Kapitel 2.1
Gauß-Algorithmus

VORSICHT! Bei linearen Gleichungssystemen mit einer einelementigen Lösungsmenge ist die Lösung eindeutig bestimmt, d.h. eine Verifizierung der "händisch" berechneten Lösung mittels Maple ist offensichtlich. Ansonsten ist es allerdings möglich, dass man abhängig von der Vorgehensweise (Wahl der Pivots) unterschiedliche Darstellungen der Lösungsmenge erhält. Eine Verifizierung der "händisch" berechneten Lösungsmenge mittels Maple erfordert deshalb möglicherweise zusätzliche Überlegungen.

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
```

Eingabe der Koeffizienten als Matrix und Vektor
Vorsicht! Angabe als Spalten (mit Kleinerzeichen < und Größerzeichen >)
Vorsicht! Multiplikation Matrix-Vektor mittels Punkt (nicht Mal-Punkt)
Erwartetes Ergebnis: Keine Lösung (Fehlermeldung: inkonsistente Gleichungen)

```
> A := <<1, 1>|<0, 0>>;
  b := <1, 2>;
  xx := <x, y> :
  A . xx = b;
  L := LinearSolve(A, b);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Error, (in LinearAlgebra:-LinearSolve) inconsistent system

Vergleich mit auf Folien angegebener Lösung (Gleichheit offensichtlich)

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
  A := <<2, 4>|<3, 6>>;
  b := <1, 2>;
  xx := <x, y> :
  A . xx = b;
  L := LinearSolve(A, b);
```

$$plot\left(\left\{\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot t, t, t = -\frac{1}{2} .. \frac{1}{2}\right], \left[t, \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\cdot t, t = -2 .. 2\right]\right\}\right);$$

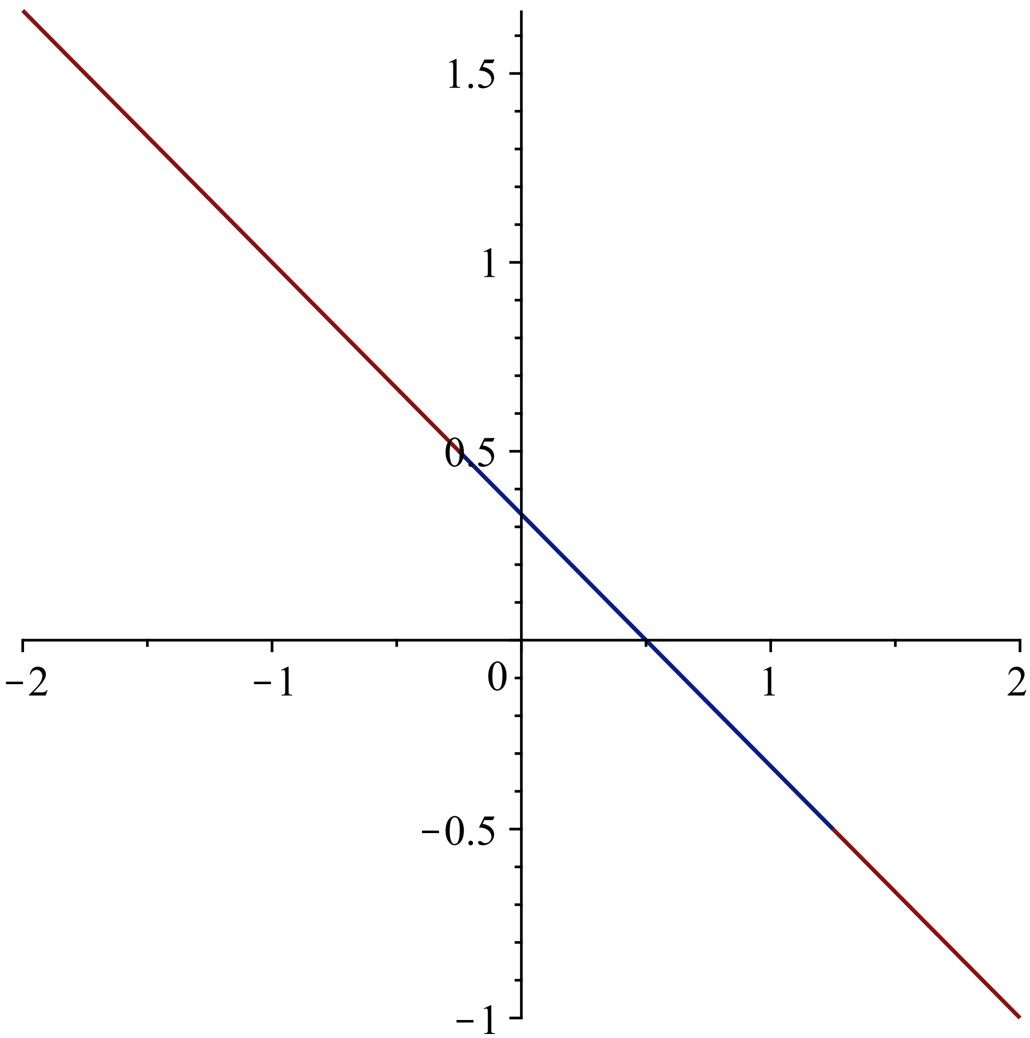
$$plot\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\cdot t, t = -2 .. 2\right);$$

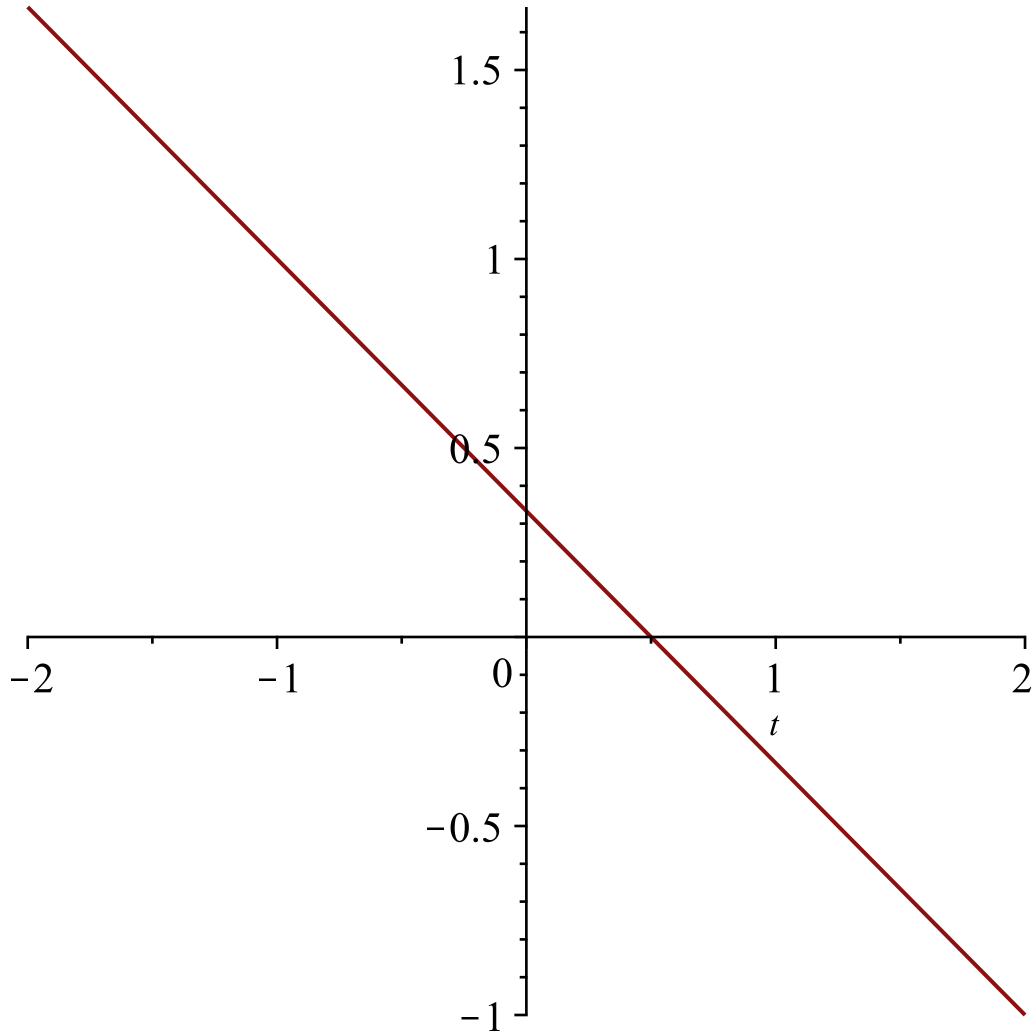
$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x + 3y \\ 4x + 6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$L := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3\,\_t_2}{2} \\ \_t_2 \end{bmatrix}$$





> $restart;$
$with(LinearAlgebra):$
$A := \left\langle \left\langle 2, \frac{1}{2} \right\rangle \middle| \langle 1, 1 \rangle \right\rangle;$
$b := \langle 10, 4 \rangle;$
$xx := \langle x, y \rangle :$
$A \,.\, xx = b;$
$L := LinearSolve(A, b);$

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

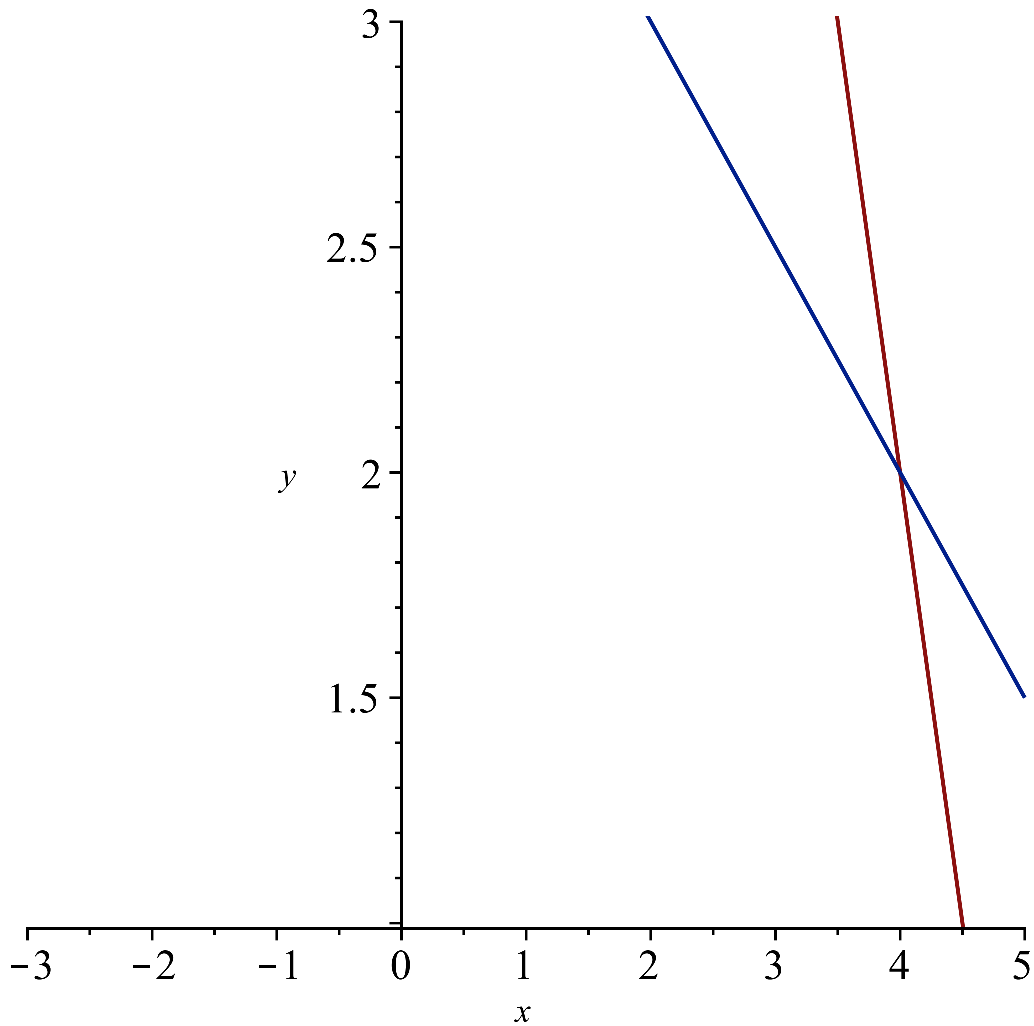
$$\begin{bmatrix} 2\,x + y \\ \frac{x}{2} + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$L := \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

> $g1 := x \rightarrow -2 \cdot x + 10;$
> $g2 := x \rightarrow -\frac{1}{2} \cdot x + 4;$
> $plot(\{g1(x), g2(x)\}, x = -3..5, y = 1..3);$

$$g1 := x \mapsto -2\,x + 10$$

$$g2 := x \mapsto -\frac{x}{2} + 4$$



Beispiel zur Zeilenstufenform
Anzahl Zeilen m = 4, Anzahl Spalten n = 6
r = 2: dritte (r+1) Zeile und vierte (m) Zeile enthält nur Nullen
Zeile mit Index i = 1: 4 Einträge verschieden von Null, kleinster Spaltenindex ist j1 = 2
Zeile mit Index i = 2 = r: 2 Einträge verschieden von Null, kleinster Spaltenindex ist j2 = 5
Bedingung j1 < j2 erfüllt

> $restart;$

$with(LinearAlgebra):$
$A := \langle \langle 0, 0, 0, 0\rangle | \langle 2, 0, 0, 0\rangle | \langle 3, 0, 0, 0\rangle | \langle 0, 0, 0, 0\rangle | \langle -1, 4, 0, 0\rangle | \langle 1, 3, 0, 0\rangle \rangle;$
$b := \langle 0, 0, 0, 0\rangle;$
$xx := \langle x1, x2, x3, x4, x5, x6\rangle :$
$A . xx = b;$
$LinearSolve(A, b);$

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\,x2 + 3\,x3 - x5 + x6 \\ 4\,x5 + 3\,x6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \_t_1 \\ -\frac{3\,\_t_3}{2} + \frac{7\,\_t_5}{6} \\ \_t_3 \\ \_t_4 \\ \_t_5 \\ -\frac{4\,\_t_5}{3} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Vgl. Skriptum

$> restart;$
$with(LinearAlgebra):$
$A := \left\langle \left\langle \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right\rangle \middle| \langle 2, 0, 0, 0\rangle \middle| \left\langle -\frac{3}{4}, 2, 0, 0\right\rangle \middle| \langle 0, 1, -1, 0\rangle \right\rangle;$
$b := \left\langle 9, -\frac{4}{3}, 2, 0\right\rangle;$
$xx := \langle x1, x2, x3, x4\rangle :$
$A . xx = b;$
$LinearSolve(A, b);$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 9 \\ -\frac{4}{3} \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{x1}{2} + 2\,x2 - \frac{3\,x3}{4} \\ 2\,x3 + x4 \\ -x4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -\frac{4}{3} \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{37}{2} - 4\,\_t_2 \\ \_t_2 \\ \frac{1}{3} \\ -2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Vgl. Skriptum

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
  A := ⟨⟨1, 5, 9⟩|⟨2, 6, 10⟩|⟨3, 7, 11⟩|⟨4, 8, 12⟩⟩;
  b := ⟨-1,-2,-3⟩;
  xx := ⟨x1, x2, x3, x4⟩ :
  A . xx = b;
  LinearSolve(A, b);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x1 + 2\,x2 + 3\,x3 + 4\,x4 \\ 5\,x1 + 6\,x2 + 7\,x3 + 8\,x4 \\ 9\,x1 + 10\,x2 + 11\,x3 + 12\,x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \_t_3 + 2\,\_t_4 \\ -\frac{3}{4} - 2\,\_t_3 - 3\,\_t_4 \\ \_t_3 \\ \_t_4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4)}$$

Allgemeines, eindeutig lösbares 2 x 2 System
VORSICHT! Maple "vergisst" auf Fall unendlich vieler Lösungen

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
  A := ⟨⟨a11, a21⟩|⟨a12, a22⟩⟩;
  b := ⟨b1, b2⟩;
  LinearSolve(A, b);
```

$$A := \begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{a12\,b2 - a22\,b1}{a11\,a22 - a12\,a21} \\ \frac{a11\,b2 - a21\,b1}{a11\,a22 - a12\,a21} \end{bmatrix} \quad \textbf{(5)}$$

ERGÄNZUNG:
Übliche Vorgehensweise bei Lösung von linearen Gleichungssystemen Ax = b mittels Computer (Numerische Lineare Algebra)
1) Bestimmung der LR-Zerlegung der Koeffizientenmatrix A (untere "lower" / obere "upper" Dreiecksmatrix): A = LR
2) Schrittweise Lösung von Ax = b mittels Ax = LRx = b, d.h. mit y = Rx folgt L(Rx) = Ly = b
Schritt 1: Löse Ly = b, d.h. bestimme y
Schritt 2: Löse Rx = y, d.h. bestimme x (hier unendlich viele Lösungen)

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
  A := ⟨⟨1, 5, 9⟩|⟨2, 6, 10⟩|⟨3, 7, 11⟩|⟨4, 8, 12⟩⟩;
  b := ⟨-1,-2,-3⟩;
  xx := ⟨x1, x2, x3, x4⟩ :
  P, L, R := LUDecomposition(A);
  UntereDreiecksmatrix := L;
  ObereDreiecksmatrix := R;
```

$y := LinearSolve(L, b);$
$x := LinearSolve(R, y);$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$P, L, R := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$UntereDreiecksmatrix := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$ObereDreiecksmatrix := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y := \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \_t0_3 + 2\,\_t0_4 \\ -\frac{3}{4} - 2\,\_t0_3 - 3\,\_t0_4 \\ \_t0_3 \\ \_t0_4 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Etwas andere Vorgehensweise bei "händischen" Berechnungen:
Vgl. Skriptum (A|b) -> (R|y)
Zeilenumformungen entsprechen Matrix L^{-1},
bei Umformung der erweiterten Koeffizientenmatrix erhält man R = L^{-1}A, y = L^{-1}b
L enthält Informationen zu elementaren Zeilenumformungen, wegen spezieller Form von L kann man Inverse L^{-1} leicht berechnen

```
> L;
  LInverse := MatrixInverse(L);
  L . LInverse;
  R;
  LInverse . A;
```

y;
$LInverse\ .\ b$;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$LInverse := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

> $L := \langle \langle 1, L21, L31 \rangle | \langle 0, 1, L32 \rangle | \langle 0, 0, 1 \rangle \rangle$;
$LInverse := MatrixInverse(L)$;
$L\ .\ LInverse$;

$$L := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L21 & 1 & 0 \\ L31 & L32 & 1 \end{bmatrix}$$

$$LInverse := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -L21 & 1 & 0 \\ L21\, L32 - L31 & -L32 & 1 \end{bmatrix}$$

(8)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8)}$$

> $L := \langle\langle 1, L21, L31, L41\rangle | \langle 0, 1, L32, L42\rangle | \langle 0, 0, 1, L41\rangle | \langle 0, 0, 0, 1\rangle\rangle;$
> $LInverse := MatrixInverse(L);$
> $simplify(L \,.\, LInverse);$

$$L := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L21 & 1 & 0 & 0 \\ L31 & L32 & 1 & 0 \\ L41 & L42 & L41 & 1 \end{bmatrix}$$

$$LInverse := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -L21 & 1 & 0 & 0 \\ L21\, L32 - L31 & -L32 & 1 & 0 \\ -L21\, L32\, L41 + L42\, L21 + L31\, L41 - L41 & L41\, L32 - L42 & -L41 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(9)}$$

>

>