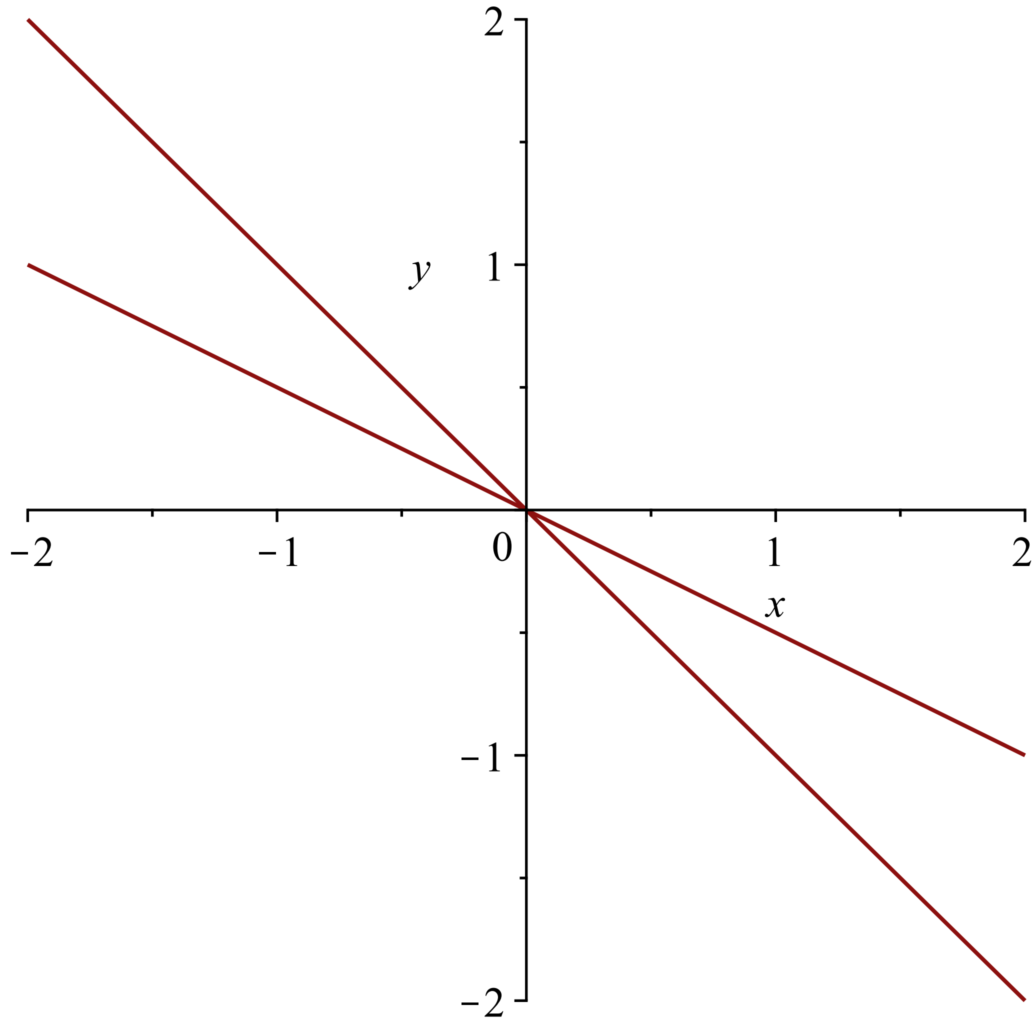
Generelle Bemerkung:
Veranschaulichung von Geraden im R^2 und deren Durchschnitt gut möglich
Veranschaulichung von Ebenen im R^3 schwieriger

Ad Bemerkung 3.1.4
Durchschnitt zweier Geraden durch Ursprung ergibt Untervektorraum

```
> restart;
  with(plots):
  G1 := x + y = 0;
  G2 := x + 2·y = 0;
  implicitplot({G1, G2}, x=-2..2, y=-2..2);
  solve({G1, G2});
```

$$G1 := x + y = 0$$

$$G2 := x + 2\,y = 0$$



$$\{x = 0, y = 0\} \tag{1}$$

Ad Lemma 3.1.12
Die Vereinigung der beiden Geraden ist offensichtlich KEIN Unterraum, es gilt jedoch folgende Aussage.
Betrachtet man G1 + G2 := {g1 + g2: g1 in G1, g2 in G2}, so erhält man die gesamte Ebene, denn

laut Lemma 3.1.12 ist G1 + G2 = span(G1 union G2) und andererseits span(G1 union G2) = R^2.
Wählt man beispielsweise v1 = (1,-1) in G1 (d.h. G1 = span(v1) = {lambda1 v1: lambda1 in R}) und v2 = (2,-1) in G2 (d.h. G2 = span(v2) = {lambda2 v2: lambda2 in R}), so lässt sich jeder Punkt der Ebene
w = (a,b) in R^2 also als Linearkombination von v1 und v2 darstellen.
Die Lösung eines linearen Gleichungssystemes ergibt w = - (a + 2 b) v1 + (a + b) v2;
anders ausgedrückt, mit g1 = - (a + 2 b) v1 und g2 = (a + b) v2 gilt w = g1 + g2.

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
  G1 := x + y = 0;
  G2 := x + 2·y = 0;
  v1 := ⟨1,-1⟩;
  subs({x = v1[1], y = v1[2]}, G1);
  v2 := ⟨2,-1⟩;
  subs({x = v2[1], y = v2[2]}, G2);
  w := ⟨a, b⟩;
  lambda1 · v1 + lambda2 · v2 = w;
  A := ⟨⟨1,-1⟩|⟨2,-1⟩⟩;
  A . ⟨lambda1, lambda2⟩;
  Sol := LinearSolve(A, w);
  g1 := Sol[1] · v1;
  subs({x = g1[1], y = g1[2]}, G1);
  g2 := Sol[2] · v2;
  subs({x = g2[1], y = g2[2]}, G2);
  g1 + g2 = w;
```

$$G1 := x + y = 0$$

$$G2 := x + 2\,y = 0$$

$$v1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$0 = 0$$

$$v2 := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$0 = 0$$

$$w := \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda 1 + 2\,\lambda 2 \\ -\lambda 1 - \lambda 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda 1 + 2\,\lambda 2 \\ -\lambda 1 - \lambda 2 \end{bmatrix}$$

$$Sol := \begin{bmatrix} -2\,b - a \\ b + a \end{bmatrix}$$

$$g1 := \begin{bmatrix} -2\,b - a \\ 2\,b + a \end{bmatrix}$$

$$0 = 0$$

$$g2 := \begin{bmatrix} 2\,b + 2\,a \\ -b - a \end{bmatrix}$$

$$0 = 0$$

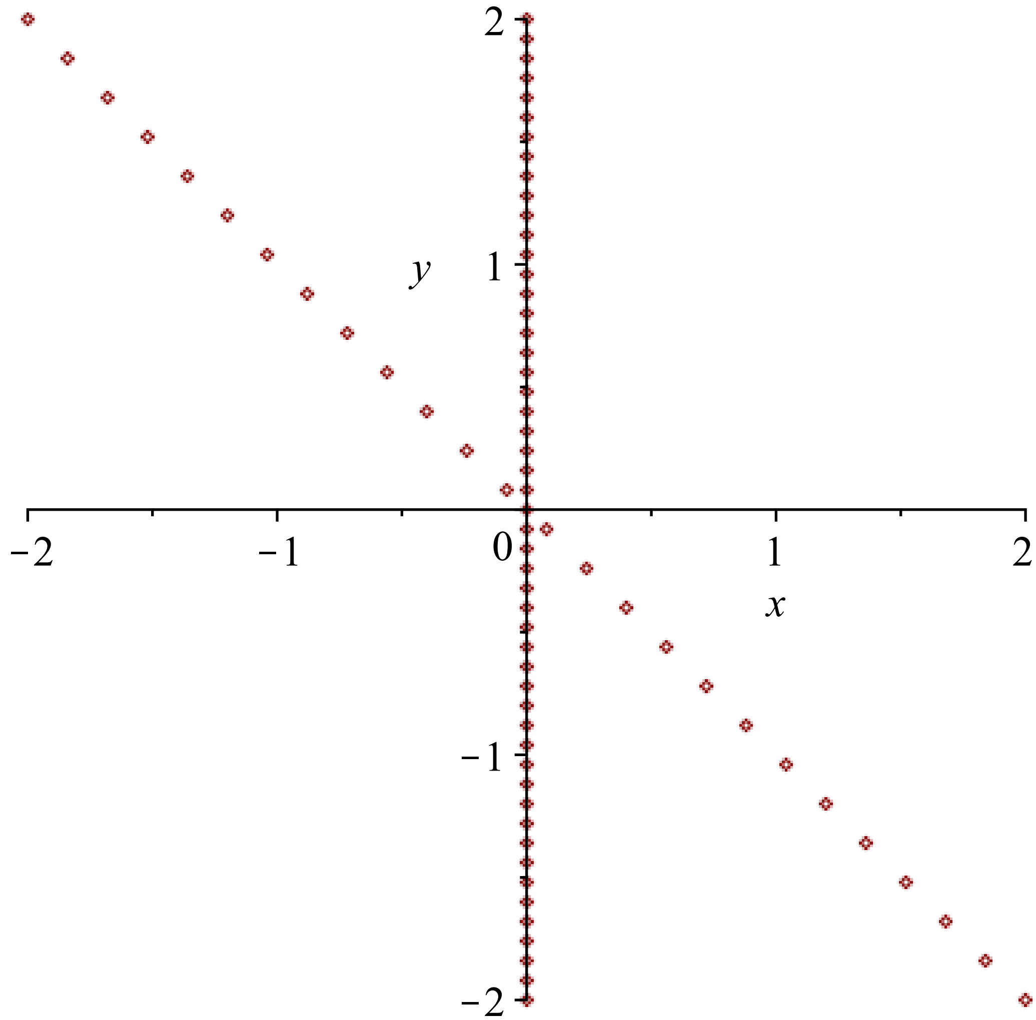
$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

Spezialfall einer Gerade, die nicht als Graph einer Funktion f: R -> R: x -> f(x) dargestellt werden kann

```
> restart;
  with(plots):
  G1 := x + y = 0;
  G3 := x = 0;
  implicitplot({G1, G3}, x = -2..2, y = -2..2, style = point);
  solve({G1, G3});
```

$$G1 := x + y = 0$$

$$G3 := x = 0$$



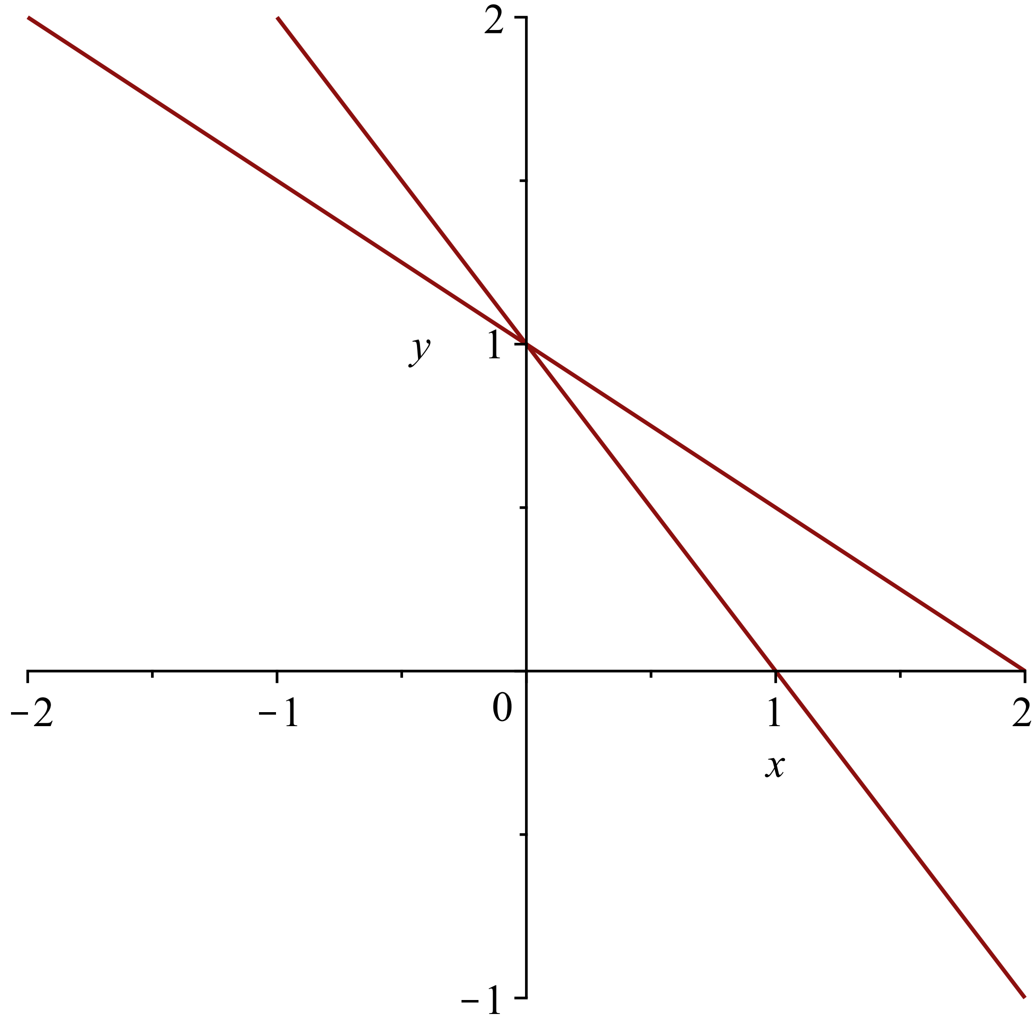
$$\{x = 0, y = 0\} \quad (3)$$

Durchschnitt zweier (allgemeiner) Geraden (affine Unterräume)

```
> restart;
  with(plots) :
  G1 := x + y = 1;
  G2 := x + 2·y = 2;
  implicitplot({G1, G2}, x = -2 ..2, y = -2 ..2);
  solve({G1, G2});
```

$$G1 := x + y = 1$$

$$G2 := x + 2\,y = 2$$



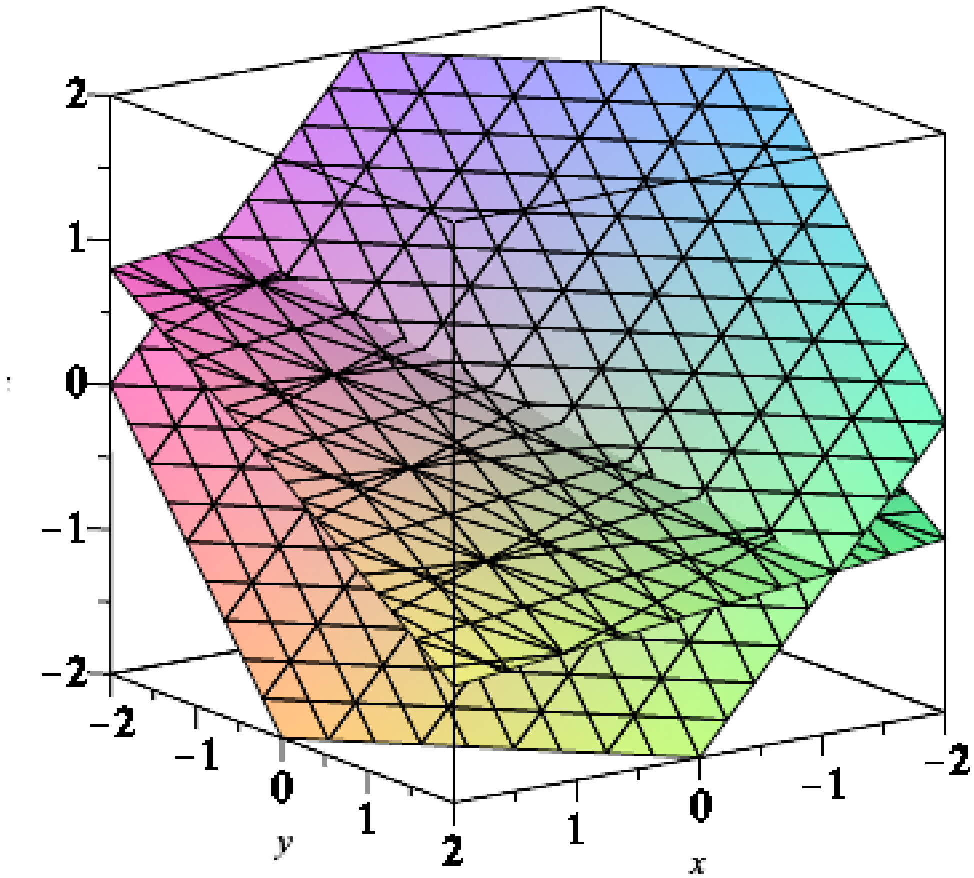
$$\{x=0, y=1\} \qquad \textbf{(4)}$$

Schnitt zweier / dreier Ebenen durch Ursprung ergibt Untervektorraum
Hier würde gelten E1 + E2 = R^3 oder auch E1 + E3 = R^3 oder auch E2 + E3 = R^3

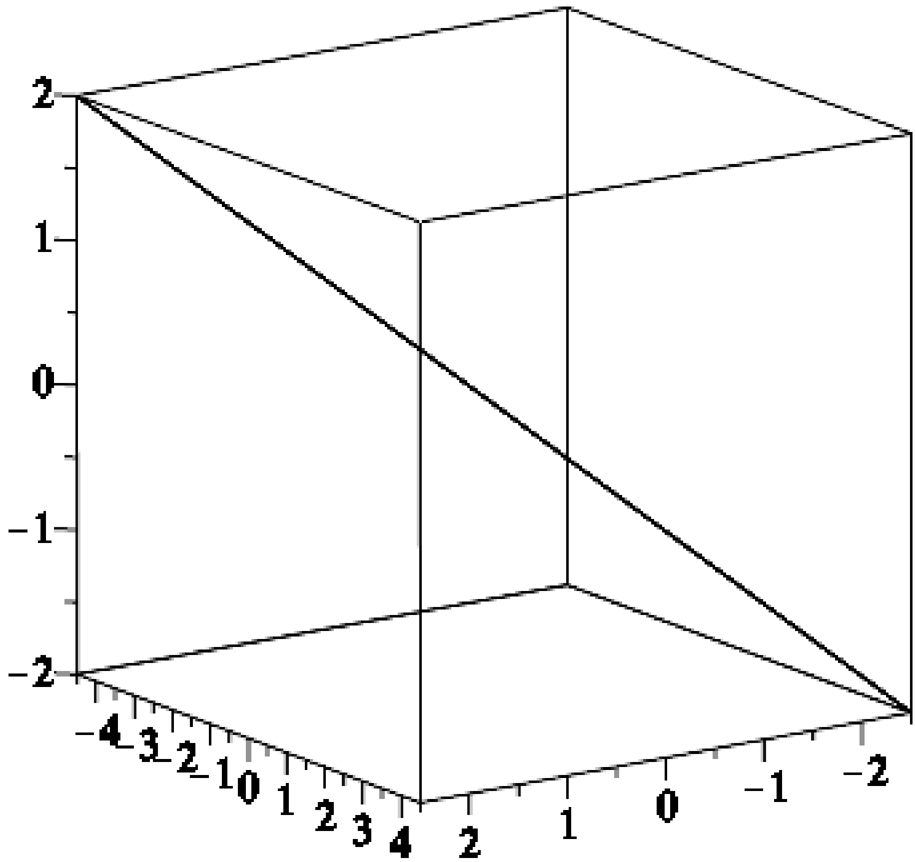
```
> restart;
  with(plots):
  E1 := x + y + z = 0;
  E2 := x + 5·y + 10·z = 0;
  implicitplot3d({E1, E2}, x = -2..2, y = -2..2, z = -2..2);
  solve({E1, E2});
  plot3d([5/4·z, -9/4·z, z], z = -2..2);
```

$$E1 := x+y+z=0$$

$$E2 := x+5\,y+10\,z=0$$

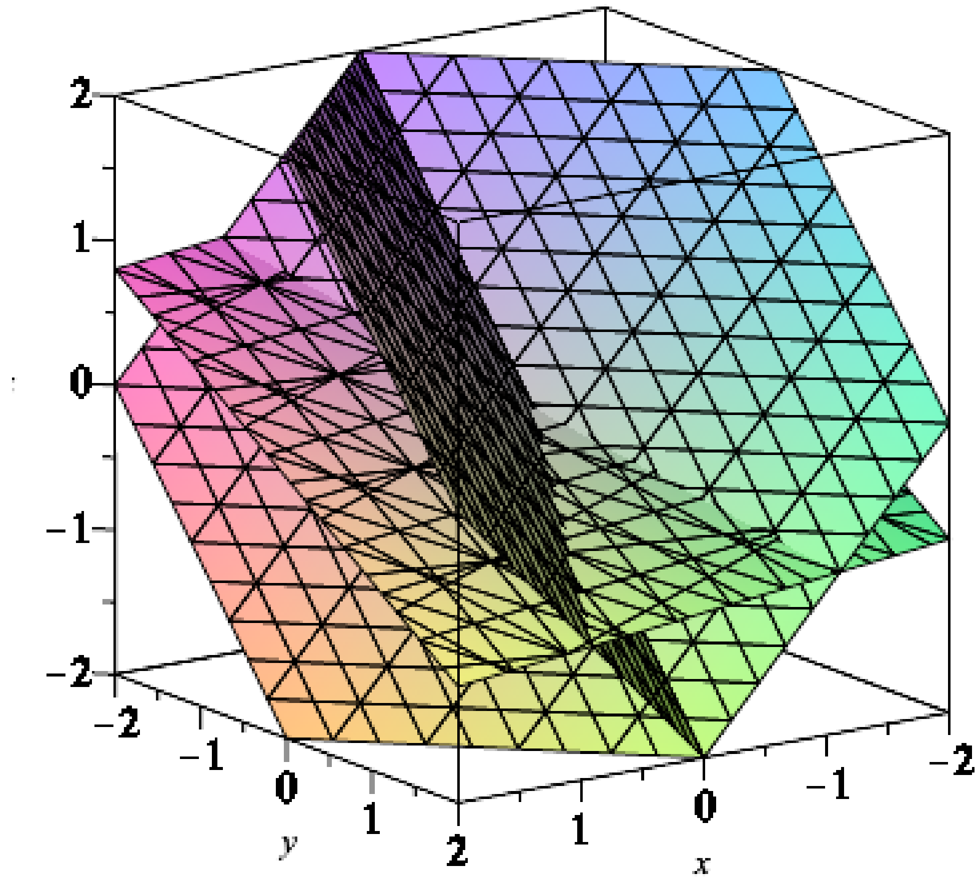


$$\left\{x = \frac{5\,z}{4}, y = -\frac{9\,z}{4}, z = z\right\}$$



> $E3 := x - y - z = 0;$
> $implicitplot3d(\{E1, E2, E3\}, x = -2..2, y = -2..2, z = -2..2);$
> $solve(\{E1, E2, E3\});$

$$E3 := x - y - z = 0$$



$$\{x = 0, y = 0, z = 0\} \quad (5)$$

>