Reelle Zahlen

Literaturquelle.

Skriptum von Peter Wagner zur Vorlesung *Mathematik A*
Kapitel I. Grundlagen
Kapitel I.1. Zeichen, Mengen, Zahlen
http://mat1.uibk.ac.at/wagner/skripten.html

Theoretischer Hintergrund.

(1) *Zahlenbereich.* Die Menge der reelle Zahlen bildet (insbesondere in der Analysis) einen wichtigen Zahlenbereich.

Übliche Bezeichnung: $\mathbb{R}$

Grundlegende Zahlenbereiche sind $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

- Natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$.
- Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.
- Die Hinzunahme der irrationalen Zahlen zur Menge der rationalen Zahlen führt auf die Menge der reellen Zahlen. Man unterscheidet irrationale algebraische Zahlen (d.h. reelle Lösungen von Polynomgleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten wie z.B. $\sqrt{2}$) und transzendente Zahlen (z.B. Eulersche Zahl e, π).
- Komplexe Zahlen $\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y : x, y \in \mathbb{R}\}$ (wobei $\mathrm{i}^2 = -1$).

(2) *Veranschaulichung als Zahlengerade.* Die Menge aller Punkte der Zahlengerade (Auszeichnung des Nullpunktes, Wahl einer Einheitslänge, Lückenlose Anordnung der positiven und negativen Zahlen) ergibt $\mathbb{R}$.

(3) *Intervallschreibweise.* Übliche Kurzschreibweisen für spezielle Teilmengen (offene, abgeschlossene oder halboffene Intervalle) sind

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \subset \mathbb{R}, \\
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}, \\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \subset \mathbb{R}, \\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \subset \mathbb{R},
\end{aligned}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Die Einführung des Symboles ∞ ermöglicht praktische Kurzschreibweisen wie etwa

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \subset \mathbb{R}, \qquad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \subset \mathbb{R}.$$

(4) *Vollständigkeit.* Im Gegensatz zur Menge der rationalen Zahlen besitzt die Menge der reellen Zahlen die Eigenschaft der Vollständigkeit.

- Jede Cauchyfolge von reellen Zahlen besitzt einen Grenzwert in $\mathbb{R}$.
- Zu einer Folge von *geschachtelten* Intervallen gibt es genau eine reelle Zahl, die in allen Intervallen liegt.

(5) *Konstruktion.* Die Menge der reellen Zahlen wird als Zahlbereichserweiterung der rationalen Zahlen konstruiert, üblicherweise mittels Äquivalenzklassen von rationalen Cauchyfolgen.

- Zwei rationale Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißen äquivalent, wenn $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge bildet. Die reellen Zahlen werden als Äquivalenzklassen rationaler Cauchyfolgen definiert.
- Die Menge der rationalen Zahlen bildet einen total geordneten Körper. Diese Eigenschaft überträgt sich auf die Menge der reellen Zahlen.

(6) *Axiomatische Einführung.* Eine Alternative zur Konstruktion der reellen Zahlen als Zahlenbereichserweiterung der rationalen Zahlen beruht auf der axiomatischen Einführung der reellen Zahlen.

- Die reellen Zahlen bilden einen Körper.
- Die reellen Zahlen sind total geordnet.
- Alternative Charakterisierungen.
  - Es gilt das Archimedische Axiom (d.h. für positive reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ so daß $nx > y$) und das Vollständigkeitsaxiom (d.h. jede Cauchyfolge von reellen Zahlen konvergiert in $\mathbb{R}$).
  - Es gilt das archimedische Axiom und das Intervallschachtelungsaxiom (d.h. der Durchschnitt jeder Folge von abgeschlossenen beschränkten und ineinander geschachtelten Intervallen ist nichtleer).
  - Jede nichtleere und nach oben beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Supremum.

Beispiele. Vgl. Graphische Lösungen.

(i) Löse die quadratische Ungleichung $x^2 + x - 6 \geq 0$, d.h. bestimme die Lösungsmenge

$$L = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 6 \geq 0\right\} \subset \mathbb{R}.$$

Rechnerische Lösung $L = (-\infty, -3] \cup [2, \infty)$, Graphische Lösung.

(ii) Löse die Wurzelungleichung $\sqrt{x^2 + 5x} < 6$, d.h. bestimme die Lösungsmenge

$$L = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 5x} \in \mathbb{R} \text{ und } \sqrt{x^2 + 5x} < 6\right\} \subset \mathbb{R}.$$

Rechnerische Lösung $L = (-9, -5] \cup [0, 4)$, Graphische Lösung.

(iii) Löse die Betragsungleichung $|x + 1| < x + 3$, d.h. bestimme die Lösungsmenge

$$L = \left\{x \in \mathbb{R} : |x + 1| < x + 3\right\} \subset \mathbb{R}.$$

Rechnerische Lösung $L = (-2, \infty)$, Graphische Lösung.