Eine Einführung in das Thema Differentialgleichungen

Mechthild Thalhammer
Leopold–Franzens Universität Innsbruck

Wintersemester 2020/21

Worum geht es (heute)?

Lernziel.

- Verständnis für Relevanz von Differentialgleichungen bei Modellierung dynamischer Prozesse

Wesentliche Lerninhalte (heute).

- Klärung des Begriffes gewöhnliche Differentialgleichung
- Zusammenhang mit Bewegungsgleichungen
- Beschreibung von Schwingungsprozessen
- Gegenüberstellung

$$\begin{cases} \text{nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen} \\ \text{lineare gewöhnliche Differentialgleichungen} \end{cases}$$

Begriffsbildung

Differentialgleichungen

Was versteht man unter Differentialgleichungen?

- Naheliegende Bezeichnung für Gleichungen, in denen Ableitungen von Funktionen auftreten.

Beispiel und Veranschaulichung

Sehr einfaches und dennoch wichtiges Beispiel.

- Differentialgleichung

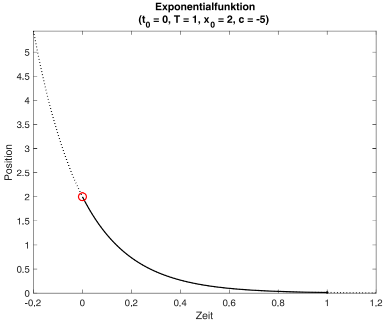
$$x'(t) = c\, x(t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

und Zusatzbedingung

$$x(0) = x_0$$

wird erfüllt von Funktion

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto x(t) = x_0\, \mathrm{e}^{c\,t}\,.$$



Veranschaulichung.

- Funktionswert $x(t)$ gibt Position eines Massenpunktes zum Zeitpunkt t an.

Präzisierung

Präzisierung des Begriffes.

- Unter einer gewöhnlichen Differentialgleichung versteht man eine Gleichung für eine Funktion in einer Veränderlichen, in der auch Ableitungen der Funktion auftreten.

Klassifizierung

(Grobe) Klassifizierung nach Schwierigkeitsgrad.

$$\begin{cases} \text{Skalare Differentialgleichungen} \\ \text{Systeme von Differentialgleichungen} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Differentialgleichungen der Ordnung 1, 2 etc.} \\ \text{(Ordnung der höchsten auftretenden Ableitungen)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Lineare Differentialgleichungen (homogen / inhomogen)} \\ \text{(Vgl. Lineare Gleichungssysteme)} \\ \text{Nichtlineare Differentialgleichungen} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Autonome Differentialgleichungen (keine explizite Zeitabhängigkeit)} \\ \text{Nichtautonome Differentialgleichungen (explizite Zeitabhängigkeit)} \end{cases}$$

Gegenüberstellung.

$$\begin{cases} \text{Gewöhnliche Differentialgleichungen (Fktn in einer Veränderlichen)} \\ \text{Partielle Differentialgleichungen (Fktn in mehreren Veränderlichen)} \end{cases}$$

Ab nun. Verwendung der Kurzbezeichnung Differentialgleichung (Dgl).

Allgemeine Form

Allgemeine Form eines Anfangswertproblemes.

- Zur Untersuchung mathematischer Fragestellungen ist es (meist) ausreichend, ein Anfangswertproblem der Form

$$\begin{cases} x'(t) = F\big(t, x(t)\big)\,, & t \in (t_0, T)\,, \\ x(t_0) = x_0\,, \end{cases}$$

für eine nichlineare nichtautonome Differentialgleichung erster Ordnung zu betrachten.

  - Vorgegeben: Die definierende Funktion (*rechte Seite*)

$$F : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d\,,$$

    Startzeitpunkt t_0 und Anfangswert x_0.
  - Gesucht: Eine Funktion (*Lösung*), welche die Differentialgleichung auf einem Intervall (t_0, T) sowie die Anfangsbedingung erfüllt

$$x : (t_0, T) \longrightarrow \mathbb{R}^d\,.$$

Anwendungsbereiche

Anwendungsbereiche

In welchen Anwendungsbereichen treten Differentialgleichungen auf?

- Insbesondere in Naturwissenschaften und Technik bei Modellierung dynamischer Prozesse.

Anwendungsbereiche

Wichtige Anwendungen.

- Modellierung von Schwingungsprozessen
  - Errichtung von Brücken, Gebäude etc.
  - Ausbreitung von (Ultra-)Schallwellen

Anwendungsbereiche

Einfacher Schwingungsvorgang.

- Schaukel, Pendel etc.

Einfaches Modell

Mathematisches Pendel (ohne Reibungseffekte)

Mathematisches Pendel

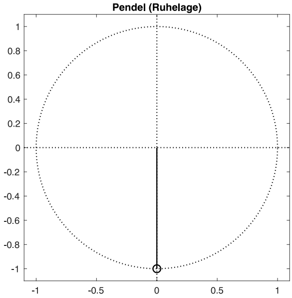
Idealisierte Situation.

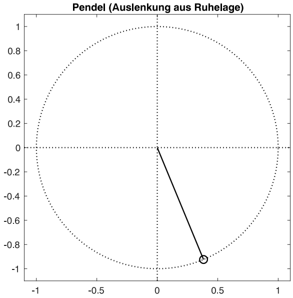
- Auf punktförmigen Körper (Masse m), fixiert an Faden (Länge ℓ), wirkt Schwerkraft (Fallbeschleunigung $g \approx 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$).

Mathematisches Pendel

Fragestellung.

- Auslenkung des Körpers aus Ruhelage. Vorgabe von Anfangsbedingungen (Anfangsposition, Anfangsgeschwindigkeit).





Wie verläuft Bewegung?

Mathematisches Pendel

Nichtlineare Differentialgleichung.

- Beschreibung der Bewegung eines Körpers mittels Grundprinzip der Klassischen Mechanik

$$\text{Masse} \times \text{Beschleunigung} = \text{Summe der einwirkenden Kräfte}\,.$$

- Führt auf nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für Auslenkungswinkel $\varphi : [0, T] \to \mathbb{R}$

$$\varphi''(t) = -\tfrac{g}{\ell}\,\sin\big(\varphi(t)\big)\,, \quad t \in (0, T)\,.$$

Zusatz. Herleitung durch Einführung von Polarkoordinaten / mittels Kreuzprodukt.
http://techmath.uibk.ac.at/mecht/MyHomepage/Teaching/Lecture_Modellierung.pdf

Berechnung der Lösung? Keine Lösungsdarstellung mittels elementarer Funktionen möglich.

Was nun?
Unterschiedliche Ansätze hilfreich – auch für andere Dgln! :-)

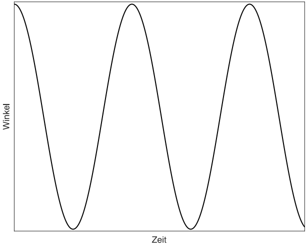
Mathematisches Pendel

Nichtlineare Differentialgleichung.

- Anwendung numerischer Methoden zur näherungsweisen Berechnung von Lösungswerten

$$\begin{cases} \varphi''(t) = -\frac{g}{\ell} \sin\big(\varphi(t)\big), & t \in (0,T), \\ \varphi(0), \varphi'(0) \ \text{vorgegeben}. \end{cases}$$

Zusatz. Approximation der Ableitung durch Differentialquotient führt auf einfaches Verfahren (explizites Eulerverfahren).



http://techmath.uibk.ac.at/mecht/MyHomepage/Research/MoviePendelNurNichtlinearZeitverlauf.m4v

Mathematisches Pendel

Linearisierte Differentialgleichung.

- Taylorreihenentwicklung (um Ruhelage $\varphi = 0$, sinnvoll unter Annahme $\varphi(t)$ *relativ klein*)

$$\sin\big(\varphi(t)\big) \approx \varphi(t)\,, \quad t \in (0,T)\,.$$

- Führt auf lineare Differentialgleichung

$$\begin{cases} \varphi''(t) = -\frac{g}{\ell}\,\varphi(t)\,, & t \in (0,T)\,,\\ \varphi(0), \varphi'(0) \ \text{vorgegeben}\,, \end{cases}$$

mit elementarer Lösungsdarstellung

$$\varphi(t) = \varphi(0)\cos(\omega t) + \varphi'(0)\,\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\,, \quad t \in (0,T)\,, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\,.$$

- Wesentliche Idee in Herleitung: Exponentialansatz (hilfreich für lineare Dgln mit konstanten Koeffizienten).

Mathematisches Pendel

Exponentialansatz. Bestimmung von Basislösungen der Differentialgleichung

$$\varphi''(t) + \omega^2 \varphi(t) = 0\,, \quad t \in (0,T)\,, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\,,$$

$$\text{Ansatz:} \quad \varphi(t) = \mathrm{e}^{ct}\,, \quad \varphi''(t) = c^2\,\mathrm{e}^{ct}\,,$$

$$\text{Einsetzen:} \quad \left(c^2 + \omega^2\right)\mathrm{e}^{ct} = 0\,,$$

$$\text{Quadratische Gleichung:} \quad c^2 + \omega^2 = 0\,,$$

$$\text{Komplexwertige Basislösungen:} \quad \begin{cases} c_1 = \mathrm{i}\,\omega\,, & \varphi_1(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}\,, \\ c_2 = -\mathrm{i}\,\omega\,, & \varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\,. \end{cases}$$

Nächstes Mal. Erklärung des Ansatzes mittels Formulierung als Differentialgleichungssystem erster Ordnung (Standardform, vgl. Beginn).

Mathematisches Pendel

Noch offen ... Bestimmung der Lösung, die zusätzlich Anfangsbedingungen erfüllt.

- **Superpositionsprinzip.** Linearkombination von (Basis-)Lösungen ist ebenfalls Lösung der Differentialgleichung

$$\varphi = C_1\,\varphi_1 + C_2\,\varphi_2\,, \quad \varphi'' = C_1 \underbrace{\varphi_1''}_{=-\omega^2\varphi_1} + C_2 \underbrace{\varphi_2''}_{=-\omega^2\varphi_2} = -\omega^2\,\varphi\,.$$

- **Lineares Gleichungssystem.** Bestimmung der Konstanten in Linearkombination mittels vorgegebenen Anfangsbedingungen durch Lösung des linearen Gleichungssystemes

$$C_1\,\varphi_1(0) + C_2\,\varphi_2(0) \overset{!}{=} \varphi(0)\,, \quad C_1\,\varphi_1'(0) + C_2\,\varphi_2'(0) \overset{!}{=} \varphi'(0)\,.$$

- **Euler'sche Formel.** Zusammenhang mit Cosinus/Sinus

$$\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}\,, \quad \varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\,,$$

$$\tfrac{1}{2}\big(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)\big) = \cos(\omega t)\,, \quad \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\big(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\big) = \sin(\omega t)\,.$$

Mathematisches Pendel

Abkürzung.

- Anwendung Euler'sche Formel (ebenfalls Lösungen der Dgl)

$$\cos(\omega t) = \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\big), \quad \sin(\omega t) = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\big).$$

- Bestimmung der Konstanten (nun einfacheres Gleichungssystem)

$$\varphi(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t), \quad \varphi'(t) = -\omega C_1 \sin(\omega t) + \omega C_2 \cos(\omega t),$$

$$C_1 \stackrel{!}{=} \varphi(0), \quad \omega C_2 \stackrel{!}{=} \varphi'(0).$$

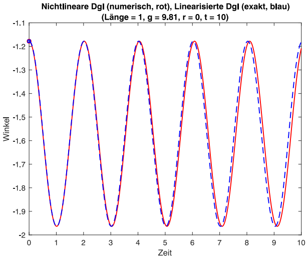
- Gesuchte Lösungsdarstellung

$$\begin{cases} \varphi''(t) = -\omega^2 \varphi(t), \\ \varphi(0), \varphi'(0) \ \text{vorgegeben}, \end{cases}$$

$$\varphi(t) = \varphi(0) \cos(\omega t) + \varphi'(0) \tfrac{1}{\omega} \sin(\omega t), \quad t \in (0, T).$$

Veranschaulichung

Vergleich nichtlineare und linearisierte Differentialgleichung (ohne Reibungseffekte, $r = 0$)



http://techmath.uibk.ac.at/mecht/MyHomepage/Research/MoviePendelOhneReibung.m4v

Beobachtung.

- Erkennbarer Unterschied zwischen nichtlinearem und linearem Modell. Approximation des nichtlinearen Modelles durch lineares Modell für *kleine* Auslenkungswinkel und *kurze* Zeiten passabel.

Versuch – Mathematisches Modell und reeller Vorgang

Versuch (Pendel).

- Verwendung von einfachen, zu Hause verfügbaren Mitteln
- Vorgabe der Schnurlänge
  Bestimmung der Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit

Versuch – Mathematisches Modell und reeller Vorgang

Versuch (Pendel).

- Resultat:

$$\begin{aligned}&\text{Länge (in etwa) } 15\,\text{cm}: &&\text{(in etwa) } 152 \text{ Schwingungen pro Minute},\\ &\text{Länge (in etwa) } 30\,\text{cm}: &&\text{(in etwa) } 108 \text{ Schwingungen pro Minute}.\end{aligned}$$

- Beobachtung: Bei Berechnung von Verhältnissen erkennt man näherungsweise Übereinstimmung

$$\sqrt{\frac{\text{Länge 2}}{\text{Länge 1}}} = \sqrt{\frac{30}{15}} = \sqrt{2} = 1.414\ldots \quad \approx \quad \frac{\text{Anzahl 1}}{\text{Anzahl 2}} = \frac{152}{108} = 1.407\ldots$$

Einzelfall oder allgemein gültiger Zusammenhang?

Versuch – Mathematisches Modell und reeller Vorgang

Modell und Versuch (Pendel).

- Im Versuch wurde passable Übereinstimmung beobachtet

$$\begin{aligned} \text{Verhältnis Frequenzen} &\approx \frac{1}{\sqrt{\text{Verhältnis Längen}}}\,, \\ 1.407 &\approx 1.414\,. \end{aligned}$$

- Wird beispielsweise durch Lösung des linearen Modelles bestätigt

$$\varphi''(t) = -\,\tfrac{g}{\ell}\,\varphi(t)\,,$$

$$\omega = \sqrt{\tfrac{g}{\ell}}\,, \quad \varphi(t) = \varphi(0)\,\cos(\omega t) + \varphi'(0)\,\tfrac{1}{\omega}\,\sin(\omega t)\,,$$

$$\text{Frequenz der Schwingung} = \sqrt{\frac{\text{Fallbeschleunigung}}{\text{Länge des Pendels}}}\,.$$

Fazit

Fazit.

- Näherungsweise Lösung von nichtlinearen Differentialgleichungen.
- Herleitung einer elementaren Lösungsdarstellung für linearen Differentialgleichungen (mit konstanten Koeffizienten).
  - Exponentialansatz,
  - Superpositionsprinzip,
  - lineares Gleichungssystem.

Ausblick

Nochmals ... allgemeiner ...

Grundprinzip der Klassischen Mechanik.

- Beschreibung der Bewegung eines Körpers mittels physikalischem Gesetz (Axiom von Newton)

$$\text{Masse} \times \text{Beschleunigung} = \text{Summe der einwirkenden Kräfte}\,.$$

Differentialgleichung.

- Gleichung entspricht Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$m\,x''(t) = F\big(t, x(t), x'(t)\big)\,, \quad t \in (t_0, T)\,,$$

$$\begin{cases} \text{Position des Körpers (im Raum)} \;\; x : (t_0, T) \longrightarrow \mathbb{R}^3\,, \\ \text{Geschwindigkeit} \;\; x' : (t_0, T) \longrightarrow \mathbb{R}^3\,, \\ \text{Beschleunigung} \;\; x'' : (t_0, T) \longrightarrow \mathbb{R}^3\,. \end{cases}$$

Allgemeine Beobachtung. Nur für sehr überschaubare Anzahl von (wenig realitätsnahen) nichtlinearen Differentialgleichungen kann man die / eine Lösung berechnen.

Erweiterte Modelle

Erweiterte Modelle. Zuvor beschriebene Vorgehensweise (Anwendung numerischer Verfahren für nichtlineare Differentialgleichungen, Herleitung elementarer Lösungsdarstellungen für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten) ermöglicht Betrachtung erweiterter Modelle.

Mathematisches Pendel.

- Berücksichtigung zusätzlicher Reibungseffekte ($R(0) = 0$)

$$\varphi''(t) = -\omega^2 \sin\big(\varphi(t)\big) - R\big(\varphi'(t)\big), \quad t \in (t_0, T).$$

- Zugehörige linearisierte Differentialgleichung (konstante Koeffizienten)

$$\varphi''(t) = -\omega^2 \varphi(t) - r\,\varphi'(t), \quad t \in (t_0, T).$$

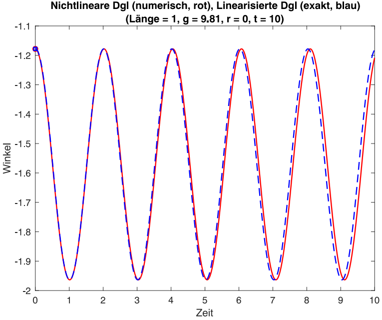
Nächstes Mal. Lösung des Anfangswertproblemes mittels systematischem Verfahren.

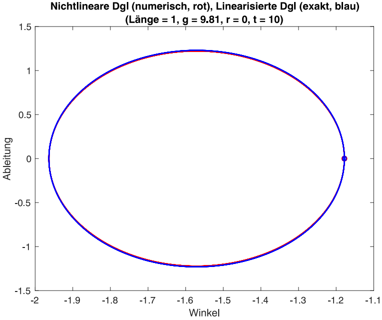
Veranschaulichung

Vergleich nichtlineare und linearisierte Differentialgleichung (ohne Reibungseffekt)

http://techmath.uibk.ac.at/mecht/MyHomepage/Research/MoviePendelOhneReibung.m4v

Zeitlicher Verlauf, Phasendiagramm (Periodische Schwingung)



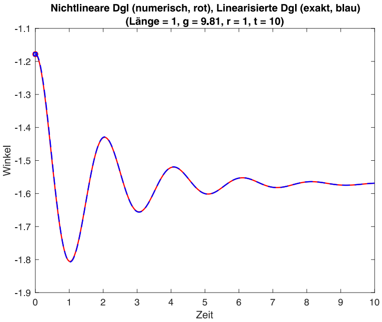


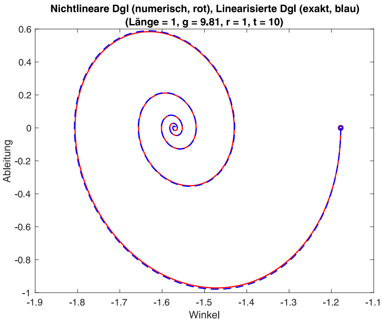
Veranschaulichung

Vergleich nichtlineare und linearisierte Differentialgleichung (mit linearem Reibungseffekt)

http://techmath.uibk.ac.at/mecht/MyHomepage/Research/MoviePendelMitReibung.m4v

Zeitlicher Verlauf, Phasendiagramm (Abklingen)





Lineare Schwingungsgleichungen

- **Systematisches Lösungsverfahren für allgemeine lineare Schwingungsgleichungen**
  - Formulierung als Differentialgleichungssystem erster Ordnung
  - Bestimmung der Lösung des homogenen Systemes (Eigenwertzerlegung, Matrixexponentialfunktion)
  - Bestimmung der Lösung des inhomogenen Systemes (Variation-der-Konstanten-Formel)
- **Erklärung von Resonanzphänomenen**

**Gewöhnliche Differentialgleichungen:
Ein grundlegendes Thema
mit vielfältigen Anwendungen
in Naturwissenschaften und Technik**

Dankeschön!