

Schwingungsgleichungen

Literaturquelle.

Skriptum von Peter Wagner zur Vorlesung *Mathematik A*
Kapitel IV.17 Die Schwingungsgleichung
<http://mat1.uibk.ac.at/wagner/skripten.html>

Wesentliche Inhalte.

(1) *Physikalisches Modell.*

- *Klassische Mechanik (Newtonsche Axiome).*

Die Bewegung eines Körpers wird mittels einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben

$$\text{Masse} \times \text{Beschleunigung} = \text{Summe der einwirkenden Kräfte.}$$

Bei Vorgabe zusätzlicher Anfangsbedingungen (Anfangsposition und Anfangsgeschwindigkeit) ist die Bewegung des Körpers eindeutig bestimmt.

Dies führt auf ein Anfangswertproblem der Form

$$\begin{cases} y''(t) = F(t, y(t), y'(t)), & t \in [0, T], \\ y(0) \text{ gegeben, } y'(0) \text{ gegeben.} \end{cases}$$

- *Spezielle Situation (Schwingungsgleichung).*

Körper der Masse $m > 0$ (zur Vereinfachung Normierung $m = 1$).

Einwirkung einer linearen Federkraft (Rückstellkraft proportional zur Auslenkung der Feder aus der Ruhelage, Federkonstante $k > 0$)

$$F_{\text{Feder}}(t) = -k y(t).$$

Einwirkung einer linearen Reibungskraft (dämpfende Kraft proportional zur Geschwindigkeit, Reibungskonstante $r > 0$, Spezialfall $r = 0$ bei einer ungedämpften Schwingung)

$$F_{\text{Reibung}}(t) = -r y'(t).$$

Zusätzliche Einwirkung einer zeitabhängigen äußeren Kraft $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto f(t)$.

Zu bestimmen ist die Auslenkung des Körpers aus der Ruhelage bei Vorgabe der Anfangsposition und der Anfangsgeschwindigkeit, d.h. eine zeitabhängige Funktion $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto y(t)$, welche das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y''(t) + r y'(t) + k y(t) = f(t), & t \in [0, T], \\ y(0) \text{ gegeben, } y'(0) \text{ gegeben,} \end{cases}$$

erfüllt. Im Spezialfall einer ungedämpften Schwingung (d.h. $r = 0$) erwartet man eine periodische Funktion als Lösung.

- (2) *Umformulierung als Differentialgleichungssystem erster Ordnung.* Zur Bestimmung der Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist es zweckmäßig, diese als ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung zu formulieren. Mittels

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix},$$

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -k y_1(t) - r y_2(t) + f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

ergibt sich das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t) + b(t), & t \in [0, T], \\ Y(0) \text{ gegeben,} \end{cases}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -r \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

- (3) *Eigenwertzerlegung.* Im generischen Fall $r^2 - 4k \neq 0$ besitzt die Matrix A zwei voneinander verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2$, die ein Eigensystem des \mathbb{C}^2 bilden, und somit ergibt sich die Zerlegung

$$r^2 - 4k \neq 0: \quad A = V\Lambda V^{-1},$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}r < 0, \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - 4k} = i\gamma,$$

$$\lambda_1 = \alpha - \beta = \alpha - i\gamma, \quad \lambda_2 = \alpha + \beta = \alpha + i\gamma,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man beachte, daß im Spezialfall einer ungedämpften Schwingung die Relationen

$$r = 0: \quad \alpha = 0, \quad \beta = i\sqrt{k}, \quad \gamma = \sqrt{k},$$

folgen.

Exponentialfunktion. Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit Eigenzerlegung $A = V\Lambda V^{-1}$ ist die zugehörige Matrixexponentialfunktion gegeben durch (wegen $A^j = V\Lambda^j V^{-1}$ für $j \in \mathbb{N}$)

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j = V \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j \Lambda^j \right) V^{-1} = V e^{t\Lambda} V^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Inbesondere ergibt sich

$$\begin{aligned}
 e^{tA} &= V e^{t\Lambda} V^{-1} \\
 &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{t\lambda_1} & -e^{t\lambda_1} \\ -\lambda_1 e^{t\lambda_2} & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{t\lambda_1} - \lambda_1 e^{t\lambda_2} & e^{t\lambda_2} - e^{t\lambda_1} \\ \lambda_1 \lambda_2 (e^{t\lambda_1} - e^{t\lambda_2}) & \lambda_2 e^{t\lambda_2} - \lambda_1 e^{t\lambda_1} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},
 \end{aligned}$$

und mittels $\lambda_1 = \alpha - \beta$ sowie $\lambda_2 = \alpha + \beta$ folgt

$$\begin{aligned}
 e^{tA} &= \frac{1}{2\beta} e^{t\alpha} \begin{pmatrix} (\alpha + \beta) e^{-t\beta} - (\alpha - \beta) e^{t\beta} & e^{t\beta} - e^{-t\beta} \\ (\beta - \alpha)(\alpha + \beta)(e^{t\beta} - e^{-t\beta}) & (\alpha + \beta) e^{t\beta} - (\alpha - \beta) e^{-t\beta} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\beta} e^{t\alpha} \begin{pmatrix} -\alpha(e^{t\beta} - e^{-t\beta}) + \beta(e^{t\beta} + e^{-t\beta}) & e^{t\beta} - e^{-t\beta} \\ (\beta^2 - \alpha^2)(e^{t\beta} - e^{-t\beta}) & \alpha(e^{t\beta} - e^{-t\beta}) + \beta(e^{t\beta} + e^{-t\beta}) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\beta} e^{t\alpha} \begin{pmatrix} -\alpha \sinh(t\beta) + \beta \cosh(t\beta) & \sinh(t\beta) \\ (\beta^2 - \alpha^2) \sinh(t\beta) & \alpha \sinh(t\beta) + \beta \cosh(t\beta) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Resultat (Verschiedene Eigenwerte). Multiplikation mit $C = (C_1, C_2)^T \in \mathbb{R}^2$ führt auf

$$\begin{aligned}
 e^{tA} C &= \frac{1}{\beta} e^{t\alpha} \begin{pmatrix} -\alpha \sinh(t\beta) + \beta \cosh(t\beta) & \sinh(t\beta) \\ (\beta^2 - \alpha^2) \sinh(t\beta) & \alpha \sinh(t\beta) + \beta \cosh(t\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\
 &= e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} (-C_1 \alpha + C_2) \sinh(t\beta) + C_1 \cosh(t\beta) \\ \frac{1}{\beta} (C_1 (\beta^2 - \alpha^2) + C_2 \alpha) \sinh(t\beta) + C_2 \cosh(t\beta) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Resultat (Doppelter Eigenwert). Im Spezialfall eines doppelten Eigenwertes existiert kein Eigensystem, jedoch führt dann der Grenzübergang $\beta \rightarrow 0$ und somit $\frac{\sinh(t\beta)}{t\beta} \rightarrow 1$ und $\cosh(t\beta) \rightarrow 1$ auf das Ergebnis

$$e^{tA} C = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} (-C_1 \alpha + C_2) t + C_1 \\ (C_1 (\beta^2 - \alpha^2) + C_2 \alpha) t + C_2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (4) *Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems.* Die Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems, genauer des Anfangswertproblems (mit $Y = (y, y')^T$)

$$\begin{cases} Y'(t) = A Y(t), & t \in [0, T], \\ Y(0) \text{ gegeben,} \end{cases}$$

ist gegeben durch

$$Y(t) = e^{tA} Y(0), \quad t \in [0, T].$$

In Hinblick auf das Lösungsverhalten unterscheidet man folgende Fälle.

- (i) *Periodischer Fall.* Falls $r^2 - 4k < 0$ bzw. $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{4k - r^2} > 0$ ergibt sich aus den obigen Überlegungen (zusätzliches Ersetzen $\beta = i\gamma$ und $2 \sinh(i\xi) = e^{i\xi} - e^{-i\xi} = 2i \sin \xi$ sowie $2 \cosh(i\xi) = e^{i\xi} + e^{-i\xi} = 2 \cos \xi$)

$$\alpha = -\frac{1}{2}r \leq 0, \quad \gamma = \frac{1}{2}\sqrt{4k - r^2} > 0,$$

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} (-y(0)\alpha + y'(0)) \sin(t\gamma) + y(0) \cos(t\gamma) \\ \frac{1}{\gamma} (-y(0)(\alpha^2 + \gamma^2) + y'(0)\alpha) \sin(t\gamma) + y'(0) \cos(t\gamma) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T].$$

- (ii) *Aperiodischer Fall.* Falls $r^2 - 4k > 0$ bzw. $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - 4k} > 0$ erhält man die Lösungsdarstellung

$$\alpha = -\frac{1}{2}r < 0, \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - 4k} > 0,$$

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} (-y(0)\alpha + y'(0)) \sinh(t\beta) + y(0) \cosh(t\beta) \\ \frac{1}{\beta} (y(0)(\beta^2 - \alpha^2) + y'(0)\alpha) \sinh(t\beta) + y'(0) \cosh(t\beta) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T].$$

- (iii) *Aperiodischer Grenzfall.* Speziell für $r^2 - 4k = 0$ bzw. $\beta = 0 = \gamma$ folgt

$$\alpha = -\frac{1}{2}r < 0, \quad \beta = 0 = \gamma,$$

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} y(0) + (-y(0)\alpha + y'(0))t \\ y'(0) + (-y(0)\alpha^2 + y'(0)\alpha)t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T].$$

- (5) *Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems.* Für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t) + b(t), & t \in [0, T], \\ Y(0) \text{ gegeben,} \end{cases}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -r \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix},$$

ergibt sich mittels der linearen Variation-der-Konstanten Formel die Lösungsdarstellung

$$Y(t) = e^{tA}Y(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A} b(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Spezialfall. Setzt man speziell $Y(0) = 0$ so ergibt sich die Lösungsdarstellung

$$Y(0) = 0: \quad y(t) = \frac{1}{\gamma} \int_0^t e^{(t-\tau)\alpha} \sin((t-\tau)\gamma) f(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Illustration.

(1) Einfache Spezialfälle