universität
innsbruck
Institut für Mathematik

# Lineare Algebra I

## Zusätzliche Bemerkungen
## Implementierungen mittels Maple

Tim Netzer, Mechthild Thalhammer

Wintersemester 2019/20

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 2

# Gauß-Algorithmus und Matrixrechnung

Inhalte. In diesem Kapitel wird zunächst der Gauß-Algorithmus behandelt; dieses systematische Verfahren ermöglicht die (in einem noch zu präzisierenden Sinn) vollständige Lösung von Systemen linearer Gleichungen mit reellen Koeffizienten. Es zeigt sich, dass es wünschenswert ist, anstelle der Menge der reellen Zahlen auch einfachere Zahlenbereiche wie die Menge der rationalen Zahlen oder erweiterte Zahlenbereiche wie die Menge der komplexen Zahlen zu betrachten; alle diese Zahlenbereiche haben die Struktur eines Körpers. Die Formulierung des Gauß-Algorithmus mittels Matrizen ist vorteilhaft in Hinblick auf eine Vereinfachung der Schreibweise und für ein tieferes Verständnis der Vorgehensweise im allgemeinen Fall.
(Im Folgenden wird angenommen, dass sämtliche Berechnungen in exakter Arithmetik möglich sind; in diesem Fall treten keine Schwierigkeiten bei der Durchführung des Gauß-Algorithmus auf. Bei der praktischen Umsetzung mittels Computer sind jedoch aufgrund der limitierten Genauigkeit zusätzliche Aspekte zu beachten; abhängig von der Größe und Struktur der Gleichungen können sich Rundungsfehler bei der näherungsweisen Berechnung von Lösungen gravierend auswirken und zu unzufriedenstellenden Ergebnissen führen.)

Reelle Zahlen. Im folgenden Abschnitt wird angenommen, dass alle auftretenden Zahlen reelle Zahlen sind. Die Konstruktion des Körpers der reellen Zahlen wird üblicherweise im Rahmen der Analysis-Vorlesung besprochen; an dieser Stelle sei nur erwähnt, dass eine mathematisch fundierte Einführung des Körpers der reellen Zahlen nicht offensichtlich ist. Aus mathematischer Sicht deutlich einfacher ist die Konstruktion des Körpers der rationalen Zahlen oder, ausgehend vom Körper der reellen Zahlen, die Konstruktion des Körpers der komplexen Zahlen.
(Siehe Kapitel 1 und Kapitel 2.2.2.)

## 2.1 Gauß-Algorithmus

**Beispiel 2.1.1.** Zum einfachsten Typ von Gleichungssystemen zählen Systeme, welche zwei Gleichungen in zwei Unbekannten umfassen; im Rahmen der Linearen Algebra betrachtet man lineare Gleichungssysteme der speziellen Form

$$\begin{cases} a_{11}\,x + a_{12}\,y = b_1\,, \\ a_{21}\,x + a_{22}\,y = b_2\,. \end{cases}$$

Die vorgegebenen reellen Zahlen $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ heißen Koeffizienten; die zu bestimmenden reellen Zahlen $x, y$ werden als Unbekannte oder Variablen bezeichnet. Das Ziel ist es, dieses lineare Gleichungssystem *vollständig* zu lösen, d.h. *alle* Paare $(c_1, c_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu bestimmen, die beim Einsetzen in beide Gleichungen auf wahre Aussagen führen; diese Paare nennt man Lösungen des linearen Gleichungssystemes. Entsprechend bezeichnet man die Menge aller Lösungen als die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystemes

$$\begin{aligned} &L\big((a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}), (b_1, b_2)\big) \\ &\quad := \big\{(c_1, c_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \text{für } x = c_1 \text{ und } y = c_2 \text{ sind beide Gleichungen erfüllt}\big\}\,. \end{aligned}$$

(Beim Koeffizienten $a_{ij}$ gibt der erste Index $i$ die (gedanklich vergebene) Nummer der Gleichung und der zweite Index $j$ die (gedanklich vergebene) Nummer der Unbekannten an. Lineare versus nichtlineare Gleichungssysteme: keine Exponenten verschieden von eins, keine Produkte $x\,y$, keine funktionalen Abhängigkeiten wie $\sin(x), \exp(y)$ etc.)

Wenn die Anzahl der Unbekannten und die Anzahl der linearen Gleichungen übereinstimmt, erwartet man sich im Allgemeinen eine einzige Lösung (Erklärung an späterer Stelle)

$$L\big((a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}), (b_1, b_2)\big) = \big\{(c_1, c_2)\big\}\,.$$

An Spezialfällen sieht man jedoch, dass möglicherweise keine Lösung existiert oder unendlich viele Lösungen existieren. Wählt man beispielsweise $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0$ und $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, so sind die beiden Gleichungen widersprüchlich und die Lösungsmenge gleich der leeren Menge

$$\begin{cases} x = 1\,, \\ x = 2\,, \end{cases} \qquad L\big((1, 0, 1, 0), (1, 2)\big) = \emptyset\,.$$

Wählt man beispielsweise $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 6$ und $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, so spiegeln beide Gleichungen dieselbe Bedingung wider

$$\begin{cases} 2\,x + 3\,y = 1\,, \\ 4\,x + 6\,y = 2\,, \end{cases}$$

und die Lösungsmenge entspricht einer Geraden

$$\begin{aligned} L\big((2,3,4,6),(1,2)\big) &= \big\{(c_1,c_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 2\,c_1 + 3\,c_2 = 1\big\} \\ &= \Big\{\big(c_1, \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{3}\,c_1\big) : c_1 \in \mathbb{R}\Big\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

(Implizite Darstellung der Geraden. Parameterdarstellung der Geraden: Setzt man für den Parameter $c_1$ alle reellen Zahlen ein, erhält man alle Punkte auf der Geraden. Man beachte, dass eine Gerade eine unendliche Menge ist, welche durch endlich viele Zahlen festgelegt ist, hier etwa Nulldurchgang $\frac{1}{3}$ und Steigung $-\frac{2}{3}$.)

Wählt man speziell $a_{11} = 2$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = \frac{1}{2}$, $a_{22} = 1$ und $b_1 = 10$, $b_2 = 4$, so ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2\,x + y = 10\,, \\ \frac{1}{2}\,x + y = \ \,4\,; \end{cases}$$

in diesem Fall ist existiert eine eindeutig bestimmte Lösung, nämlich

$$L\big((2, 1, \tfrac{1}{2}, 1), (10, 4)\big) = \big\{(4, 2)\big\}\,.$$

Durch Einsetzen kann man die Richtigkeit der angegebenen Lösung verifizieren

$$\begin{cases} 2 \cdot 4 + 2 = 10\,, \\ \frac{1}{2} \cdot 4 + 2 = \ \,4\,. \end{cases}$$

Geometrisch beschreiben die zwei Gleichungen zwei Geraden, die nicht parallel sind; genauer, die Gleichungen entsprechen den Graphen der affin-linearen Funktionen

$$g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto -2\,x + 10\,, \qquad g_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto -\tfrac{1}{2}\,x + 4\,,$$

und deren Schnittpunkt ist die gesuchte Lösung.

Es stellt sich die Frage, wie man die Lösung des linearen Gleichungssystemes systematisch berechnen und gleichzeitig nachweisen kann, dass es keine weiteren Lösungen gibt; beides erreicht man mittels geeigneter Äquivalenzumformungen. Genauer, man stellt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2\,x + y = 10\,, \\ \frac{1}{2}\,x + y = \ \ 4\,, \end{cases}$$

schrittweise in anderer Form dar, ohne jedoch die Lösungsmenge zu verändern; schlussendlich gelangt man zu einem linearen Gleichungssystem in *Dreiecksform*

$$\begin{cases} \alpha\,x + \beta\,y = \gamma\,, \\ y = \delta\,, \end{cases} \qquad \text{oder} \qquad \begin{cases} \alpha\,x + \beta\,y = \gamma\,, \\ x = \delta\,, \end{cases}$$

für welches man alle Lösungen leicht bestimmen kann.

Beim händischen Rechnen nützt man es normalerweise aus, wenn ein oder mehrere Koeffizienten gleich Eins sind. Im betrachteten, sehr einfachen Beispiel ist es naheliegend, die Gleichungen in etwas anderer Form darzustellen, weil dann eine Subtraktion der Gleichungen besonders offensichtlich ist

$$\begin{cases} y + 2\,x = 10\,, \\ y + \frac{1}{2}\,x = \ \ 4\,, \end{cases}$$
$$\tfrac{3}{2}\,x = 6\,;$$

genauer, man übernimmt die erste Gleichung unverändert, und anstelle der zweiten Gleichung subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten und übernimmt diese Gleichung (man spricht von der Elimination der Variable $y$ aus der zweiten Gleichung)

$$\begin{cases} 2\,x + y = 10\,, \\ \frac{3}{2}\,x = 6\,. \end{cases}$$

Da nun eine Gleichung nur eine Unbekannte enthält, kann man die Lösung sofort ablesen

$$x = 4\,,$$

und Einsetzen in die verbleibende Gleichung ergibt

$$8 + y = 10 \implies y = 2\,;$$

dies bestätigt die zuvor angegebene einelementige Lösungsmenge

$$L\big((2, 1, \tfrac{1}{2}, 1), (10, 4)\big) = \big\{(4, 2)\big\}\,.$$

Im Gegensatz zum händischen Rechnen spielt es in Hinblick auf die Implementierung des Gauß-Algorithmus keine Rolle, ob ein Koeffizient den Wert Eins oder einen Wert verschieden von Eins hat. Man versucht vielmehr, durch eine möglichst geringe Anzahl an Rechenoperationen (Additionen, Multiplikationen) auf ein lineares Gleichungssystem in Dreiecksform zu kommen; üblicherweise entscheidet man sich für die *Zeilenstufenform* (gleiche Bezeichnung verwendet, jedoch andere Koeffizienten als zuvor)

$$\begin{cases} a_{11}\, x + a_{12}\, y = b_1 \,, \\ \qquad\qquad a_{22}\, y = b_2 \,, \end{cases}$$

und berechnet dann dessen Lösung durch *Rücksubstitution*. Dazu geht man im betrachteten Beispiel etwa folgendermaßen vor (man spricht von der Elimination der Variable $x$ aus der zweiten Gleichung)

$$\begin{cases} 2\, x + y = 10 \,, \\ \frac{1}{2}\, x + y = \ \ 4 \,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Belassen der ersten Gleichung} \quad 2\, x + y = 10 \,, \\ \text{Multiplikation der ersten Gleichung mit } -\frac{1}{4}\text{, Addition zur zweiten Gleichung:} \quad \frac{3}{4}\, y = \frac{3}{2} \,, \end{cases}$$

$$\Big\{ \text{Bestimmung der Lösung:} \quad y = 2 \,, \quad 2\, x + 2 = 10 \implies x = 4 \,.$$

Die hier für sehr einfache lineare Gleichungssysteme angegebenen Überlegungen lassen sich wie im Folgenden beschrieben in systematischer Art und Weise auf den allgemeinen Fall erweitern. Meistens entscheidet man sich für eine bestimmte Reihenfolge der Unbekannten und behält diese bei den Äquivalenzumformungen bei; zuletzt war dies

$$x = x_1\,, \quad y = x_2\,,$$

mit dem Ziel, eine Gleichung in der Unbekannten $x_2$ zu erhalten und anschließend $x_1$ zu bestimmen. Da diese Vorgehensweise leicht nachvollziehbar ist, reicht es aus, die Koeffizienten des linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1\,, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2\,, \end{cases}$$

anzugeben; entweder mittels Koeffizientenmatrix und Inhomogenität (das Gleichungssystem schreibt sich dann als $A\,x = b$, vgl. Matrix-Vektor-Produkt)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

oder noch etwas kompakter mittels der erweiterten Koeffizientenmatrix (schematische Schreibweise ohne zusätzliche Bedeutung, Querstrich zur Abgrenzung der Inhomogenität hilfreich)

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

△

**Definition 2.1.2.** Es seien $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

(i) LINEARES GLEICHUNGSSYSTEM. Ein System linearer Gleichungen oder kurz ein lineares Gleichungssystem ist ein System der Form

$$\begin{aligned} a_{11}\, x_1 + \cdots + a_{1n}\, x_n &= b_1\,, \\ &\vdots \\ a_{m1}\, x_1 + \cdots + a_{mn}\, x_n &= b_m\,; \end{aligned}$$

die vorgegebenen reellen Zahlen $a_{ij}, b_i$ für $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichnet man als Koeffizienten und die zu bestimmenden reellen Zahlen $x_j$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$ als Unbekannte oder Variablen. Das lineare Gleichungssystem heißt homogen, falls

$$b_1 = \cdots = b_m = 0$$

gilt, ansonsten inhomogen.

(ii) KOEFFIZIENTENMATRIX. Ordnet man die Koeffizienten $a_{ij}$, $(i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$, in einem rechteckigen Schema mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten an, spricht man von der zugehörigen Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} ;$$

die erweiterte Koeffizientenmatrix umfasst zusätzlich die Inhomogenität

$$(A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} .$$

(iii) LÖSUNGSMENGE. Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems umfasst alle $n$-Tupel, welche folgende Bedingung erfüllen

$$\begin{aligned} L(A,b) := \Big\{ (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n : \; & \text{wenn man in jeder Gleichung des Systems} \\ & \text{die Unbekannten } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ durch } c_1, c_2, \dots, c_n \text{ ersetzt, so führt} \\ & \text{dies auf wahre Aussagen, d.h. auf der rechten und linken Seite jeder} \\ & \text{Gleichung steht dieselbe Zahl} \Big\} . \end{aligned}$$

△

**Definition 2.1.3** (Zeilenstufenform). Die Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystemes mit $m$ Gleichungen und $n$ Unbekannten hat Zeilenstufenform, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(i) Es gibt eine Zahl $r \in \{0, 1, \dots, m\}$, sodass alle Zeilen mit Index $i \in \{r+1, \dots, m\}$ nur Nullen enthalten.

(ii) In jeder Zeile mit Index $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ gibt es zumindest einen Eintrag, der von Null verschieden ist; wenn $j_i$ der kleinste Spaltenindex ist, für welchen der Eintrag in der $i$-ten Zeile verschieden von Null ist, so gilt

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_r \, .$$

Anschaulich heißt dies, dass die Koeffizientenmatrix die Form

$$A = \begin{pmatrix} \circledast & & & & \\ & \circledast & & & \\ & & \circledast & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & \circledast \\ & & & & \end{pmatrix}$$

hat, wobei alle Einträge $\circledast$ (Pivots) ungleich Null sind und alle Einträge unterhalb der Stufenlinien gleich Null sind. △

Weitere Inhalte, siehe Skriptum.

**Bemerkung 2.1.4.** Bestimmung der Lösungmenge eines linearen Gleichungssystemes mit Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform (keine Lösung, eindeutig bestimmte Lösung, Parametrisierung der Lösungsmenge bei unendlich vielen Lösungen).

**Beispiel 2.1.5.**

**Definition 2.1.6.** Zulässige Äquivalenzumformungen und entsprechende elementare Zeilenumformungen (Vertauschung von zwei Gleichungen; Multiplikation einer Gleichung mit einer von Null verschiedenen reellen Zahl; Ersetzen einer Gleichung durch jene Gleichung, die sich ergibt, wenn man zur betrachteten Gleichung ein Vielfaches einer anderen Gleichung addiert).

**Satz 2.1.7** (Algorithmus von Gauß)**.** (i) Jede erweiterte Koeffizientenmatrix $(A', b')$, die durch eine endliche Abfolge von elementaren Zeilenumformungen aus einer erweiterten Koeffizientenmatrix $(A, b)$ entsteht, hat dieselbe Lösungsmenge

$$L(A', b') = L(A, b)\,.$$

*Beweis.* Siehe Skriptum.

(ii) Jede erweiterte Koeffizientenmatrix $(A, b)$ lässt sich durch eine endliche Abfolge von elementaren Zeilenumformungen auf eine erweiterte Koeffizientenmatrix $(A', b')$ mit $A'$ in Zeilenstufenform transformieren.

*Beweis.*

(a) Falls die Koeffizientenmatrix gleich der Nullmatrix ist, hat sie bereits Zeilenstufenform.

(b) Falls die Koeffizientenmatrix verschieden von der Nullmatrix ist, gibt es mindestens einen Koeffizienten, der verschieden von Null ist. Unter allen Koeffizienten ungleich Null, welche den kleinsten Spaltenindex $j_1$ haben, wählt man einen Koeffizienten $a_1$ als Pivot aus; bei exakter Arithmetik spielt die Wahl des Pivots keine Rolle, und man kann beispielsweise den Koeffizienten mit dem kleinsten Zeilenindex wählen. In der erweiterten Koeffizientenmatrix vertauscht man die entsprechende Zeile mit der ersten Zeile (Zeilenumformung vom Typ (I))

$$(A,b) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & a_1 & * & \dots & * & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & * \\ 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * & * \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & \dots & 0 & a_1 & * & \dots & * & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & a_2 & * & \dots & * & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_m & * & \dots & * & b_m \end{array}\right).$$

(Hier ist $a_2 = 0$.)

Die ersten Nullspalten entsprechen freien Parametern und werden belassen. Um die Unbekannte $x_{j_1}$ aus Gleichung 2 bis Gleichung $m$ zu eliminieren

$$\begin{cases} a_1\, x_{j_1} + * = b_1\,, \\ a_2\, x_{j_1} + * = b_2\,, \\ \vdots \\ a_m\, x_{j_1} + * = b_m\,, \end{cases}$$

multipliziert man für $i \in \{2, \dots, m\}$ die erste Gleichung mit $-\frac{a_i}{a_1}$ und addiert diese Gleichung zur $i$-ten Gleichung (Zeilenumformung vom Typ (III)); falls ein Koeffizient Null ist, bedeutet das, dass die Gleichung belassen wird (zuvor $a_2 = 0$). Insgesamt führt der erste Eliminationsschritt auf eine erweiterte Koeffizientenmatrix der Form

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 0 & \dots & 0 & a_1 & * & \dots & * & & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & a_2 & * & \dots & * & & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_m & * & \dots & * & & b_m \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccccccc|c} 0 & \dots & 0 & a_1 & * & \dots & * & & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * & & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * & & * \end{array}\right).$$

Dieselbe Vorgehensweise wird nun auf die durch Zeile 2 bis Zeile $m$ gegebene erweiterte Koeffizientenmatrix angewendet; nach endlich vielen solchen Eliminationsschritten erhält man eine Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform. ◇

**Bemerkung 2.1.8.** (i) VOLLSTÄNDIGE LÖSUNG. Aus den zuvor angegebenen Überlegungen folgt, dass man jedes lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus vollständig lösen kann. Mittels elementarer Zeilenumformungen wird die erweiterte Koeffizientenmatrix solange transformiert, bis die Koeffizientenmatrix Zeilenstufenform hat; an dieser Darstellung erkennt man, ob die Lösungsmenge leer ist, eine einzige Lösung oder unendlich viele Lösungen umfasst. Mittels Rücksubstitution bestimmt man die eindeutig bestimmte Lösung oder bei unendlich vielen Lösungen eine Parametrisierung der Lösungsmenge.

(ii) BENÖTIGTE ZEILENUMFORMUNGEN. Der Beweis von Satz 2.1.7 (Aussage (*ii*)) zeigt, dass Zeilenumformungen von Typ (I) und (III) für eine Transformation auf Zeilenstufenform ausreichen. Für händische Berechnungen ist es hilfreich, wenn alle Pivots gleich eins sind; dies erreicht man durch Zeilenumformungen von Typ (II).

(iii) REDUZIERTE ZEILENSTUFENFORM. Durch elementare Zeilenumformungen vom Typ (I), (II) und (III) kann man nicht nur erreichen, dass alle Einträge unterhalb eines Pivots gleich Null sind und alle Pivots gleich Eins sind, sondern auch, dass sämtliche Einträge oberhalb eines Pivots gleich Null sind; dies entspricht der Elimination einer Unbekannten aus allen Gleichungen außer einer einzigen Gleichung. Ausgehend von der Zeilenstufenform ist die zusätzliche Berechnung dieser reduzierten Zeilenstufenform bei händischen Rechnungen zweckmäßig, weil sie das direkte Ablesen der Lösungsmenge ermöglicht; bei der Implementierung des Gauß-Algorithmus wird im Allgemeinen jedoch nur die Zeilenstufenform bestimmt. Vgl. nächstes Beispiel.

(iv) HOMOGENE GLEICHUNGSSYSTEME. Man beachte, dass man bei einem inhomogenen linearen Gleichungssystem sämtlichen Zeilenumformungen auf die erweiterte Koeffizientenmatrix anwendet. Bei homogenen linearen Gleichungssystemen, wo die letzte Spalte gleich der Nullspalte ist und sich bei Zeilenumformungen vom Typ (I), (II) und (III) nicht ändert, reicht es aus, die Koeffizientenmatrix zu transformieren.

(v) SPALTENUMFORMUNGEN. Bei Rechnungen in exakter Arithmetik verzichtet man meist auf Spaltenumformungen, weil sie keine nennenswerten Vorteile in Hinblick auf Vereinfachungen mit sich bringen; da sie Vertauschungen von Unbekannten entsprechen, müssten sie außerdem speziell vermerkt werden.

(vi) PIVOTSUCHE. Um bei der näherungsweisen Lösung von linearen Gleichungssystemen mit einer großen Anzahl von Zeilen und Spalten die *Auslöschung* von signifikanten Dezimalstellen und deren unerwünschte Auswirkungen auf das Gesamtergebnis zu vermeiden, wäre es sinnvoll, in jedem Eliminationsschritt den betragsmäßig größten Eintrag der betrachteten Koeffizientenmatrix als Pivot zu wählen. Wegen des vergleichsweise hohen Rechenaufwandes wird jedoch üblicherweise nur eine Pivotsuche in der aktuellen Spalte (*Spaltenpivotsuche*) und keine *totale Pivotsuche* durchgeführt; man beachte, dass eine Spaltenpivotsuche auf Zeilenvertauschungen basiert während eine totale Pivotsuche auch Spaltenvertauschungen erfordert. △

**Beispiel 2.1.9.** Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$(A,b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & -2 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & -3 \end{array}\right);$$

wie zuvor werden die Unbekannten mit $x_1, x_2, x_3, x_4$ bezeichnet. Mittels elementarer Umformungen transformiert man die Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform, beispielsweise in folgender Art und Weise (für händische Rechnung naheliegende Pivotwahl $1$ in erster Spalte und Elimination der Unbekannten $x_1$ aus Gleichung 2 sowie 3, naheliegende Pivotwahl $-4$ in zweiter Spalte der Untermatrix und Elimination der Unbekannten $x_2$ aus Gleichung 3, transformierte Koeffizientenmatrix hat Zeilenstufenform)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & -2 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Zeile } 2 - 5\times\text{Zeile } 1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & 3 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Zeile } 3 - 9\times\text{Zeile } 1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & 3 \\ 0 & -8 & -16 & -24 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Zeile } 3 - 2\times\text{Zeile } 2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Das zugehörige Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + \ 4\,x_4 = -\,1\,, \\ \quad\ -\,4\,x_2 - 8\,x_3 - 12\,x_4 = 3\,, \end{cases}$$

besitzt unendlich viele Lösungen. Es ist naheliegend, die Unbekannten $x_3$ und $x_4$ als freie Parameter zu wählen; zunächst wird $x_2$ bestimmt

$$4\,x_2 = -\,8\,x_3 - 12\,x_4 - 3 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = -\,2\,x_3 - 3\,x_4 - \tfrac{3}{4}$$

und anschließend $x_1$ berechnet (entspricht Elimination der Unbekannten $x_2$, vgl. reduzierte Zeilenstufenform)

$$x_1 = -\,2\,x_2 - 3\,x_3 - 4\,x_4 - 1 = -\,2\,\big(-\,2\,x_3 - 3\,x_4 - \tfrac{3}{4}\big) - 3\,x_3 - 4\,x_4 - 1$$
$$\Longrightarrow \quad x_1 = x_3 + 2\,x_4 + \tfrac{1}{2}\,.$$

Insgesamt führt dies auf die folgende Darstellung der Lösungsmenge

$$L(A,b) = \Big\{\big(x_3 + 2\,x_4 + \tfrac{1}{2}, -\,2\,x_3 - 3\,x_4 - \tfrac{3}{4}, x_3, x_4\big) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\Big\}\,.$$

(Schreibfehler bei erweiterter Koeffizientenmatrix $(A,b)$ statt $L(A,b)$. Buchstabe $b$ in zwei Bedeutungen. EMPFEHLUNG bei unendlich vielen Lösungen: Nochmalige Angabe des Gleichungssystems in Zeilenstufenform zur Bestimmung einer Parametrisierung. )

Eine Alternative wäre die Berechnung der reduzierte Zeilenstufenform (Normierung des zweiten Pivots, Elimination der Unbekannten $x_2$ aus Gleichung 1, vgl. Rücksubstitution)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{4}\times \text{Zeile } 2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Zeile } 1 - 2\times \text{Zeile } 2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

woraus man die angegebene Darstellung der Lösungsmenge direkt ablesen kann

$$L(A,b) = \left\{\left(x_3 + 2\,x_4 + \tfrac{1}{2}, -2\,x_3 - 3\,x_4 - \tfrac{3}{4}, x_3, x_4\right) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\right\}. \qquad \triangle$$

Vgl. Illustration mittels Maple (vgl. Matrizenrechnung).

Kapitel 2.1
Gauß-Algorithmus

VORSICHT! Bei linearen Gleichungssystemen mit einer einelementigen Lösungsmenge ist die Lösung eindeutig bestimmt, d.h. eine Verifizierung der "händisch" berechneten Lösung mittels Maple ist offensichtlich. Ansonsten ist es allerdings möglich, dass man abhängig von der Vorgehensweise (Wahl der Pivots) unterschiedliche Darstellungen der Lösungsmenge erhält. Eine Verifizierung der "händisch" berechneten Lösungsmenge mittels Maple erfordert deshalb möglicherweise zusätzliche Überlegungen.

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
```

Eingabe der Koeffizienten als Matrix und Vektor
Vorsicht! Angabe als Spalten (mit Kleinerzeichen < und Größerzeichen >)
Vorsicht! Multiplikation Matrix-Vektor mittels Punkt (nicht Mal-Punkt)
Erwartetes Ergebnis: Keine Lösung (Fehlermeldung: inkonsistente Gleichungen)

$$> A := \langle \langle 1, 1\rangle | \langle 0, 0\rangle \rangle;$$
$$b := \langle 1, 2\rangle;$$
$$xx := \langle x, y\rangle :$$
$$A \,.\, xx = b;$$
$$L := LinearSolve(A, b);$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

```
Error, (in LinearAlgebra:-LinearSolve) inconsistent system
```

Vergleich mit auf Folien angegebener Lösung (Gleichheit offensichtlich)

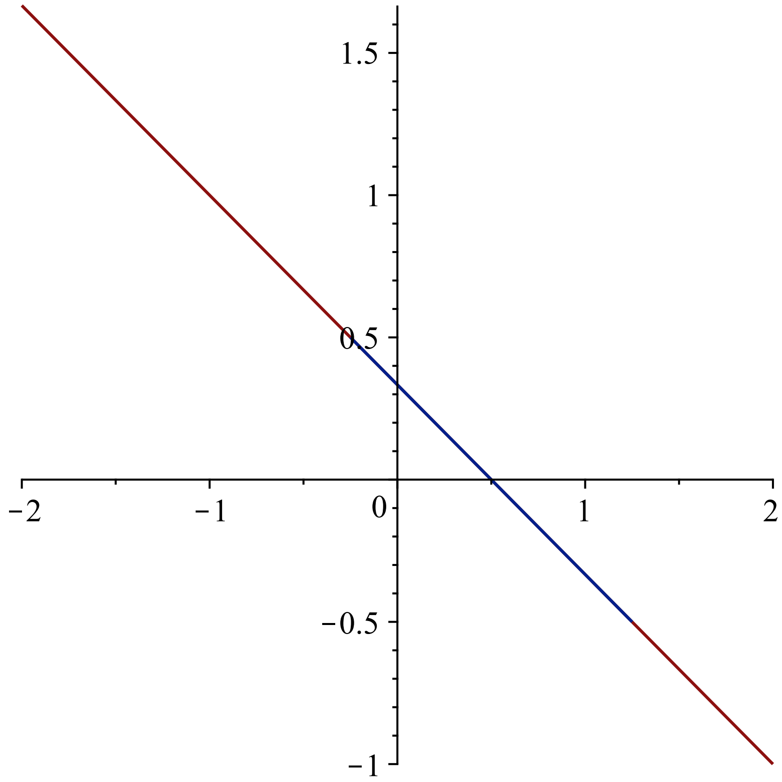
$$> restart;$$
$$with(LinearAlgebra) :$$
$$A := \langle \langle 2, 4\rangle | \langle 3, 6\rangle \rangle;$$
$$b := \langle 1, 2\rangle;$$
$$xx := \langle x, y\rangle :$$
$$A \,.\, xx = b;$$
$$L := LinearSolve(A, b);$$
$$plot\left(\left\{\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot t, t, t = -\frac{1}{2} .. \frac{1}{2}\right], \left[t, \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\cdot t, t = -2 .. 2\right]\right\}\right);$$
$$plot\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\cdot t, t = -2 .. 2\right);$$

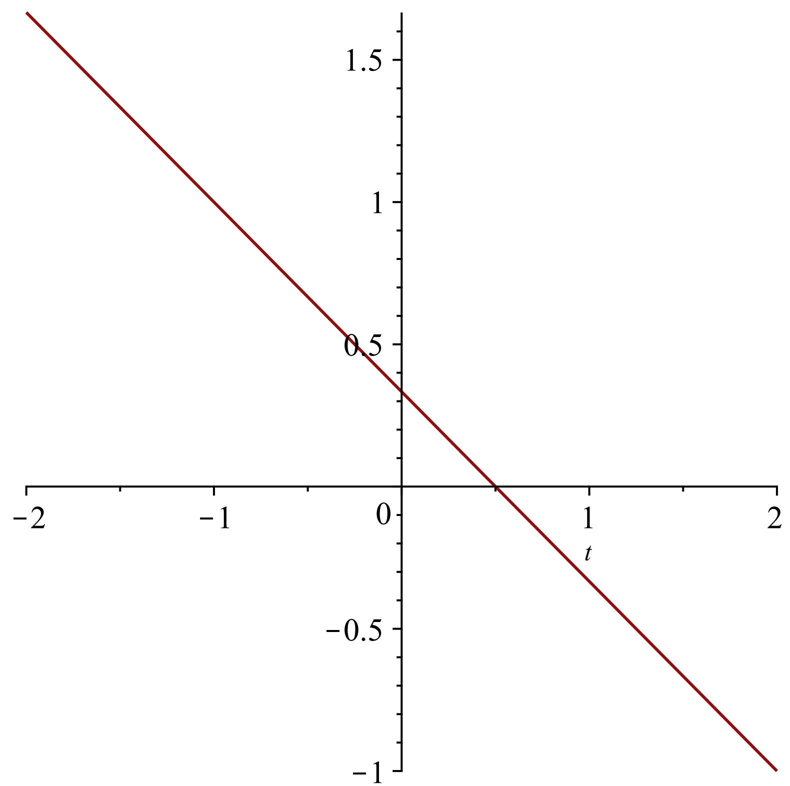
$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\,x + 3\,y \\ 4\,x + 6\,y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$L := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3\,\_t_2}{2} \\ \_t_2 \end{bmatrix}$$






> restart;
with(LinearAlgebra) :
$A := \left\langle \left\langle 2, \frac{1}{2} \right\rangle \middle| \langle 1, 1 \rangle \right\rangle;$
$b := \langle 10, 4 \rangle;$
$xx := \langle x, y \rangle :$
$A \,.\, xx = b;$
$L := LinearSolve(A, b);$

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

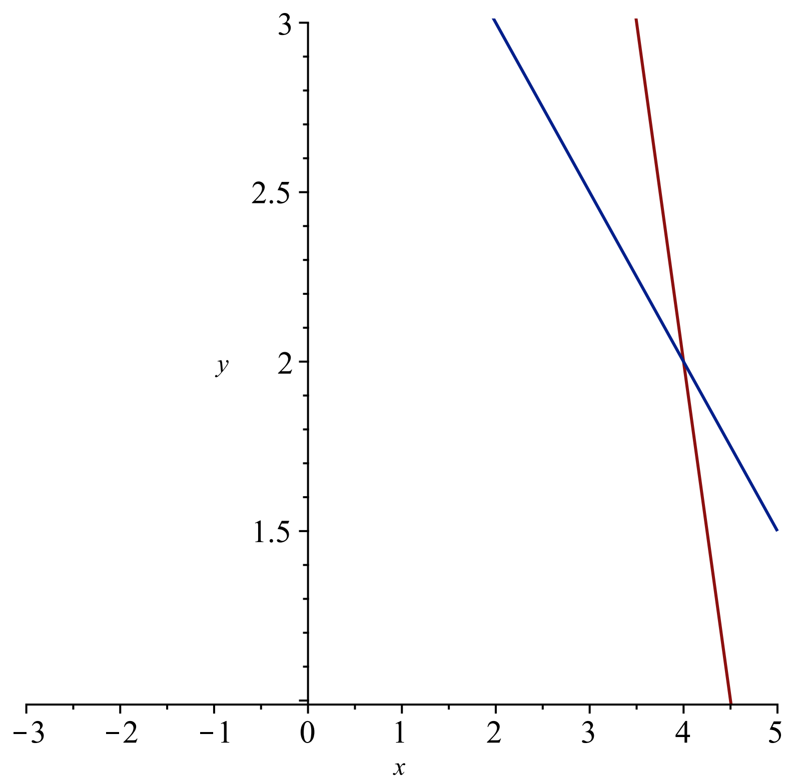
$$\begin{bmatrix} 2\,x + y \\ \frac{x}{2} + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$L := \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

> $g1 := x \rightarrow -2 \cdot x + 10;$
$g2 := x \rightarrow -\frac{1}{2} \cdot x + 4;$
$plot(\{g1(x), g2(x)\}, x = -3 .. 5, y = 1 .. 3);$

$$g1 := x \mapsto -2\,x + 10$$

$$g2 := x \mapsto -\frac{x}{2} + 4$$




Beispiel zur Zeilenstufenform
Anzahl Zeilen m = 4, Anzahl Spalten n = 6
r = 2: dritte (r+1) Zeile und vierte (m) Zeile enthält nur Nullen
Zeile mit Index i = 1: 4 Einträge verschieden von Null, kleinster Spaltenindex ist j1 = 2
Zeile mit Index i = 2 = r: 2 Einträge verschieden von Null, kleinster Spaltenindex ist j2 = 5
Bedingung j1 < j2 erfüllt

> *restart*;

```
with(LinearAlgebra) :
A := ⟨⟨0, 0, 0, 0⟩|⟨2, 0, 0, 0⟩|⟨3, 0, 0, 0⟩|⟨0, 0, 0, 0⟩|⟨-1, 4, 0, 0⟩|⟨1, 3, 0, 0⟩⟩;
b := ⟨0, 0, 0, 0⟩;
xx := ⟨x1, x2, x3, x4, x5, x6⟩ :
A . xx = b;
LinearSolve(A, b);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\,x2 + 3\,x3 - x5 + x6 \\ 4\,x5 + 3\,x6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \_t_1 \\ -\frac{3\,\_t_3}{2} + \frac{7\,\_t_5}{6} \\ \_t_3 \\ \_t_4 \\ \_t_5 \\ -\frac{4\,\_t_5}{3} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

Vgl. Skriptum

```
> restart;
with(LinearAlgebra) :
```

$A := \left\langle \left\langle \frac{1}{2}, 0, 0, 0 \right\rangle \middle| \langle 2, 0, 0, 0 \rangle \middle| \left\langle -\frac{3}{4}, 2, 0, 0 \right\rangle \middle| \langle 0, 1, -1, 0 \rangle \right\rangle;$

$b := \left\langle 9, -\frac{4}{3}, 2, 0 \right\rangle;$

```
xx := ⟨x1, x2, x3, x4⟩ :
A . xx = b;
LinearSolve(A, b);
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 9 \\ -\frac{4}{3} \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{x1}{2} + 2\,x2 - \frac{3\,x3}{4} \\ 2\,x3 + x4 \\ -x4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -\frac{4}{3} \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{37}{2} - 4\,\_t_2 \\ \_t_2 \\ \frac{1}{3} \\ -2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3)}$$

Vgl. Skriptum

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
  A := ⟨⟨1, 5, 9⟩|⟨2, 6, 10⟩|⟨3, 7, 11⟩|⟨4, 8, 12⟩⟩;
  b := ⟨-1,-2,-3⟩;
  xx := ⟨x1, x2, x3, x4⟩ :
  A . xx = b;
  LinearSolve(A, b);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x1 + 2\,x2 + 3\,x3 + 4\,x4 \\ 5\,x1 + 6\,x2 + 7\,x3 + 8\,x4 \\ 9\,x1 + 10\,x2 + 11\,x3 + 12\,x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \_t_3 + 2\,\_t_4 \\ -\frac{3}{4} - 2\,\_t_3 - 3\,\_t_4 \\ \_t_3 \\ \_t_4 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Allgemeines, eindeutig lösbares 2 x 2 System
VORSICHT! Maple "vergisst" auf Fall unendlich vieler Lösungen

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
  A := ⟨⟨a11, a21⟩|⟨a12, a22⟩⟩;
  b := ⟨b1, b2⟩;
  LinearSolve(A, b);
```

$$A := \begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{a12\,b2 - a22\,b1}{a11\,a22 - a12\,a21} \\ \frac{a11\,b2 - a21\,b1}{a11\,a22 - a12\,a21} \end{bmatrix} \tag{5}$$

ERGÄNZUNG:
Übliche Vorgehensweise bei Lösung von linearen Gleichungssystemen Ax = b mittels Computer (Numerische Lineare Algebra)
1) Bestimmung der LR-Zerlegung der Koeffizientenmatrix A (untere "lower" / obere "upper" Dreiecksmatrix): A = LR
2) Schrittweise Lösung von Ax = b mittels Ax = LRx = b, d.h. mit y = Rx folgt L(Rx) = Ly = b
Schritt 1: Löse Ly = b, d.h. bestimme y
Schritt 2: Löse Rx = y, d.h. bestimme x (hier unendlich viele Lösungen)

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
  A := ⟨⟨1, 5, 9⟩|⟨2, 6, 10⟩|⟨3, 7, 11⟩|⟨4, 8, 12⟩⟩;
  b := ⟨-1,-2,-3⟩;
  xx := ⟨x1, x2, x3, x4⟩ :
  P, L, R := LUDecomposition(A);
  UntereDreiecksmatrix := L;
  ObereDreiecksmatrix := R;
```

```
y := LinearSolve(L, b);
x := LinearSolve(R, y);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$P, L, R := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$UntereDreiecksmatrix := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$ObereDreiecksmatrix := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y := \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \_t0_3 + 2\,\_t0_4 \\ -\frac{3}{4} - 2\,\_t0_3 - 3\,\_t0_4 \\ \_t0_3 \\ \_t0_4 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(6)}$$

Etwas andere Vorgehensweise bei "händischen" Berechnungen:
Vgl. Skriptum (A|b) -> (R|y)
Zeilenumformungen entsprechen Matrix L^{-1},
bei Umformung der erweiterten Koeffizientenmatrix erhält man R = L^{-1}A, y = L^{-1}b
L enthält Informationen zu elementaren Zeilenumformungen, wegen spezieller Form von L kann man Inverse L^{-1} leicht berechnen

```
> L;
  LInverse := MatrixInverse(L);
  L . LInverse;
  R;
  LInverse . A;
```

$y$;
$LInverse\ .\ b$;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$LInverse := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

> $L := \langle \langle 1, L21, L31 \rangle | \langle 0, 1, L32 \rangle | \langle 0, 0, 1 \rangle \rangle$;
$LInverse := MatrixInverse(L)$;
$L\ .\ LInverse$;

$$L := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L21 & 1 & 0 \\ L31 & L32 & 1 \end{bmatrix}$$

$$LInverse := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -L21 & 1 & 0 \\ L21\,L32 - L31 & -L32 & 1 \end{bmatrix}$$

**(8)**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

> $L := \langle \langle 1, L21, L31, L41 \rangle | \langle 0, 1, L32, L42 \rangle | \langle 0, 0, 1, L41 \rangle | \langle 0, 0, 0, 1 \rangle \rangle;$
$LInverse := MatrixInverse(L);$
$simplify(L \,.\, LInverse);$

$$L := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L21 & 1 & 0 & 0 \\ L31 & L32 & 1 & 0 \\ L41 & L42 & L41 & 1 \end{bmatrix}$$

$$LInverse := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -L21 & 1 & 0 & 0 \\ L21\,L32 - L31 & -L32 & 1 & 0 \\ -L21\,L32\,L41 + L42\,L21 + L31\,L41 - L41 & L41\,L32 - L42 & -L41 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

>

>

## 2.2 Gruppen, Ringe und Körper

Erinnerung. Bei der Berechnung der eindeutig bestimmten Lösung eines Systemes von zwei linearen Gleichungen in zwei Unbekannten mit reellen Koeffizienten geht man folgendermaßen vor

$$\begin{cases} a_{11}\,x + a_{12}\,y = b_1\,, \\ a_{21}\,x + a_{22}\,y = b_2\,, \end{cases}$$

Forderungen an Koeffizienten (Pivot, eindeutige Lösbarkeit), Hilfsbezeichnungen:

$$a_{11} \neq 0\,, \quad \alpha := a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} \neq 0\,, \quad \beta := a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1\,,$$

Belassen der ersten Gleichung: $a_{11}\,x + a_{12}\,y = b_1\,,$

Multiplikation der ersten Gleichung mit $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$: $\quad -\,a_{21}\,x - \frac{a_{12}\,a_{21}}{a_{11}}\,y = -\frac{a_{21}\,b_1}{a_{11}}\,,$

Addition dieser Gleichung zur zweiten Gleichung: $\frac{\alpha}{a_{11}}\,y = \frac{\beta}{a_{11}}\,,$

System in Zeilenstufenform:

$$\begin{cases} a_{11}\,x + a_{12}\,y = b_1\,, \\ \qquad\qquad \frac{\alpha}{a_{11}}\,y = \frac{\beta}{a_{11}}\,, \end{cases}$$

Bestimmung der Lösung durch Rücksubstitution:

$$y = \frac{\beta}{\alpha}\,, \quad a_{11}\,x = b_1 - \frac{a_{12}\,\beta}{\alpha}\,, \quad x = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}\,\beta}{\alpha\,a_{11}} = \frac{a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2}{\alpha}\,,$$

$$L\big((a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}), (b_1, b_2)\big) = \Big\{\Big(\frac{a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}, \frac{a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}\Big)\Big\}\,.$$

### Fragestellungen.

(i) Fragt man sich, welche Rechenoperationen und Rechenregeln für reelle Zahlen benötigt wurden, so sieht man, dass nur die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von reellen Zahlen und Rechenregeln wie das Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz genutzt wurden.

(ii) Falls die Koeffizienten rationale Zahlen sind, werden dieselben Rechenoperationen und Rechenregeln angewendet; die Lösungsmenge ist dann eine Teilmenge eines kartesischen Produktes der rationalen Zahlen. Man fragt sich, für welche Zahlenbereiche die Lösung von linearen Gleichungssystemen mittels Gauß-Algorithmus sinnvoll ist.

Rechenoperationen und Rechenregeln. Beim Lösen von linearen Gleichungssystemen mit reellen Koeffizienten werden als Rechenoperationen die Addition sowie die Multiplikation von reellen Zahlen benötigt (Multiplikationspunkt wird meist weggelassen)

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (a, b) \longmapsto a + b\,,$$
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (a, b) \longmapsto a \cdot b\,;$$

außerdem wendet man Rechenregeln wie das Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz an (Assoziativgesetz erlaubt Weglassen von Klammern, Kommutativgesetz erlaubt Vertauschen der Reihenfolge, Distributivgesetze vereinfachen sich mittels Kommutativgesetz)

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} : \quad (a + b) + c = a + (b + c)\,,$$
$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} : \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\,,$$
$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} : \quad a + b = b + a\,,$$
$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} : \quad a \cdot b = b \cdot a\,,$$
$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} : \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c\,.$$

Die Subtraktion entspricht der Berechnung eines inversen Elementes und einer Addition, und in ähnlicher Art und Weise geht man bei der Division vor

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (a, b) \longmapsto a - b = a + (-1) \cdot b\,,$$
$$\mathbb{R} \times \big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big) \longrightarrow \mathbb{R} : (a, b) \longmapsto \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}\,.$$

Allgemeine Struktur. Aus den obigen Überlegungen erkennt man, dass anstelle von reellen Zahlen auch rationale oder komplexe Zahlen betrachtet werden können; liegen alle Koeffizienten eines linearen Gleichungssystemes in einem dieser Zahlbereiche, so gilt dies auch für alle Lösungen. Dies trifft beispielsweise nicht auf natürliche oder ganze Zahlen zu; im Allgemeinen wird die Elimination von Unbekannten zu Divisonen und folglich auf rationale Zahlen führen. Um die benötigten Strukturen besser zu erkennen, nutzt man den axiomatischen Begriff des *Körpers*.

**Nachtrag zu Computeralgebrasystemen.** Eine frei verfügbare Alternative zu Maple ist beispielsweise SymPy in Anlehnung an Python.

`https://docs.sympy.org/latest/tutorial/`
`https://docs.sympy.org/latest/tutorial/matrices.html`
(durch Anklicken wird eine Live Shell aktiviert)

Die Syntax von Maple orientiert sich im Allgemeinen an elementaren mathematischen Schreibweisen; SymPy setzt vergleichsweise mehr informatische und mathematische Kenntnisse voraus.

### 2.2.1 Grundbegriffe

(Erinnerung an 21./22. Oktober)

VORBEMERKUNG. Befasst man sich eingehender mit der Lösung von linearen Gleichungssystemen mit rationalen, reellen oder komplexen Koeffizienten mittels des Gauß-Algorithmus, so erkennt man Gemeinsamkeiten. Man verwendet die Rechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und die Rechenregeln Assoziativ-, Kommutativ-, Distributivgesetz; diese Rechenoperationen und Rechenregeln sind in einem allgemeinen *Körper* $K$ definiert und gültig. Man kann den Gauß-Algorithmus also auch für ein System mit $m$ linearen Gleichungen in $n$ Unbekannten und Koeffizienten in $K$ durchführen; die Lösungsmenge ist dann eine Teilmenge des kartesischen Produktes

$$L(A, b) \subseteq K^n\,,$$

und bei unendlich vielen Lösungen erhält man eine Parametrisierung der Lösungsmenge, d.h. eine Abbildung

$$K^{n-r} \longrightarrow L(A, b)\,.$$

Da die Körperaxiome auf den Gruppenaxiomen und den Ringaxiomen basieren, ist es zweckmäßig, zunächst die Begriffe (kommutative) Gruppe und (kommutativer) Ring zu definieren.

**Definition 2.2.1** (Gruppe). (i) Eine Menge $G$ mit einer zweistelligen Verknüpfung

$$*: G \times G \longrightarrow G : (a, b) \longmapsto a * b$$

ist eine Gruppe, wenn das Assoziativgesetz

$$\forall\, a, b, c \in G : \quad (a * b) * c = a * (b * c)$$

gilt, ein neutrales Element existiert

$$\exists\, e \in G \quad \forall\, a \in G : \quad a * e = a = e * a$$

und zu jedem Element ein inverses Element existiert

$$\forall\, a \in G \quad \exists\, b \in G : \quad a * b = e = b * a\,.$$

(ii) Eine Gruppe $(G, *)$ heißt kommutativ oder abelsch, wenn zusätzlich das Kommutativgesetz erfüllt ist, d.h.

$$\forall\, a, b \in G : \quad a * b = b * a\,. \qquad \triangle$$

(Bei kommutativen Verknüpfungen schreibt man oft $a + b$ statt $a * b$, bei nicht-kommutativen Verknüpfungen $a \cdot b$, kurz $a\,b$, oder $a \circ b$ statt $a * b$. Das neutrale Element ist eindeutig bestimmt; bei kommutativen Verknüpfungen wird es oft mit $0$ und bei nicht-kommutativen Verknüpfungen oft mit $1$ oder id oder $I$ bezeichnet. Das inverse Element zu $a \in G$ ist eindeutig bestimmt; bei kommutativen Verknüpfungen wird es oft mit $-\,a$ und bei nicht-kommutativen Verknüpfungen oft mit $a^{-1}$ bezeichnet.)

**Beispiel 2.2.2.** Siehe Skriptum (Zusammenfassung s.u.).

**Bemerkung 2.2.3.** Siehe Skriptum.

**Definition 2.2.4** (Ring). (i) Eine Menge $R$ mit zwei zweistelligen Verknüpfungen

$$+ : R \times R \longrightarrow R\,, \quad \cdot : R \times R \longrightarrow R\,,$$

ist ein Ring, wenn $(R, +)$ eine kommutative Gruppe ist, die zweiten Verknüpfung assoziativ ist, bezüglich der zweiten Verknüpfung ein neutrales Element $1$ existiert, welches verschieden vom neutralem Element $0$ bezüglich der ersten Verknüpfung ist, d.h.

$$1 \neq 0\,,$$

und die Distributivgesetze

$$\forall\, a, b, c \in R : \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)\,, \quad (b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)\,,$$

gelten.
(Entsprechend der obigen Bemerkung wird die erste kommutative Verknüpfung oft als Addition und die zweite, nicht notwendigerweise kommutative Verknüpfung oft als Multiplikation bezeichnet.)

(ii) Ein Ring $(R, +, \cdot)$ heißt kommutativ, falls $(R, \cdot)$ kommutativ ist, d.h.

$$\forall\, a, b \in R : \quad a \cdot b = b \cdot a\,.$$

(iii) Für einen nicht notwendigerweise kommutativen Ring $(R, +, \cdot)$ wird die Menge der bezüglich der zweiten Verknüpfung invertierbaren Elemente

$$R^{\times} = \{a \in R : \exists\, b \in R \text{ mit } a \cdot b = 1 = b \cdot a\}$$

als die Menge der Einheiten von $R$ bezeichnet. △

**Beispiel 2.2.5.** Siehe Skriptum.

**Bemerkung 2.2.6.** (i) Eindeutigkeit. In einer Gruppe sind das neutrale Element und inverse Elemente eindeutig bestimmt. Entsprechende Aussagen gelten in einem Ring. Genauer, in einem Ring $(R, +, \cdot)$ sind das neutrale Element bezüglich der ersten kommutativen Verknüpfung $+$, oft wird es mit $0$ bezeichnet, und das inverse Element bezüglich der zweiten Verknüpfung $\cdot$, oft wird es mit $1$ bezeichnet, eindeutig bestimmt; für $a \in R$ ist das inverse Element bezüglich $+$ eindeutig bestimmt, oft wird es mit $-a$ bezeichnet, und für $a \in R^\times$ ist das inverse Element bezüglich $\cdot$ eindeutig bestimmt, oft wird es mit $a^{-1}$ bezeichnet.

(ii) Rechenregeln. In einer Gruppe gelten gewisse Rechenregeln, welche sich aus den Gruppenaxiomen ableiten lassen, vgl. Aufgabe 15. Entsprechende Aussagen sind für einen Ring gültig; die Herleitung solcher Resultate aus den Ringaxiomen wird im Rahmen des Proseminares besprochen, vgl. Aufgabe 18.

**Aufgabe 15**

Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Das zu $g \in G$ inverse Element bezeichnen wir mit $g^{-1}$. Zeigen Sie, dass für $f, g, h \in G$ stets gilt

*(i)* $(g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}$

*(ii)* $(g^{-1})^{-1} = g$.

*(iii)* $g * f = h * f \;\Rightarrow\; g = h$.

**Aufgabe 18**

Sei $R$ ein Ring. Zeigen Sie, dass für alle $g, h, k \in R$ gilt:

*(i)* $0 \cdot g = g \cdot 0 = 0$.

*(ii)* $-(g \cdot h) = (-g) \cdot h = g \cdot (-h)$.

*(iii)* $(-g) \cdot (-h) = g \cdot h$.

Gilt auch immer $g \cdot h = g \cdot k \Rightarrow h = k$?

(iii) NOTATIONEN. Zur Vereinfachung der Notation trifft man die Konvention *Multiplikation vor Addition* und lässt Klammern meist weg; läßt man zusätzlich auch Multiplikationspunkte weg, so vereinfachen sich beispielsweise die Distributivgesetze in einem kommutativen Ring $(R, +, \cdot)$ folgendermaßen

$$\forall\, a, b, c \in R : \quad a\,(b + c) = a\,b + a\,c = b\,a + c\,a = (b + c)\,a\,. \qquad \triangle$$

(Um die in einem Ring definierte zweite Verknüpfung deutlich zu machen, werden Multiplikationspunkte vorerst noch gesetzt.)

Vorüberlegungen. Für einen Ring $(R, +, \cdot)$ ist die Menge der Einheiten

$$R^{\times} = \{a \in R : \exists\, b \in R \text{ mit } a \cdot b = 1 = b \cdot a\}$$

so konstruiert, dass $(R^{\times}, \cdot)$ die Gruppenaxiome erfüllt.

(i) Die Assoziativität der zweiten Verknüpfung gilt für jede Teilmenge von $R$ und insbesondere für die Menge der Einheiten

$$\forall\, a, b, c \in R^{\times} \subset R : \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\,.$$

(ii) Das neutrale Element bezüglich der zweiten Verknüpfung ist zu sich selbst invers

$$a = 1 = b : \quad 1 \cdot 1 = 1$$

und somit eine Einheit

$$1 \in R^{\times}\,.$$

(iii) Für jede Einheit existiert ein eindeutig bestimmtes inverses Element in $R$; da man die Rollen von Einheit und inversem Element vertauschen kann, gilt (gebräuchliche Schreibweise $a^{-1} = b$ für inverses Element)

$$\forall\, a \in R^{\times} : \quad a^{-1} \in R^{\times}\,, \quad \left(a^{-1}\right)^{-1} = a\,.$$

Bevor man die Behauptung aufstellt, dass $(R^\times, \cdot)$ eine Gruppe ist, muss man sicherstellen, dass die zweite Verknüpfung auf der Menge der Einheiten sinnvoll definiert ist (man spricht von *Wohldefiniertheit* oder *Abgeschlossenheit*)

$$\cdot : R^\times \times R^\times \longrightarrow R^\times : (a, b) \longmapsto a \cdot b\,;$$

dazu ist zu zeigen, dass die Verknüpfung zweier Einheiten ebenfalls eine Einheit ist

$$\forall\, a, b \in R^\times : \quad a \cdot b \in R^\times\,.$$

*Nachweis der Wohldefiniertheit.* Mittels Assoziativität sieht man (siehe (i))

$$\begin{aligned} \forall\, a, b \in R^\times : \quad \big(a \cdot b\big) \cdot \big(b^{-1} \cdot a^{-1}\big) &= a \cdot \underbrace{\big(b \cdot b^{-1}\big)}_{=1} \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} = 1 \\ &= b^{-1} \cdot b = b^{-1} \cdot \underbrace{\big(a^{-1} \cdot a\big)}_{=1} \cdot b = \big(b^{-1} \cdot a^{-1}\big) \cdot \big(a \cdot b\big)\,; \end{aligned}$$

dies zeigt, dass die Verknüpfung zweier Einheiten eine Einheit ist und das zugehörige inverse Element wie folgt gegeben ist (Vertauschen der Reihenfolge!)

$$\forall\, a, b \in R^\times : \quad a \cdot b \in R^\times\,, \quad \big(a \cdot b\big)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1} \in R^\times\,. \qquad \triangle$$

Die zuvor angegebenen Überlegungen werden in einem Lemma zusammengefasst.

**Lemma 2.2.7.** Für einen Ring $(R, +, \cdot)$ ist die Menge der Einheiten $(R^\times, \cdot)$ eine Gruppe, und es gilt die Gleichheit

$$\forall\, a, b \in R^\times : \quad \big(a \cdot b\big)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1} \in R^\times\,.$$

*Beweis.* Siehe Vorüberlegungen. ◇

**Bemerkung 2.2.8.** Siehe Vorüberlegungen und Lemma.

**Definition 2.2.9** (KÖRPER)**.** Eine Menge $K$ mit zwei zweistelligen Verknüpfungen

$$+ : K \times K \longrightarrow K\,, \quad \cdot : K \times K \longrightarrow K\,,$$

ist ein Körper, wenn $(K, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist und folgende Gleichheit gilt

$$K^\times = K \setminus \{0\}\,. \qquad \triangle$$

(Mit anderen Worten: In einem Körper $(K, +, \cdot)$ sind $(K, +)$ und $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ kommutative Gruppen, und es gilt das Distributivgesetz. )

**Beispiel 2.2.10** (ZUSAMMENFASSUNG: WICHTIGE BEISPIELE FÜR GRUPPEN, RINGE, KÖRPER)**.**

(i) Natürliche Zahlen
$(\mathbb{N}_{\geq 0}, +)$ *keine* (kommutative) Gruppe (fehlendes inverses Element etwa für $a = 1$)

(ii) Ganze Zahlen
$(\mathbb{Z}, +)$ kommutative Gruppe (neutrales Element $0$, inverses Element von $a$ ist $-a$)
$(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ *keine* (kommutative) Gruppe (fehlendes inverses Element etwa für $a = 2$)
$\mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\}$, $(\mathbb{Z}^\times, \cdot)$ kommutative Gruppe
$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kommutativer Ring, *kein* Körper ($\mathbb{Z}^\times \neq \mathbb{Z} \setminus \{0\}$)

(iii) Rationale Zahlen $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ oder reelle Zahlen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder komplexe Zahlen $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
(Unterschiedliche Zahlenbereiche, gleiche Struktur eines Körpers; siehe Abschnitt 2.2.2)
$(\mathbb{K}, +)$ kommutative Gruppe (neutrales Element $0$, inverses Element von $a$ ist $-a$)
$(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ kommutative Gruppe (neutrales Element $1$, inverses Element von $a$ ist $\frac{1}{a}$)
$\mathbb{K}^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $(\mathbb{K}^\times, \cdot)$ kommutative Gruppe
$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ Körper (insbesondere Ring) $\triangle$

**Bemerkung 2.2.11.** Siehe Bemerkung zu Beginn des Abschnittes.

### 2.2.2 Komplexe Zahlen ★

DEFINITION UND KÖRPEREIGENSCHAFT. In Hinblick auf die Lösung von linearen Gleichungssystemen mit komplexen Zahlen als Koeffizienten reicht es aus, die Menge der komplexen Zahlen zusammen mit einer Addition und Multiplikation einzuführen und die Körpereigenschaften nachzuweisen; man beachte, dass Subtraktion und Division nicht definiert werden, weil sie der Addition des bezüglich der Addition inversen Elementes und der Multiplikation mit dem bezüglich der Multiplikation inversen Element entsprechen

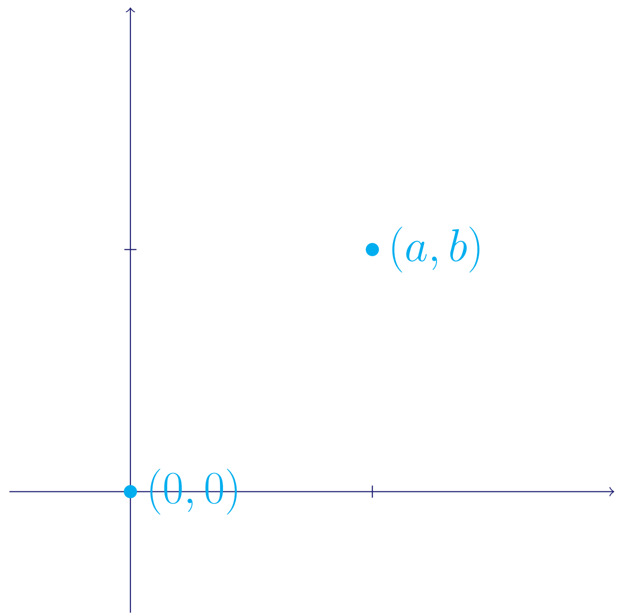
$$a - b = a + (-b)\,, \qquad \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}\,.$$

Weitere Inhalte werden im Vertiefungsteil der Vorlesung besprochen.

**Konstruktion 2.2.12.** (i) *Definition der Menge der komplexen Zahlen.* Eine komplexe Zahl ist durch ein Paar von reellen Zahlen gegeben; die Menge der komplexen Zahlen entspricht somit dem kartesischen Produkt

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}\,.$$

Die Menge der komplexen Zahlen veranschaulicht man durch die Ebene. Man wählt rechtwinklige Koordinatenachsen, deren Schnittpunkt der Nullpunkt $(0,0)$ ist, und legt die Einheitslänge fest; für eine komplexe Zahl $(a,b) \in \mathbb{C}$ trägt man die entsprechenden Koordinaten $a, b$ ein.



(ii) *Symbolische Notation.* In Hinblick auf eine *intuitive* Berechnung des Produktes zweier komplexer Zahlen ist es hilfreich, anstelle der Paarschreibweise $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ die folgende symbolische Notation zu verwenden

$$z = a + \mathrm{i}\, b \in \mathbb{C}\,;$$

die erste Koordinate nennt man Realteil und die zweite Koordinate Imaginärteil (statt $\Re$, $\Im$ schreibt man auch Re, Im; letzteres nicht zu verwechseln mit der englischen Abkürzung *im(age)* für Bild)

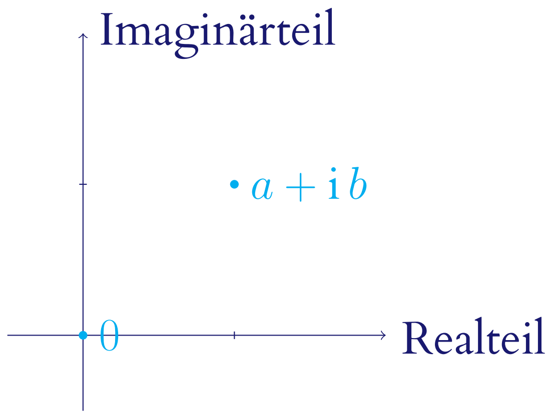
$$a = \Re(z) \in \mathbb{R}\,, \quad b = \Im(z) \in \mathbb{R}\,.$$

Das auftretende Symbol wird als imaginäre Einheit bezeichnet

$$\mathrm{i} \in \mathbb{C}\,;$$

es entspricht dem reellen Zahlenpaar $(0, 1) \in \mathbb{C}$ und soll die folgende Bedingung erfüllen

$$\mathrm{i}^2 = -1\,.$$



Die Menge der komplexen Zahlen ist eine nützliche *Erweiterung* der Menge der reellen Zahlen; komplexe Zahlen treten beispielsweise bei der Berechnung von Nullstellen von Polynomfunktionen im Zusammenhang mit Eigenwerten und Eigenvektoren auf.

Vorsicht! Strenggenommen ist es nicht möglich, die reellen Zahlen als Teilmenge der komplexen Zahlen zu betrachten

$$\mathbb{R} \not\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,;$$

es gilt jedoch die *Einbettung*

$$\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,,$$

vgl. Veranschaulichung Zahlengerade und Zahlenebene. Einigt man sich auf die ausschließliche Verwendung der symbolischen Notation, ist die dann gebräuchliche Schreibweise

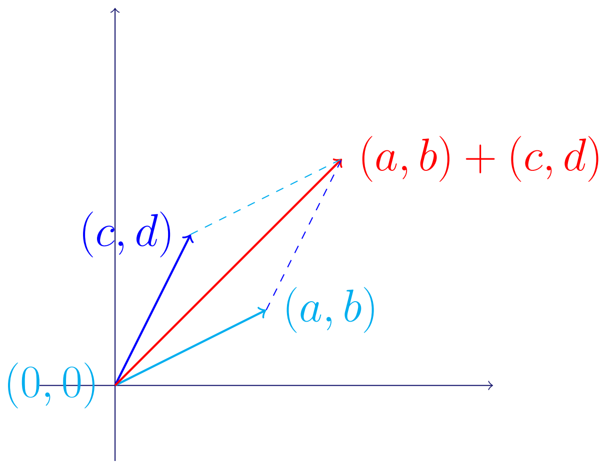
$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

in dieser Art und Weise zu verstehen.

(iii) *Definition der Addition und Gruppeneigenschaft.* Für Paare von reellen Zahlen ist es naheliegend, die Addition komponentenweise zu definieren

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : \big((a, b), (c, d)\big) \longmapsto (a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)\,;$$

man beachte, dass man die Addition von komplexen Zahlen auf die bekannte Addition von reellen Zahlen zurückführt. (Die Additionen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind zu unterscheiden; wie allgemein üblich wird darauf verzichtet, unterschiedliche Symbole zu verwenden.) Die Addition von komplexen Zahlen veranschaulicht man mittels eines Parallelogrammes.




In symbolischer Notation erhält man

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : (a + \mathrm{i}\, b, c + \mathrm{i}\, d) \longmapsto a + c + \mathrm{i}\,(b + d)\,;$$

ein einfaches Beispiel ist

$$(3, -2) + (2, 1) = (5, -1)\,, \quad 3 - 2\,\mathrm{i} + 2 + \mathrm{i} = 5 - \mathrm{i}\,.$$

*Gruppeneigenschaft.* Da das Assoziativgesetz (mittels Assoziativgesetz für $(\mathbb{R},+)$)

$$\begin{aligned}\forall\,(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{C}:\quad \big((a,b)+(c,d)\big)+(e,f) &= \big((a+c)+e,(b+d)+f\big)\\ &= \big(a+(c+e),b+(d+f)\big)=(a,b)+\big((c,d)+(e,f)\big)\end{aligned}$$

sowie das Kommutativgesetz (mittels Kommutativgesetz für $(\mathbb{R},+)$)

$$\forall\,(a,b),(c,d)\in\mathbb{C}:\quad (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)=(c+a,d+b)=(c,d)+(a,b)$$

erfüllt sind und die Existenz eines neutralen Elementes

$$\forall\,(a,b)\in\mathbb{C}:\quad (a,b)+(0,0)=(a,b)$$

sowie die Existenz inverser Elemente

$$\forall\,(a,b)\in\mathbb{C}:\quad (a,b)+(-a,-b)=(0,0)$$

sichergestellt sind, ist $(\mathbb{C},+)$ eine kommutative Gruppe.

(iv) *Definition der Multiplikation und Gruppeneigenschaft.* Für Paare von reellen Zahlen wird eine spezielle Multiplikation definiert (nicht zu verwechseln mit dem Euklidischen Skalarprodukt, für welches häufig dieselbe Notation verwendet wird)

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : \big((a, b), (c, d)\big) \longmapsto (a, b) \cdot (c, d) := (a\,c - b\,d, a\,d + b\,c)\,;$$

man beachte, dass das Paar $(1, 0)$ und das Paar $(0, 1)$ folgende Gleichheiten erfüllen (neutrales Element bezüglich der Multiplikation, vgl. Forderung an imaginäre Einheit $\mathrm{i}^2 = -1$)

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b)\,,$$
$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)\,.$$

Ein einfaches Beispiel ist

$$(3, -2) \cdot (2, 1) = (8, -1)\,.$$

Verwendet man die symbolische Notation und die an die imaginäre Einheit gestellte Bedingung, so erklärt sich die Definition der Multiplikation mittels Ausmultiplizieren

$$z_1\, z_2 = \big(a + \mathrm{i}\, b\big)\, \big(c + \mathrm{i}\, d\big) = a\, c + \mathrm{i}\, a\, d + \mathrm{i}\, b\, c + \underbrace{\mathrm{i}^2}_{=\,-1}\, b\, d = a\, c - b\, d + \mathrm{i}\, (a\, d + b\, c)\,,$$

$$\Re(z_1\, z_2) = \Re(z_1)\, \Re(z_2) - \Im(z_1)\, \Im(z_2)\,, \qquad \Im(z_1\, z_2) = \Re(z_1)\, \Im(z_2) + \Im(z_1)\, \Re(z_2)\,.$$

Die Gruppeneigenschaften von $(\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}, \cdot)$ lassen sich leicht nachweisen. Ähnlich wie bei der Addition übertragen sich Assoziativität und Kommutativität von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ auf $(\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}, \cdot)$; das neutrale Element bezüglich der Multiplikation ist $(1,0)$ bzw. $1$ in symbolischer Notation, denn

$$(a,b) \cdot (1,0) = (a,b)\,, \qquad \big(a + \mathrm{i}\, b\big) \cdot 1 = a + \mathrm{i}\, b\,.$$

Mittels symbolischer Notation und geeignetem Erweitern verifiziert man die Existenz inverser Elemente

$$\forall\, (a,b) \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\} : \quad (a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-\,b}{a^2+b^2}\right), \quad (a,b) \cdot (a,b)^{-1} = (1,0)\,,$$

$$0 \neq z = a + \mathrm{i}\, b \in \mathbb{C} \quad \Longleftrightarrow \quad \Re(z) = a \neq 0 \;\text{ oder }\; \Im(z) = b \neq 0\,,$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + \mathrm{i}\, b} = \frac{a - \mathrm{i}\, b}{(a + \mathrm{i}\, b)\, (a - \mathrm{i}\, b)} = \frac{a - \mathrm{i}\, b}{a^2 - \mathrm{i}^2\, b^2} = \frac{a - \mathrm{i}\, b}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \mathrm{i}\, \frac{b}{a^2+b^2}\,,$$

$$\Re\big(z^{-1}\big) = \frac{a}{a^2+b^2}\,, \qquad \Im\big(z^{-1}\big) = -\,\frac{b}{a^2+b^2}\,.$$

Einfache Beispiele zur Multiplikation sind

$$
\begin{aligned}
-(5-2\,\mathrm{i}) &= -5+2\,\mathrm{i}\,,\\
(1+\mathrm{i})\,(1-\mathrm{i}) &= 1-\mathrm{i}+\mathrm{i}-\mathrm{i}^2 = 1+1 = 2\,,\\
(1+\mathrm{i})^{-1} &= \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\,.
\end{aligned}
$$

(v) *Körpereigenschaft.* Um die Körpereigenschaft der Menge der komplexen Zahlen nachzuweisen, ist nur mehr die Gültigkeit des Distributivgesetzes zu zeigen; dies wird im Proseminar besprochen. △

**Satz 2.2.13.** Die Menge der komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper; die neutralen (und zu sich selbst inversen) Elemente bezüglich Addition sowie Multiplikation sind $(0,0)$ sowie $(1,0)$, und inverse Elemente sind wie folgt gegeben

$$\forall\,(0,0) \neq (a,b) \in \mathbb{C}: \quad -(a,b) = (-a, -b)\,, \quad (a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right).$$

*Beweis.* Siehe zuvor angegebene Konstruktion, Skriptum und Proseminar. ◇

**Aufgabe 19**

Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 2.2.13 ("$\mathbb{C}$ ist ein Körper").

Beispiel. Die an früherer Stelle angegebene Lösungsdarstellung gilt auch für ein System linearer Gleichungen in zwei Unbekannten mit komplexen Koeffizienten

$$a_{11} = \mathrm{i}\,, \quad a_{12} = 1\,, \quad b_1 = 1\,, \quad a_{21} = 1\,, \quad a_{22} = \mathrm{i}\,, \quad b_2 = 1 - \mathrm{i}\,,$$
$$a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2 = \mathrm{i} - (1 - \mathrm{i}) = -1 + 2\,\mathrm{i}\,,$$
$$a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1 = \mathrm{i}\,(1 - \mathrm{i}) - 1 = \mathrm{i} - \mathrm{i}^2 - 1 = \mathrm{i}\,,$$
$$a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} = \mathrm{i}^2 - 1 = -2\,,$$
$$L\big((a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}), (b_1, b_2)\big) = \left\{\left(\tfrac{a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}, \tfrac{a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}\right)\right\} = \left\{\left(\tfrac{1}{2} - \mathrm{i}, -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)\right\} \subset \mathbb{C}^2\,.$$

Einsetzen der Lösung bestätigt

$$a_{11}\,x + a_{12}\,y = \mathrm{i}\,\big(\tfrac{1}{2} - \mathrm{i}\big) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{i} = -\,\mathrm{i}^2 = 1 = b_1\,,$$
$$a_{21}\,x + a_{22}\,y = \tfrac{1}{2} - \mathrm{i} + \mathrm{i}\,\big(-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\big) = 1 - \mathrm{i} = b_2\,.$$

Im Proseminar ist die Lösungsmenge mittels des Gauß-Algorithmus zu bestimmen. △

**Aufgabe 20**

Bestimmen Sie die Lösungsmenge (in $\mathbb{C}^2$) des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$i \cdot x + y = 1$$
$$x + i \cdot y = 1 - i.$$

Relevanz in Mathematik und Physik. Die Menge der komplexen Zahlen bildet eine wesentliche Grundlage der Mathematik; darauf basierende Konzepte und Methoden werden insbesondere im Bereich der Physik verwendet.

(i) Erweiterung der Zahlenbereiche. Die Betrachtung elementarer linearer und quadratischer Gleichungen mit natürlichen Zahlen als Koeffizienten motiviert eine schrittweise Erweiterung der Menge der natürlichen Zahlen auf die Mengen der ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen

$$\begin{cases} n + 1 = 0\,, \quad n = -1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\,, \\ 2\,q = 1\,, \quad q = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}\,, \\ x^2 = 2\,, \quad x \in \big\{ -\sqrt{2}, \sqrt{2} \big\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,, \\ z^2 + 1 = 0\,, \quad z \in \big\{ -\mathrm{i}, \mathrm{i} \big\} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

(ii) FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA. Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jede nicht konstante Polynomfunktion eine Nullstelle über der Menge des komplexen Zahlen besitzt; dies ermöglicht es (theoretisch), jede Polynomfunktion vom Grad $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit reellen oder komplexen Koeffizienten als Produkt von $n$ Linearfaktoren darzustellen (zur Vereinfachung wird angenommen, dass der Leitkoeffizient gleich $1$ ist)

$$a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}\,, \quad p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0\,,$$
$$\exists\, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} : \quad p(x) = x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0 = (x - z_1) \cdots (x - z_n)\,.$$

Einfacher Spezialfall ($n = 2$). Man beachte, dass für reelle und komplexe Zahlen die Gleichheit (allgemeiner in einem Körper; Anwendung von Distributiv- und Kommutativgesetz)

$$(a-b)\cdot(a+b) = a\cdot(a+b) - b\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b - b\cdot a - b\cdot b = a^2 - b^2$$

gilt; für jede quadratische Funktion der speziellen Form

$$\gamma \in \mathbb{R}_{>0}: \qquad p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2 + \gamma$$

erhält man mit Hilfe der Gleichheit $\mathrm{i}^2 = -1$ eine Zerlegung in Linearfaktoren (die Lösungen der zugehörigen Gleichung $x^2 + \gamma = 0$ bzw. Nullstellen kann man damit ablesen $x \in \{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma}, \mathrm{i}\sqrt{\gamma}\}$)

$$x^2 + \gamma = x^2 - (-\gamma) = x^2 - \left(\mathrm{i}\sqrt{\gamma}\right)^2 = \left(x + \mathrm{i}\sqrt{\gamma}\right)\left(x - \mathrm{i}\sqrt{\gamma}\right).$$

Im etwas allgemeineren Fall mit komplexen Linearfaktoren verwendet man zusätzlich quadratisches Ergänzen

$$\begin{aligned} &\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \gamma = \beta - \alpha^2 \in \mathbb{R}_{>0}, \\ x^2 + 2\,\alpha\,x + \beta &= \left(x^2 + 2\,\alpha\,x + \alpha^2\right) + \beta - \alpha^2 = \left(x + \alpha\right)^2 + \beta - \alpha^2 \\ &= \left(x + \alpha + \mathrm{i}\sqrt{\beta - \alpha^2}\right)\left(x + \alpha - \mathrm{i}\sqrt{\beta - \alpha^2}\right). \end{aligned}$$

(iii) Komplexe Exponentialfunktion. Die Eulersche Formel verknüpft trigonometrische Funktionen und die komplexe Exponentialfunktion

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x} = \cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x) \in \mathbb{C}\,,$$
$$x = \pi\,, \quad \sin(\pi) = 0\,, \quad \cos(\pi) = -1: \quad \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\pi} + 1 = 0\,.$$

Die komplexe Exponentialfunktion hat u.a. Anwendungen bei der Approximation von Funktionen (Fouriertransformation).

Einfache Rechnung. Mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion lassen sich Additionstheoreme für Sinus und Cosinus leicht verifizieren (Real- und Imaginärteile stimmen überein)

$$\begin{aligned}
\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}: \quad \cos(x_1+x_2) + \mathrm{i}\,\sin(x_1+x_2) &= \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(x_1+x_2)} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x_1}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x_2} \\
&= \big(\cos(x_1) + \mathrm{i}\,\sin(x_1)\big)\,\big(\cos(x_2) + \mathrm{i}\,\sin(x_2)\big) \\
&= \cos(x_1)\,\cos(x_2) + \mathrm{i}\,\sin(x_1)\,\cos(x_2) + \mathrm{i}\,\cos(x_1)\,\sin(x_2) \\
&\qquad + \underbrace{\mathrm{i}^2}_{=-1}\,\sin(x_1)\,\sin(x_2) \\
&= \cos(x_1)\,\cos(x_2) - \sin(x_1)\,\sin(x_2) \\
&\qquad + \mathrm{i}\,\big(\sin(x_1)\,\cos(x_2) + \cos(x_1)\,\sin(x_2)\big)\,,
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \sin(x_1+x_2) = \sin(x_1)\,\cos(x_2) + \cos(x_1)\,\sin(x_2)\,, \\ \cos(x_1+x_2) = \cos(x_1)\,\cos(x_2) - \sin(x_1)\,\sin(x_2)\,. \end{cases}$$

(iv) Quantenmechanik. Wesentliche Bereiche der Physik wie die Quantenmechanik erfordern die Betrachtung komplexer Zahlen; die imaginäre Einheit tritt beispielsweise in Schrödingergleichungen zur Beschreibung von Wellenfunktionen mit komplexen Werten auf (Beschreibung des dreidimensionalen Raumes durch Tripel reeller Zahlen $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, Beschreibung der Zeit durch reelle Zahlen $t \in \mathbb{R}$ oder nicht-negative reelle Zahlen $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$)

$$\Psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \mathrm{i}\, \partial_t \Psi(x, y, z, t) = H\, \Psi(x, y, z, t)\,. \qquad \triangle$$

Weitere Beispiele, vgl. Maple.

Komplexe Zahlen in Maple
(Imaginäre Einheit, Elementare Rechenoperationen)

```
> restart;
```

```
> sqrt(-1);
  z1 := a1 + sqrt(-1) · b1;
  z2 := a2 + sqrt(-1) · b2;
  z1 + z2;
  -z1;
  expand(z1 · z2);
```

$$\frac{1}{z1} = evalc\left(\frac{1}{z1}\right);$$

$$I$$

$$z1 := a1 + I\,b1$$

$$z2 := a2 + I\,b2$$

$$a1 + I\,b1 + a2 + I\,b2$$

$$-a1 - I\,b1$$

$$a1\,a2 + I\,a1\,b2 + I\,b1\,a2 - b1\,b2$$

$$\frac{1}{a1 + I\,b1} = \frac{a1}{a1^2 + b1^2} - \frac{I\,b1}{a1^2 + b1^2} \tag{1}$$

```
> assume(a1, real);
  assume(b1, real);
  z1;
  conjugate(z1);
  expand(z1 · conjugate(z1));
```

$$a1\sim + I\,b1\sim$$

$$a1\sim - I\,b1\sim$$

$$a1\sim^2 + b1\sim^2 \tag{2}$$

Lineare Gleichungssysteme mit komplexen Koeffizienten

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
  A := ⟨⟨I, 1, 1 + I⟩|⟨-1, -1 + I, -1 + I⟩|⟨-1 + I, -I, -I⟩⟩;
  b := ⟨1, 1 - I, -1⟩;
  LinearSolve(A, b);
```

$$A := \begin{bmatrix} I & -1 & -1 + I \\ 1 & -1 + I & -I \\ 1 + I & -1 + I & -I \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - I \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+2\,\mathrm{I} \\ -2+\frac{4\,\mathrm{I}}{3} \\ -\frac{1}{3}-\frac{2\,\mathrm{I}}{3} \end{bmatrix} \tag{3}$$

> *restart*;
*with*(*LinearAlgebra*) :
$A := \langle\langle I, 1\rangle|\langle -1, -1+I\rangle|\langle -1+I, -I\rangle\rangle$;
$b := \langle 1, 1-I\rangle$;
*LinearSolve*(*A*, *b*);

$$A := \begin{bmatrix} \mathrm{I} & -1 & -1+\mathrm{I} \\ 1 & -1+\mathrm{I} & -\mathrm{I} \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 1 \\ 1-\mathrm{I} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \_t_1 \\ \frac{\_t_1}{3}+\frac{2\,\mathrm{I}\,\_t_1}{3}-1 \\ -\frac{\_t_1}{3} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Linearfaktorisierung quadratischer Polynomfunktionen, Quadratische Gleichungen
Vorsicht! gamma ist in Maple vordefinierte Größe

> *restart*;

> *evalf*(gamma);

$$0.5772156649 \tag{5}$$

> *restart*;
*assume*($ga > 0$);
$p := x \to x^2 + ga$;
$Loesungen := solve(p(x), x)$;
$p(x) = (x - Loesungen[1]) \cdot (x - Loesungen[2])$;
$p(x) = expand((x - Loesungen[1]) \cdot (x - Loesungen[2]))$;

$$p := x \mapsto x^2 + ga$$

$$Loesungen := \mathrm{I}\sqrt{ga\sim}, -\mathrm{I}\sqrt{ga\sim}$$

$$x^2 + ga\sim = \left(x - \mathrm{I}\sqrt{ga\sim}\right)\left(x + \mathrm{I}\sqrt{ga\sim}\right)$$

$$x^2 + ga\sim = x^2 + ga\sim \tag{6}$$

> *restart*;
$p := x \to x^2 + 2 \cdot \mathrm{alpha} \cdot x + \mathrm{beta}$;
$Loesungen := solve(p(x), x)$;
$p(x) = (x - Loesungen[1]) \cdot (x - Loesungen[2])$;

$p(x) = expand((x - Loesungen[1]) \cdot (x - Loesungen[2]));$

$$p := x \mapsto x^2 + 2\,\alpha\,x + \beta$$

$$Loesungen := -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}, -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}$$

$$2\,\alpha\,x + x^2 + \beta = \left(x + \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}\right)\left(x + \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}\right)$$

$$2\,\alpha\,x + x^2 + \beta = 2\,\alpha\,x + x^2 + \beta \qquad \textbf{(7)}$$

>

Alle weiteren Inhalte von 2.2.2 Komplexe Zahlen (ab Definition 2.2.16) werden im Vertiefungsteil besprochen.

### 2.2.3 Endliche Körper

Siehe Skriptum

## 2.3 Matrixrechnung

Siehe Skriptum

**Ergänzendes Beispiel zur Inversen einer $(2 \times 2)$-Matrix, vgl. Maple und Proseminar.**

**Aufgabe 27**

Für eine (reelle oder komplexe) $2 \times 2$-matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ wird die Zahl

$$\det(A) := ad - bc$$

die *Determinante* von $A$ genannt. Zeigen Sie, dass für je zwei solcher Matrizen $A$ und $B$ stets gilt

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Dann zeigen Sie: eine $2 \times 2$-Matrix $A$ ist genau dann invertierbar wenn $\det(A) \neq 0$ gilt.

Berechnung der inversen Matrix im Spezialfall einer 2x2-Matrix (!)
Ausnützen früherer Überlegungen (vgl. Proseminar)

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
```

```
> A := <<a11, a21>|<a12, a22>>;
  MatrixInverse(A);
```

$$A := \begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{a22}{a11\,a22 - a12\,a21} & -\frac{a12}{a11\,a22 - a12\,a21} \\ -\frac{a21}{a11\,a22 - a12\,a21} & \frac{a11}{a11\,a22 - a12\,a21} \end{bmatrix} \quad (1)$$

```
> b := <1, 0>;
  LinearSolve(A, b);
  b := <0, 1>;
  LinearSolve(A, b);
```

$$b := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{a22}{a11\,a22 - a12\,a21} \\ -\frac{a21}{a11\,a22 - a12\,a21} \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{a12}{a11\,a22 - a12\,a21} \\ \frac{a11}{a11\,a22 - a12\,a21} \end{bmatrix} \quad (2)$$

```
> detA := a11 · a22 - a12 · a21;
  Aux1 := a22 · b1 - a12 · b2;
  Aux2 := a11 · b2 - a21 · b1;
  AInv11 := subs({b1 = 1, b2 = 0}, Aux1/detA);
  AInv21 := subs({b1 = 1, b2 = 0}, Aux2/detA);
  AInv12 := subs({b1 = 0, b2 = 1}, Aux1/detA);
```

$$AInv22 := subs\left(\{b1 = 0, b2 = 1\}, \frac{Aux2}{detA}\right);$$

$$detA := a11\ a22 - a12\ a21$$

$$Aux1 := -a12\ b2 + a22\ b1$$

$$Aux2 := a11\ b2 - a21\ b1$$

$$AInv11 := \frac{a22}{a11\ a22 - a12\ a21}$$

$$AInv21 := -\frac{a21}{a11\ a22 - a12\ a21}$$

$$AInv12 := -\frac{a12}{a11\ a22 - a12\ a21}$$

$$AInv22 := \frac{a11}{a11\ a22 - a12\ a21} \tag{3}$$

> $A := \langle\langle 1, 3\rangle | \langle 2, 4\rangle\rangle;$
> $MatrixInverse(A);$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{4}$$

>