die Bedingung elementfremd nicht beachtet, verliert man jedoch die Eindeutigkeit der Zykelanzahl.

(vii) Ein Zykel der Länge 2 wird auch als Transposition bezeichnet. Eine Transposition ist zu sich selbst invers; beispielsweise gilt

$$\begin{cases} 2 \longleftrightarrow 5\,, \\ 5 \longleftrightarrow 2\,, \end{cases} \qquad (2\ 5)^{-1} = (5\ 2) = (2\ 5)\,.$$

Satz 4.1.1. (i) Jede Permutation $\sigma \in S_m$ lässt sich als Komposition von elementfremden Zykel darstellen; die Anzahl der Zykel ist eindeutig bestimmt, ihre Darstellung und Reihenfolge im Allgemeinen jedoch nicht.

Beweis. Zusammenfassung der oben angegebenen Überlegungen. $\diamond$

(ii) Es bezeichne $\sigma \in S_m$ eine Permutation, die k elementfremde Zykel umfasst, und $\tau \in S_m$ eine Transposition

$$\sigma = \rho_1\, \rho_2\, \cdots\, \rho_k \in S_m\,, \quad \tau = (a\ b) \in S_m\,;$$

die Komposition $\sigma\,\tau$ umfasst dann entweder $k+1$ oder $k-1$ elementfremde Zykel.

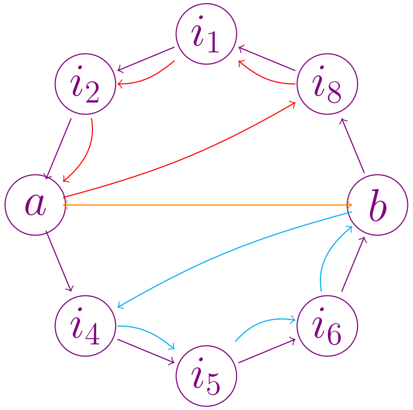
Beweis. Zum Nachweis der Behauptung unterscheidet man zwei Fälle; entweder kommen die Zahlen a und b im selben Zykel ρ_i mit $i \in \{1, \dots, m\}$ oder in zwei verschiedenen Zykeln ρ_i, ρ_j mit $i, j \in \{1, \dots, m\}$ und $i \neq j$ vor.

(a) Im ersten Fall werden alle anderen Zykel von der Komposition mit der Transposition nicht beeinflusst; somit reicht es aus, die Komposition

$$\rho_i\,\tau = \rho_i\,(a\ b) \in S_m$$

zu untersuchen. Als Illustration wird folgende Situation betrachtet ($i_3 = a$, $i_4 = b$)

$$\tau: \begin{cases} a \mapsto b\,, \\ b \mapsto a\,, \end{cases} \qquad \rho_i: \begin{cases} i_1 \mapsto i_2\,, \\ i_2 \mapsto a\,, \\ a \mapsto i_4\,, \\ i_4 \mapsto i_5\,, \\ i_5 \mapsto i_6\,, \\ i_6 \mapsto b\,, \\ b \mapsto i_8\,, \\ i_8 \mapsto i_1\,, \end{cases} \qquad \rho_i \circ \tau: \begin{cases} i_1 \mapsto i_1 \mapsto i_2\,, \\ i_2 \mapsto i_2 \mapsto a\,, \\ a \mapsto b \mapsto i_8\,, \\ i_4 \mapsto i_4 \mapsto i_5\,, \\ i_5 \mapsto i_5 \mapsto i_6\,, \\ i_6 \mapsto i_6 \mapsto b\,, \\ b \mapsto a \mapsto i_4\,, \\ i_8 \mapsto i_8 \mapsto i_1\,, \end{cases} = \begin{cases} \rho_i' = \begin{cases} i_1 \mapsto i_2\,, \\ i_2 \mapsto a\,, \\ a \mapsto i_8\,, \\ i_8 \mapsto i_1\,, \end{cases} \\ \rho_i'' = \begin{cases} i_4 \mapsto i_5\,, \\ i_5 \mapsto i_6\,, \\ i_6 \mapsto b\,, \\ b \mapsto i_4\,, \end{cases} \end{cases}$$

$\rho_i\,\tau =$  $= \rho_i'\;\rho_i''\,.$

Man stellt fest, dass die Komposition $\rho_i\,\tau$ in zwei elementfremde Zykel zerfällt; somit ist die Komposition der Permutation mit der Transposition ein Produkt von $k+1$ elementfremden Zykel

$$\sigma = \rho_1\;\rho_2\;\cdots\;\rho_i'\;\rho_i''\;\cdots\;\rho_k \in S_m\,.$$

(b) Ähnliche Überlegungungen zeigen im zweiten Fall, dass die Komposition der Permutation mit der Transposition ein Produkt von $k-1$ elementfremden Zykel umfasst, siehe Skriptum. $\diamond$

(iii) Jede Permutation $\sigma \in S_m$ lässt sich als Komposition von Transpositionen darstellen; die Anzahl der Transpositionen modulo 2 ist eindeutig bestimmt, jedoch nicht die Anzahl von Transpositionen.

Beweis.

(a) Es reicht aus, einen einzelnen Zykel der Form

$$(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k)$$

zu betrachten; für diesen ist die folgende Darstellung als Komposition von Transpositionen gültig

$$(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k) = (i_1\ i_2)\,(i_2\ i_3)\ \cdots\ (i_{k-1}\ i_k)\,.$$

Zur Illustration zwei einfache Beispiele

$$\tau_1 : \begin{cases} 1 \mapsto 2\,, \\ 2 \mapsto 1\,, \end{cases} \qquad \tau_2 : \begin{cases} 2 \mapsto 3\,, \\ 3 \mapsto 2\,, \end{cases} \qquad \tau_3 : \begin{cases} 3 \mapsto 4\,, \\ 4 \mapsto 3\,, \end{cases}$$

$$\tau_1 \circ \tau_2 = (1\ 2\ 3) : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \mapsto 2\,, \\ 2 \mapsto 3 \mapsto 3\,, \\ 3 \mapsto 2 \mapsto 1\,, \end{cases} \qquad \tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3 = (1\ 2\ 3\ 4) : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \mapsto 1 \mapsto 2\,, \\ 2 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 3\,, \\ 3 \mapsto 4 \mapsto 4 \mapsto 4\,, \\ 4 \mapsto 3 \mapsto 2 \mapsto 1\,. \end{cases}$$

(b) Zum Nachweis der Eindeutigkeit der Anzahl modulo 2 wird auf das Skriptum verwiesen. ◇

Beispiel 4.1.2. Für die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix} \in S_8$$

erhält man folgende Darstellung als Komposition elementfremder Zykel

$$\sigma = (1\;2\;4)\;(3\;5)\;(6)\;(7\;8) = (1\;2\;4)\;(3\;5)\;(7\;8) \in S_8\,;$$

mittels $(1\;2\;4) = (1\;2)\;(2\;4)$ führt dies auf eine naheliegende Darstellungen als Komposition von Transpositionen

$$\sigma = (1\;2)\;(2\;4)\;(3\;5)\;(7\;8) \in S_8\,.$$

Die Anzahl der elementfremden Zykel ist eindeutig bestimmt; eindeutig festgelegt ist auch, dass die Anzahl der Transpositionen eine gerade Zahl ist. △

Vorsicht! Im angegebenen Beispiel ist die gewählte Reihenfolge der Transpositionen wesentlich, siehe Beweis von Satz 4.1.1

$$(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k) = (i_1\ i_2)\ (i_2\ i_3)\ \cdots\ (i_{k-1}\ i_k)\,.$$

Man beachte, dass die Hinzunahme eines Zykel der Länge 1, etwa $(1) = (2) = (3) \in S_8$, und die Darstellung als Produkt von Transpositionen, etwa

$$(1) = (1\ 2)\ (1\ 2)^{-1} = (1\ 2)\ (1\ 2) = (1\ 2)\ (3\ 4)\ (1\ 2)\ (3\ 4) \in S_8\,,$$

ebenfalls auf eine gerade Anzahl an Transpositionen führt; bei elementfremden Zykel und insbesondere bei Transpositionen kann man die Reihenfolge vertauschen. Alternative Darstellungen der zuvor angegebenen Permutation sind beispielsweise

$$\begin{aligned}\sigma &= (1\ 2)\ (2\ 4)\ (3\ 5)\ (7\ 8)\\ &= (1\ 2)\ (2\ 4)\ (3\ 5)\ (7\ 8)\ (1\ 8)\ (1\ 8)\\ &= (1\ 2)\ (2\ 4)\ (1\ 4)\ (3\ 5)\ (7\ 8)\ (1\ 4) \in S_8\,.\end{aligned}$$

(Kleiner Unterschied zum Skriptum, selbes Ergebnis: s = Anzahl modulo 2.)

Definition 4.1.3 (Signatur). (i) Für eine Permutation $\sigma \in S_m$ sei eine Darstellung als Komposition von S Transpositionen gegeben; nach Satz 4.1.1 ist dann

$$s = S \mod 2 \in \{0, 1\}$$

unabhängig von der gewählten Darstellung und somit die Signatur (Vorzeichen) der Permutation

$$\mathrm{sgn}(\sigma) := (-1)^s \in \{-1, 1\}$$

wohldefiniert.

(ii) Die zugehörige Abbildung

$$\mathrm{sgn} : S_m \longrightarrow \{-1, 1\} : \sigma \longmapsto \mathrm{sgn}(\sigma) \tag{4.1}$$

bezeichnet man als Signaturabbildung. △

Beispiel. Im obigen Beispiel 4.1.2 ist die Anzahl der Transpositionen gerade und somit

$$\mathrm{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix} = (-1)^0 = 1\,.$$

Bemerkungen, Beispiele 4.1.4. Direkte Folgerungen aus zuvor angegebenen Bemerkungen und Beispielen; insbesondere wird der Zusammenhang

$$(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k) = (i_1\ i_2)\ (i_2\ i_3)\ \cdots\ (i_{k-1}\ i_k)$$

zwischen einem Zykel und Transpositionen angewendet. Siehe Skriptum.

Korollar 4.1.5. Für zwei Permutationen $\sigma, \tau \in S_m$ gilt

$$\operatorname{sgn}(\sigma\,\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)\,.$$

Beweis. Man stellt die Permutationen $\sigma \in S_m$ und $\tau \in S_m$ als Kompositionen von R und S Transpositionen dar; die Komposition $\sigma\,\tau \in S_m$ kann dann als eine Komposition von $R + S$ Transpositionen dargestellt werden. Für die Signaturen folgt mit $r = R \mod 2$ und $s = S \mod 2$ wegen $(r + s) \mod 2 = (R + S) \mod 2$ die Gleichheit

$$\operatorname{sgn}(\sigma\,\tau) = (-1)^{r+s} = (-1)^r\,(-1)^s = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)\,. \qquad \diamond$$

SPEZIALFALL $(m = 3)$. Zuvor wurde die Determinante einer (2×2)-Matrix bestimmt

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = A_{11}\,A_{22} - A_{21}\,A_{12}\,.$$

Ähnlich leicht einzuprägen ist die Determinante einer (3×3)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}\,,$$

$$\det(A) = A_{11}\,A_{22}\,A_{33} + A_{21}\,A_{32}\,A_{13} + A_{31}\,A_{12}\,A_{23} - A_{11}\,A_{32}\,A_{23} - A_{21}\,A_{12}\,A_{33} - A_{31}\,A_{22}\,A_{13}\,;$$

zur Herleitung verwendet man entweder die Eigenschaften der Determinanten-Abbildung (multilinear, alternierend, bezüglich der Standardbasis normiert) oder die auf Permutationen basierende Leibnitz-Formel.

Berechnung der Determinante mittels der Eigenschaft linear in jeder Komponente, der Eigenschaft alternierend und der Normierungsbedingung $\det(e_1, e_2, e_3) = 1$ für die Standardbasis (Reihenfolge der Basisvektoren hier wesentlich). Treten Basisvektoren zumindest zweimal auf, ist der entsprechende Beitrag gleich Null. Der erste Index entspricht dem Basisvektor, der zweite Index entspricht der Komponente. Beispielsweise mittels $\det(e_1, e_3, e_2) = -\det(e_1, e_2, e_3)$ und $\det(e_2, e_3, e_1) = -\det(e_2, e_1, e_3) = (-1)^2 \det(e_1, e_2, e_3)$ (Zusammenhang mit Signatur einer Permutation, siehe unten!) erhält man das Resultat

$$
\begin{aligned}
&\det\big(A_{11}\, e_1 + A_{21}\, e_2 + A_{31}\, e_3, A_{12}\, e_1 + A_{22}\, e_2 + A_{32}\, e_3, A_{13}\, e_1 + A_{23}\, e_2 + A_{33}\, e_3\big) \\
&\quad = A_{11} \det\big(e_1, A_{12}\, e_1 + A_{22}\, e_2 + A_{32}\, e_3, A_{13}\, e_1 + A_{23}\, e_2 + A_{33}\, e_3\big) \\
&\qquad\quad + A_{21} \det\big(e_2, A_{12}\, e_1 + A_{22}\, e_2 + A_{32}\, e_3, A_{13}\, e_1 + A_{23}\, e_2 + A_{33}\, e_3\big) \\
&\qquad\quad + A_{31} \det\big(e_3, A_{12}\, e_1 + A_{22}\, e_2 + A_{32}\, e_3, A_{13}\, e_1 + A_{23}\, e_2 + A_{33}\, e_3\big) \\
&\quad = A_{11}\, A_{22} \det\big(e_1, e_2, A_{13}\, e_1 + A_{23}\, e_2 + A_{33}\, e_3\big) \\
&\qquad\quad + A_{11}\, A_{32} \det\big(e_1, e_3, A_{13}\, e_1 + A_{23}\, e_2 + A_{33}\, e_3\big) \\
&\qquad\quad + A_{21}\, A_{12} \det\big(e_2, e_1, A_{13}\, e_1 + A_{23}\, e_2 + A_{33}\, e_3\big) \\
&\qquad\quad + A_{21}\, A_{32} \det\big(e_2, e_3, A_{13}\, e_1 + A_{23}\, e_2 + A_{33}\, e_3\big) \\
&\qquad\quad + A_{31}\, A_{12} \det\big(e_3, e_1, A_{13}\, e_1 + A_{23}\, e_2 + A_{33}\, e_3\big) \\
&\qquad\quad + A_{31}\, A_{22} \det\big(e_3, e_2, A_{13}\, e_1 + A_{23}\, e_2 + A_{33}\, e_3\big) \\
&\quad = A_{11}\, A_{22}\, A_{33} \det(e_1, e_2, e_3) + A_{11}\, A_{32}\, A_{23} \det(e_1, e_3, e_2) + A_{21}\, A_{12}\, A_{33} \det(e_2, e_1, e_3) \\
&\qquad\quad + A_{21}\, A_{32}\, A_{13} \det(e_2, e_3, e_1) + A_{31}\, A_{12}\, A_{23} \det(e_3, e_1, e_2) + A_{31}\, A_{22}\, A_{13} \det(e_3, e_2, e_1) \\
&\quad = A_{11}\, A_{22}\, A_{33} + A_{21}\, A_{32}\, A_{13} + A_{31}\, A_{12}\, A_{23} - A_{11}\, A_{32}\, A_{23} - A_{21}\, A_{12}\, A_{33} - A_{31}\, A_{22}\, A_{13}\,.
\end{aligned}
$$

Berechnung der Determinante mittels der Leibnitz-Formel. Angabe aller Permutationen zunächst mittels elementfremder Zykel und dann mittels Transpositionen. Dies ergibt das Resultat

$$|S_3| = 3! = 6\,, \quad S_3 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}\,,$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)\,(2)\,(3)\,, \quad \operatorname{sgn}(\sigma_1) = 1\,,$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)\,(2\;3) = (2\;3)\,, \quad \operatorname{sgn}(\sigma_2) = -1\,,$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\;2)\,(3) = (1\;2)\,, \quad \operatorname{sgn}(\sigma_3) = -1\,,$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\;2\;3) = (1\;2)\,(2\;3)\,, \quad \operatorname{sgn}(\sigma_4) = 1\,,$$

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\;3\;2) = (1\;3)\,(2\;3)\,, \quad \operatorname{sgn}(\sigma_5) = 1\,,$$

$$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\;3)\,(2) = (1\;3)\,, \quad \operatorname{sgn}(\sigma_6) = -1\,,$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^{6} \operatorname{sgn}(\sigma_i)\, A_{\sigma_i(1)1}\, A_{\sigma_i(2)2}\, A_{\sigma_i(3)3} \\ &= A_{11}\, A_{22}\, A_{33} + A_{21}\, A_{32}\, A_{13} + A_{31}\, A_{12}\, A_{23} - A_{11}\, A_{32}\, A_{23} - A_{21}\, A_{12}\, A_{33} - A_{31}\, A_{22}\, A_{13}\,. \end{aligned}$$

(Vorlesung 9. Dezember)

Beispiel 4.1.6.

4.2 Die Determinante und ihre Eigenschaften

Definition 4.2.1 (Determinante, Leibnitz-Formel).

Bemerkungen, Beispiele 4.2.2.

Proposition 4.2.3.

Satz 4.2.4 (Multiplikationssatz).

Erinnerung. Die Berechnung der Determinanten einer allgemeinen (2×2)-Matrix und einer allgemeinen (3×3)-Matrix einerseits mittels der Abbildungseigenschaften multilinear, alternierend, normiert und andererseits mittels der auf Permutationen und ihren Signaturen basierenden Leibnitz-Formel ergibt

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} &= A_{11}\,A_{22} - A_{21}\,A_{12}\,, \\
\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} &= A_{11}\,A_{22}\,A_{33} + A_{21}\,A_{32}\,A_{13} + A_{31}\,A_{12}\,A_{23} \\
&\qquad - A_{11}\,A_{32}\,A_{23} - A_{21}\,A_{12}\,A_{33} - A_{31}\,A_{22}\,A_{13}\,,
\end{aligned}$$

siehe auch Kapitel 4.3 (Regel von Sarrus).

Reduktion der Komplexität. Würde man die Determinante einer allgemeinen $(m \times m)$-Matrix mittels der Leibnitz-Formel berechnen, müsste man eine hohe Anzahl von Permutationen berücksichtigen

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mm} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma)\, A_{\sigma(1)1} \cdots A_{\sigma(m)m}\,,$$

$$|S_m| = m\,!\,,$$
$$3\,! = 6\,,$$
$$4\,! = 24\,,$$
$$5\,! = 120\,,$$
$$6\,! = 720\,,$$
$$7\,! = 5\,040\,,$$
$$8\,! = 40\,320\,,$$
$$9\,! = 362\,880\,,$$
$$10\,! = 3\,628\,800\,,$$
$$\text{etc.}$$

Um die erforderlichen Rechenoperationen (Additionen und Multiplikationen) deutlich zu reduzieren, nützt man eine Transformation auf Zeilenstufenform und die im Folgenden angegebenen Überlegungen.

Matrizen spezieller Struktur.

(i) Einheitsmatrix. Die Determinante der Einheitsmatrix $I \in \mathbb{K}^{m \times m}$ ist gleich Eins

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\,,$$

siehe Proposition 4.2.3. Dieses Resultat entspricht der Normierungsbedingung für das Volumen des m-dimensionalen Einheitswürfels

$$\det(e_1, \dots, e_m) = 1\,,$$

und es folgt direkt aus der Leibnitz-Formel

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma)\, A_{\sigma(1)1} \cdots A_{\sigma(m)m}\,,$$
$$\det(I) = \sum_{\sigma = \mathrm{id} \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\,;$$

aufgrund der Nulleinträge außerhalb der Diagonale tritt nur eine einzige Permutation, die Identität mit Signatur Eins, auf.

(ii) DIAGONALMATRIX. Ähnlich leicht sieht man, dass die Determinante einer Diagonalmatrix $A \in \mathbb{K}^{m\times m}$ gleich dem Produkt der Diagonalelemente ist

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_{mm} \end{pmatrix} = A_{11} \cdots A_{mm} \,.$$

Man wendet dazu die Eigenschaft homogen in jeder Komponente sowie die Normierungsbedingung an

$$\det(A_{11}\, e_1, \dots, A_{mm}\, e_m) = A_{11} \,\cdots\, A_{mm} \det(e_1, \dots, e_m) = A_{11} \,\cdots\, A_{mm} \,;$$

bei der Leibnitz-Formel tritt wiederum nur die Identität mit Signatur Eins auf

$$\det(A) = \sum_{\sigma\,=\,\mathrm{id}\in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma)\, A_{\sigma(1)1} \cdots A_{\sigma(m)m} = A_{11} \,\cdots\, A_{mm} \,.$$

(iii) DREIECKSMATRIX. Das für eine Diagonalmatrix angegebene Resultat ist auch für eine Dreiecksmatrix $A \in \mathbb{K}^{m\times m}$, beispielsweise für eine obere Dreiecksmatrix

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & \dots & A_{1m} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2m} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_{mm} \end{pmatrix} = A_{11} \cdots A_{mm} \,,$$

richtig. Man nützt die Eigenschaft multilinear und dass wegen der Eigenschaft alternierend alle Beiträge, wo zumindest zwei Standardbasisvektoren übereinstimmen, gleich Null sind

$$\det(A_{11}\, e_1, A_{12}\, e_1 + A_{22}\, e_2, \dots) = A_{11}\, A_{12}\, \underbrace{\det(e_1, e_1, \dots)}_{=0} + A_{11}\, A_{22}\, \det(e_1, e_2, \dots) + \dots\,;$$

somit ist nur ein einziger Summand zu berücksichtigen

$$A_{11} \cdots A_{mm} \det(e_1, \dots, e_m) = A_{11} \cdots A_{mm} \,.$$

Die Leibnitz-Formel beinhaltet die Überlegungen zu gleichen Standardbasisvektoren bereits; aufgrund der Nulleinträge tritt nur der Beitrag der Identität auf

$$\det(A) = \sum_{\sigma = \mathrm{id} \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma)\, A_{\sigma(1)1} \cdots A_{\sigma(m)m} = A_{11} \cdots A_{mm} \,.$$

Allgemeine Vorgehensweise. Für eine allgemeine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$ nützt man eine Transformation auf Zeilenstufenform; genauer, man verwendet, dass sich bei Multiplikation der ursprünglichen Matrix mit Elementarmatrizen $L_1, \dots, L_k \in \mathbb{K}^{m \times m}$ eine obere Dreiecksmatrix ergibt, deren Determinante leicht zu berechnen ist

$$A \quad \longrightarrow \quad R = L_k \cdots L_1 \, A \,,$$
$$\det(R) = R_{11} \cdots R_{mm} \,.$$

Wesentlich für die Berechnung von $\det(A)$ ist dabei der *Multiplikationssatz für Determinanten*

$$\forall \, A, B \in \mathbb{K}^{m \times m}: \quad \det(A \, B) = \det(A) \, \det(B) \,,$$

siehe Satz 4.2.4, sowie im Folgenden angegebene Resultate.

Korollar 4.2.5. (i) Für die Determinante des Produktes zweier beliebiger quadratischer Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{m\times m}$ gilt

$$\det(A\,B) = \det(A)\,\det(B) = \det(B)\,\det(A) = \det(BA)\,.$$

Beweis. Direkte Folgerung aus dem Multiplikationssatz, siehe Satz 4.2.4.

(ii) Für die Determinante einer invertierbaren quadratischen Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times m}$ gilt

$$\det(A) \neq 0\,, \quad \det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}\,.$$

Beweis. Es sei nochmals an die Determinante der Einheitsmatrix erinnert

$$\det(I) = 1\,;$$

mittels Multiplikationssatz zeigt dies, dass die Determinante einer invertierbaren Matrix verschieden von Null ist und die angegebene Gleichheit erfüllt

$$1 = \det(I) = \det\left(A\,A^{-1}\right) = \underbrace{\det(A)}_{\neq 0}\,\underbrace{\det\left(A^{-1}\right)}_{\neq 0}\,. \qquad \diamond$$

(Die Determinante ist invariant unter einer Äquivalenzumformung / unter einer linearen Koordinatentransformation / bei einem Basiswechsel.)

(iii) Für eine invertierbare quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$ und eine beliebige quadratische Matrix $B \in \mathbb{K}^{m \times m}$ gilt

$$\det\left(A^{-1}\,B\,A\right) = \det\left(A^{-1}\right)\,\det(B)\,\det(A) = \det(B)\,.$$

Beweis. Direkte Folgerung aus (i) und (ii). ◇

Das folgende Resultat fasst Überlegungen zur Determinante von Elementarmatrizen zusammen, siehe Definition 2.3.9; zur Transformation einer Matrix auf Zeilenstufenform werden insbesondere Zeilenvertauschungen (i) und Eliminationen (iii) benötigt. Zur Illustration werden (4×4)-Matrizen betrachtet; die Erweiterung auf den allgemeinen Fall ist offensichtlich.

Korollar 4.2.6. Es bezeichne $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$ eine beliebige quadratische Matrix.

(i) Für $i, j \in \{1, \dots, m\}$ mit $i < j$ bezeichnet P_{ij} jene Elementarmatrix, welche aus der Einheitsmatrix durch Vertauschung der i-ten und j-ten Zeile oder Spalte entsteht; es gilt

$$\det(P_{ij}\, A) = \det(P_{ij})\, \det(A) = - \det(A)\,.$$

Beweis. Als Illustration wird der Spezialfall

$$m = 4\,, \quad i = 2\,, \quad j = 4: \quad P_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^T \\ e_4^T \\ e_3^T \\ e_2^T \end{pmatrix} = \big(e_1 \big| e_4 \big| e_3 \big| e_2\big) \in \mathbb{K}^{4\times 4}$$

betrachtet. Mittels der Eigenschaft alternierend und der Normierungsbedingung

$$\det(P_{ij}) = \det(e_1, \dots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, e_i, e_{j+1}, \dots, e_m) = -\,\underbrace{\det(e_1, \dots, e_m)}_{=1} = -\,1$$

oder etwas umständlicher mittels der Leibnitz-Formel (aufgrund der Nulleinträge bleibt ein einziger Summand über, die zugehörige Permutation ist eine Transposition und hat die Signatur $-\,1$)

$$\det(P_{ij}) = \sum_{\sigma\,=\,(i\,j)\in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) = -\,1$$

sieht man, dass die Determinante der Elementarmatrix die Gleichheit

$$\det(P_{ij}) = -\,1$$

erfüllt. ◇

(ii) Für $i \in \{1,\dots,m\}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ bezeichnet $S_i(\lambda)$ jene Elementarmatrix, welche aus der Einheitsmatrix durch Multiplikation der i-ten Zeile oder Spalte mit λ entsteht; es gilt

$$\det\big(S_i(\lambda)\,A\big) = \det\big(S_i(\lambda)\big)\,\det(A) = \lambda\,\det(A)\,.$$

Beweis. Als Illustration wird der Spezialfall

$$m = 4\,, \quad i = 3: \quad S_3(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{4\times 4}$$

betrachtet. Mittels der Eigenschaft homogen in der i-ten Komponente und der Normierungsbedingung oder etwas umständlicher mittels der Leibnitz-Formel folgt

$$\det\big(S_i(\lambda)\big) = \det(e_1,\dots,e_{i-1},\lambda\,e_i,e_{i+1},\dots,e_m) = \lambda\,\underbrace{\det(e_1,\dots,e_m)}_{=1} = \lambda\,;$$

man könnte stattdessen auch die zuvor angegebenen Überlegungen zur Determinante einer Diagonalmatrix verwenden. $\diamond$

(iii) Für $i, j \in \{1, \dots, m\}$ mit $i \neq j$ und $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ bezeichnet $M_{ij}(\lambda)$ jene Elementarmatrix, welche aus der Einheitsmatrix durch Addition des λ-fachen der i-ten Zeile zur j-ten Zeile entsteht; es gilt

$$\det\big(M_{ij}(\lambda)\,A\big) = \det\big(M_{ij}(\lambda)\big)\,\det(A) = \det(A)\,.$$

Als Illustration wird der Spezialfall

$$m = 4\,, \quad i = 1\,, \quad j = 4: \quad M_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{4\times 4}$$

betrachtet. Mittels der Eigenschaften linear in der i-ten Komponente und alternierend sowie der Normierungsbedingung sieht man

$$\det\big(M_{14}(\lambda)\big) = \det(e_1 + \lambda\,e_4, e_2, e_3, e_4) = \underbrace{\det(e_1, e_2, e_3, e_4)}_{=1} + \lambda\,\underbrace{\det(e_4, e_2, e_3, e_4)}_{=0} = 1\,,$$

$$\begin{aligned} \det\big(M_{ij}(\lambda)\big) &= \det(e_1, \dots, e_{i-1}, e_i + \lambda\,e_j, e_{i+1}, \dots, e_m) \\ &= \underbrace{\det(e_1, \dots, e_m)}_{=1} + \lambda\,\underbrace{\det(e_1, \dots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \dots, e_j, \dots, e_m)}_{=0} = 1\,. \end{aligned}$$

Man könnte stattdessen auch die zuvor angegebenen Überlegungen zur Determinante einer Dreiecksmatrix nützen. $\diamond$

Bemerkung 4.2.7. Die zuvor angegebenen Überlegungen zeigen, wie man die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times m}$ mit Hilfe einer Transformation auf Zeilenstufenform berechnen kann

$$A \underset{\text{elementare Zeilenumformungen}}{\longrightarrow} R = L_k \cdots L_1 A \ \text{ obere Dreiecksform}\,,$$

$$\det(A) = \frac{1}{\det(L_1) \cdots \det(L_k)} \det(R)\,, \quad \det(R) = R_{11} \cdots R_{mm}\,.$$

Dabei ist zu beachten, dass eine Zeilenvertauschung einen Vorzeichenwechsel der Determinante bewirkt; Eliminationsschritte ändern die Determinante hingegen nicht. △

Beispiel 4.2.8. Die im Folgenden angegebene Matrix ist nicht invertierbar, weil ihre Determinante gleich Null ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A \ \text{ nicht invertierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(A) = 0\,.$$

Bei der Anwendung der Leibnitz-Formel zur Bestimmung der Determinante hätte man $4! = 24$ Permutationen berücksichtigen müssen. △

Die Zusammenhang zwischen dem Wert der Determinante und der Invertierbarkeit einer Matrix ist im folgenden Resultat nochmals zusammengefasst.

Satz 4.2.9. Für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times m}$ gilt die Äquivalenz

$$A \text{ invertierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(A) \neq 0\,.$$

Beweis. Die Herleitung des Resultates beruht auf der Gleichheit

$$\det(A)\,\det\left(A^{-1}\right) = 1$$

und den zuvor angegebenen Überlegungen zur Transformation auf (reduzierte) Zeilenstufenform. $\diamond$

Beispiel 4.2.10. Wie man mittels der Berechnung der Determinante leicht sieht, ist die folgende Matrix über $\mathbb{Z}/7\,\mathbb{Z}$ invertierbar, jedoch über $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$ nicht invertierbar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\,, \quad \det(A) = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -\,2 \equiv \begin{cases} 5 \mod 7\,, \\ 0 \mod 2\,. \end{cases}$$

Ohne das zugehörige lineare Gleichungssystem

$$x + 2\,y = b_1\,, \quad 3\,x + 4\,y = b_2\,,$$

zu lösen, kann man also die Aussage treffen, dass für jedes Paar $(b_1, b_2) \in (\mathbb{Z}/7\,\mathbb{Z})^2$ eine eindeutig bestimmte Lösung $(x, y) \in (\mathbb{Z}/7\,\mathbb{Z})^2$ existiert; im Gegensatz dazu gibt es Paare $(b_1, b_2) \in (\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z})^2$, sodass die zugehörige Lösung $(x, y) \in (\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z})^2$ nicht eindeutig bestimmt ist oder die Lösungsmenge leer ist. △

In $\mathbb{Z}/7\,\mathbb{Z}$ kann man die Inverse mittels der bekannten Formel berechnen $\big(5 \cdot 3 = 15 = 1 \mod 7$, $-\,2 = 5 \mod 7$, $-\,3 = 4 \mod 7$, $12 = 5 \mod 7\big)$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = 5^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -\,2 \\ -\,3 & 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\,.$$

In $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$ erhält man folgendes Resultat

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad b_1 = x = b_2\,,$$

$$b = (0,0): \ L(A,b) = \big\{(0,y) : y \in \{0,1\}\big\}\,, \quad b = (1,1): \ L(A,b) = \big\{(1,y) : y \in \{0,1\}\big\}\,,$$
$$b \in \big\{(0,1),(1,0)\big\}: \quad L(A,b) = \emptyset\,.$$

Erinnerung. Der Rang einer Matrix ist durch die Dimension des Bildes der zugehörigen Abbildung definiert

$$A \in \mathbb{K}^{m\times n}\,, \quad \mu_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m : v \longmapsto A\,v\,, \quad \text{rang}(A) = \dim_{\mathbb{K}} \big(\text{Bild}(\mu_A)\big)\,;$$

da das Bild der Abbildung durch die lineare Hülle der Spalten der Matrix gegeben ist (wichtiger Zusammenhang zwischen Matrix-Vektor-Produkten und Linearkombinationen)

$$\text{Bild}(\mu_A) = \big\{A\,v : v \in \mathbb{K}^n\big\} = \big\{v_1 A_{-1} + \cdots + v_n\,A_{-n} : v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}\big\}\,,$$

entspricht der Rang der Matrix der maximalen Anzahl linear unabhängiger Spalten. Daraus folgt, das der Rang gleich der maximalen Größe einer invertierbaren Untermatrix B von A ist, siehe Proposition 3.2.26; eine alternative Formulierung mittels Determinante lautet folgendermaßen.

Korollar 4.2.11. Der Rang einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ist durch die maximale Größe einer quadratischen Untermatrix B mit

$$\det(B) \neq 0$$

gegeben.

BEISPIEL. Der Rang der reellen Matrix

$$a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 2}\,,$$

ist $\operatorname{rang}(A) = 2$; da man die lineare Unabhängigkeit der zwei Spalten bereits an den ersten beiden Einträgen erkennt, ist es nicht notwendig, die restlichen Einträge zu untersuchen

$$\lambda_1 A_{-1} + \lambda_2 A_{-2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{wesentlich:} \quad \lambda_1 = 0\,, \quad \lambda_2 = 0\,, \\ \text{nicht benötigt}: \quad a\,\lambda_1 + c\,\lambda_2 = 0\,, \quad b\,\lambda_1 + d\,\lambda_2 = 0\,, \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0\,.$$

Zusätzliches Beispiel.

(i) Bestimmt man die Determinante der reellen (3×3)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 3\lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

mittels der Regel von Sarrus (hier für händische Rechnung vorteilhafter)

$$\det(A) = -12\lambda + 6\lambda - 12 - 6\lambda^2 = -6\left(\lambda^2 + \lambda + 2\right)$$

oder mittels eines Eliminationsschrittes und der bekannten Regel für die Determinante einer (2×2)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 3\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3+Z_1]{Z_2-\frac{\lambda}{2}Z_1} B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -(\lambda+2) & -\frac{3}{2}\lambda \\ 0 & 4 & 3(\lambda+1) \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -(\lambda+2) & -\frac{3}{2}\lambda \\ 4 & 3(\lambda+1) \end{pmatrix}, \quad \det(C) = -3(\lambda+2)(\lambda+1) + 6\lambda = -3(\lambda^2+\lambda+2),$$

$$\det(A) = \det(B) = 2\det(C) = -6\left(\lambda^2 + \lambda + 2\right),$$

so zeigt quadratisches Ergänzen, dass die Determinante echt kleiner als Null ist

$$\det(A) = -6\underbrace{\left(\underbrace{\left(\lambda + \tfrac{1}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \tfrac{7}{4}\right)}_{>0} < 0;$$

somit ist die Matrix für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ invertierbar

$$\forall\,\lambda \in \mathbb{R}: \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 3\,\lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ invertierbar}\,.$$

(ii) Würde man komplexe Zahlen $\lambda \in \mathbb{C}$ zulassen, gibt es zwei Fälle für welche die Matrix nicht invertierbar ist (verwende Faktorisierung $\mu^2 + c^2 = (\mu - \mathrm{i}\,c)\,(\mu + \mathrm{i}\,c)$)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 3\,\lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}, \quad \lambda \in \mathbb{C}\,,$$

$$\det(A) = -6\left(\left(\lambda + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{7}{4}\right) = -6\left(\lambda + \tfrac{1}{2} - \mathrm{i}\,\tfrac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(\lambda + \tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\,\tfrac{\sqrt{7}}{2}\right),$$

$$\det(A) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lambda \in \left\{-\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\,\tfrac{\sqrt{7}}{2}, -\tfrac{1}{2} - \mathrm{i}\,\tfrac{\sqrt{7}}{2}\right\},$$

$$\forall\,\lambda \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\,\tfrac{\sqrt{7}}{2}, -\tfrac{1}{2} - \mathrm{i}\,\tfrac{\sqrt{7}}{2}\right\}: \quad A \text{ invertierbar}\,.$$

Vgl. Illustration mittels Maple.

Determinante einer allgemeinen (2x2)-Matrix

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
  A := <<A11, A21>|<A12, A22>>;
  detA := Determinant(A);
```

$$A := \begin{bmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{bmatrix}$$

$$detA := A11\,A22 - A12\,A21 \tag{1}$$

Determinante einer allgemeinen (3x3)-Matrix
(Regel von Sarrus)

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
  A := <<A11, A21, A31>|<A12, A22, A32>|<A13, A23, A33>>;
  detA := Determinant(A);
```

$$A := \begin{bmatrix} A11 & A12 & A13 \\ A21 & A22 & A23 \\ A31 & A32 & A33 \end{bmatrix}$$

$$detA := A11\,A22\,A33 - A11\,A23\,A32 - A12\,A21\,A33 + A12\,A23\,A31 + A13\,A21\,A32 - A13\,A22\,A31 \tag{2}$$

Komplexität (Anzahl Permutationen)

```
> restart;
  for m from 3 to 10 do
    m, factorial(m);
  od;
```

$$3, 6$$
$$4, 24$$
$$5, 120$$
$$6, 720$$
$$7, 5040$$
$$8, 40320$$
$$9, 362880$$
$$10, 3628800 \tag{3}$$

Determinante einer Diagonalmatrix

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
  A := <<A11, 0, 0>|<0, A22, 0>|<0, 0, A33>>;
  detA := Determinant(A);
```

$$A := \begin{bmatrix} A11 & 0 & 0 \\ 0 & A22 & 0 \\ 0 & 0 & A33 \end{bmatrix}$$

$$detA := A11\,A22\,A33 \qquad \textbf{(4)}$$

Determinante einer Dreieckmatrix

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
  A := ⟨⟨A11, 0, 0⟩|⟨A12, A22, 0⟩|⟨A13, A23, A33⟩⟩;
  detA := Determinant(A);
```

$$A := \begin{bmatrix} A11 & A12 & A13 \\ 0 & A22 & A23 \\ 0 & 0 & A33 \end{bmatrix}$$

$$detA := A11\,A22\,A33 \qquad \textbf{(5)}$$

Elementarmatrizen
Zeilenvertauschung
Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl
Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
  A := ⟨⟨A11, A21, A31, A41⟩|⟨A12, A22, A32, A42⟩|⟨A13, A23, A33, A43⟩|⟨A14, A24, A34,
      A44⟩⟩;
```

$$A := \begin{bmatrix} A11 & A12 & A13 & A14 \\ A21 & A22 & A23 & A24 \\ A31 & A32 & A33 & A34 \\ A41 & A42 & A43 & A44 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(6)}$$

```
> P := ⟨⟨1, 0, 0, 0⟩|⟨0, 0, 0, 1⟩|⟨0, 0, 1, 0⟩|⟨0, 1, 0, 0⟩⟩;
  P . A;
  detP := Determinant(P);
```

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A11 & A12 & A13 & A14 \\ A41 & A42 & A43 & A44 \\ A31 & A32 & A33 & A34 \\ A21 & A22 & A23 & A24 \end{bmatrix}$$

$$detP := -1 \qquad \textbf{(7)}$$

```
> S := ⟨⟨1, 0, 0, 0⟩|⟨0, 1, 0, 0⟩|⟨0, 0, lambda, 0⟩|⟨0, 0, 0, 1⟩⟩;
```

$S . A;$
$detS := Determinant(S);$

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A11 & A12 & A13 & A14 \\ A21 & A22 & A23 & A24 \\ \lambda\, A31 & \lambda\, A32 & \lambda\, A33 & \lambda\, A34 \\ A41 & A42 & A43 & A44 \end{bmatrix}$$

$$detS := \lambda \qquad \textbf{(8)}$$

> $M := \langle\langle 1, 0, 0, \text{lambda}\rangle | \langle 0, 1, 0, 0\rangle | \langle 0, 0, 1, 0\rangle | \langle 0, 0, 0, 1\rangle\rangle;$
$M . A;$
$detM := Determinant(M);$

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A11 & A12 & A13 & A14 \\ A21 & A22 & A23 & A24 \\ A31 & A32 & A33 & A34 \\ \lambda\, A11 + A41 & \lambda\, A12 + A42 & \lambda\, A13 + A43 & \lambda\, A14 + A44 \end{bmatrix}$$

$$detM := 1 \qquad \textbf{(9)}$$

Beispiel

> $restart;$
$with(LinearAlgebra):$
$A := \langle\langle 1, 5, 9, 13\rangle | \langle 2, 6, 10, 14\rangle | \langle 3, 7, 11, 15\rangle | \langle 4, 8, 12, 16\rangle\rangle;$
$detA := Determinant(A);$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

$$detA := 0 \qquad \textbf{(10)}$$

Beispiel (endliche Körper)

> $restart;$

```
A := Matrix([[1, 2], [3, 4]]);
Inverse(A) mod 7;
b := Vector([b1, b2]);
Linsolve(A, b) mod 7;
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5\,b1 + b2 \\ 3\,b2 + 5\,b1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

```
> restart;
A := Matrix([[1, 2], [3, 4]]);
A mod 2;
b := Vector([0, 0]);
Linsolve(A, b) mod 2;
b := Vector([1, 1]);
Linsolve(A, b) mod 2;
b := Vector([0, 1]);
Linsolve(A, b) mod 2;
b := Vector([1, 0]);
Linsolve(A, b) mod 2;
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \_t_2 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \_t_2 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Linsolve\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$b := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Linsolve\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \tag{12}$$

Beispiel (Rang)

> *restart*;
> *with*(*LinearAlgebra*) :
> $A := \langle\langle 1, 0, a, b\rangle | \langle 0, 1, c, d\rangle\rangle$;
> *rangA* := *Rank*(A);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$rangA := 2 \tag{13}$$

Beispiel

> *restart*;
> *with*(*LinearAlgebra*) :
> $A := \langle\langle 2, \text{lambda}, -2\rangle | \langle 2, -2, 2\rangle | \langle 3, 0, 3 \cdot \text{lambda}\rangle\rangle$;
> *detA* := *Determinant*(A);
> *solve*(*detA*);

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 3\,\lambda \end{bmatrix}$$

$$detA := -6\,\lambda^2 - 6\,\lambda - 12$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{I\sqrt{7}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{I\sqrt{7}}{2} \tag{14}$$

>