Überprüfung der Überlegungen zu Satz 3.1.15

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
```

Definition der zugehörigen Matrix
Überprüfung des Zusammenhanges A lambda = lambda1 v1 + lambda2 v2 + lambda3 v3

```
> lambda := <lambda1, lambda2, lambda3>;
```

$$\lambda := \begin{bmatrix} \lambda 1 \\ \lambda 2 \\ \lambda 3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

```
> e1 := <1, 0, 0>;
  e2 := <0, 1, 0>;
  e3 := <0, 0, 1>;
  AStandardbasis := <e1|e2|e3>;
  AStandardbasis . lambda = lambda1·e1 + lambda2·e2 + lambda3·e3;
```

$$e1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$AStandardbasis := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda 1 \\ \lambda 2 \\ \lambda 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda 1 \\ \lambda 2 \\ \lambda 3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

```
> v1 := <1, 1, 1>;
  v2 := <1, -1, 1>;
  v3 := <1, -1, -1>;
  AAllgemein := <v1|v2|v3>;
  AAllgemein . lambda = lambda1·v1 + lambda2·v2 + lambda3·v3;
```

$$v1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v3 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$AAllgemein := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda 1 + \lambda 2 + \lambda 3 \\ \lambda 1 - \lambda 2 - \lambda 3 \\ \lambda 1 + \lambda 2 - \lambda 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda 1 + \lambda 2 + \lambda 3 \\ \lambda 1 - \lambda 2 - \lambda 3 \\ \lambda 1 + \lambda 2 - \lambda 3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Überprüfung der linearen Unabhängigkeit
Zugehöriges homogenes lineares Gleichungssystem hat Nulllösung als einzige Lösung

```
> LinearSolve(AStandardbasis, <0, 0, 0>);
  LinearSolve(AAllgemein, <0, 0, 0>);
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Eindeutige Darstellung eines Vektors als Linearkombination

```
> v := <a, b, c>;
  LinearSolve(AStandardbasis, v);
  LinearSolve(AAllgemein, v);
```

$$v := \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{b}{2} + \frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} + \frac{c}{2} \\ \frac{a}{2} - \frac{c}{2} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Maximale lineare Unabhängigkeit

> $BStandardbasis := \langle e1|e2|e3|v\rangle;$
> $LinearSolve(BStandardbasis, \langle 0, 0, 0\rangle);$
> $LinearSolve(AStandardbasis, v);$
> $BAllgemein := \langle v1|v2|v3|v\rangle;$
> $LinearSolve(BAllgemein, \langle 0, 0, 0\rangle);$
> $LinearSolve(AAllgemein, v);$

$$BStandardbasis := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -a\ \_t3_4 \\ -b\ \_t3_4 \\ -c\ \_t3_4 \\ \_t3_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$BAllgemein := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & -1 & b \\ 1 & 1 & -1 & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\,a\,\_t5_4 - \frac{1}{2}\,b\,\_t5_4 \\ \frac{(b-c)\,\_t5_4}{2} \\ -\frac{(a-c)\,\_t5_4}{2} \\ \_t5_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{b}{2} + \frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} + \frac{c}{2} \\ \frac{a}{2} - \frac{c}{2} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Minimales Erzeugendensystem

```
> lambda1·e1 + lambda2·e2 = e3;
  C := ⟨e1|e2⟩;
  C . ⟨lambda1, lambda2⟩ = e3;
  LinearSolve(C, e3)
```

$$\begin{bmatrix} \lambda 1 \\ \lambda 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda 1 \\ \lambda 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Error, (in LinearAlgebra:-LinearSolve) inconsistent system

Überlegungen zu Satz 3.1.18

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
  # Erzeugendensystem, linear abhängig
  v1 := ⟨1, 1, 1⟩;
  v2 := ⟨2, 2, 2⟩;
  v3 := ⟨1, -1, 1⟩;
  v4 := ⟨1, -1, -1⟩;
  LinearSolve(⟨v1|v2|v3|v4⟩, ⟨a, b, c⟩);
```

Vektor verschieden vom Nullvektor, somit linear unabhängig
$w1 := \langle 2,-2,2\rangle;$

$$v1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$v3 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v4 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2\,\_t_2 + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} \\ \_t_2 \\ -\frac{b}{2} + \frac{c}{2} \\ \frac{a}{2} - \frac{c}{2} \end{bmatrix}$$

$$w1 := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

> \# Ausgangsvektor, Erzeugendensystem NICHT gegeben (Widerspruch)
$A := \langle w1\rangle;$
$LinearSolve(A, \langle 0,0,0\rangle);$
$LinearSolve(A, \langle a,b,c\rangle);$

\# Ergänzung, Lineare Unabhängigkeit gegeben (nur Nulllösung), Erzeugendensystem NICHT gegeben
$A := \langle w1|v1\rangle;$
$LinearSolve(A, \langle 0,0,0\rangle);$
$LinearSolve(A, \langle a,b,c\rangle);$

\# Ergänzung, Lineare Unabhängigkeit NICHT gegeben
$A := \langle w1|v1|v2\rangle;$
$LinearSolve(A, \langle 0,0,0\rangle);$
\# $LinearSolve(A, \langle a,b,c\rangle);$

Ergänzung, Lineare Unabhängigkeit NICHT gegeben
$A := \langle w1 | v1 | v3 \rangle;$
$LinearSolve(A, \langle 0, 0, 0 \rangle);$
$LinearSolve(A, \langle a, b, c \rangle);$

Ergänzung, Lineare Unabhängigkeit gegeben, Erzeugendensystem gegeben
$A := \langle w1 | v1 | v4 \rangle;$
$LinearSolve(A, \langle 0, 0, 0 \rangle);$
$LinearSolve(A, \langle a, b, c \rangle);$

$$A := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

```
Error, (in LinearAlgebra:-LinearSolve) inconsistent system
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
Error, (in LinearAlgebra:-LinearSolve) inconsistent system
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2\, \_t4_3 \\ \_t4_3 \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \_t5_1 \\ 0 \\ -2\, \_t5_1 \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{b}{4} + \frac{c}{4} \\ \frac{b}{2} + \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} - \frac{c}{2} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(8)}$$

Basisergänzung (Beispiel 3.1.20)

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
  w1 := ⟨1, 1, 1⟩;
  w2 := ⟨2,-1, 1⟩;
  e1 := ⟨1, 0, 0⟩;
  A := ⟨w1|w2|e1⟩;
  LinearSolve(A, ⟨0, 0, 0⟩ );
```

$$w1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w2 := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(9)}$$