Grenzwerte von Folgen und Funktionen, Stetigkeit

Literaturquelle. Skriptum von Peter Wagner [1] zur Vorlesung *Mathematik A*.

Kapitel I.3. Grenzwerte

Kapitel I.3.1. Grenzwerte von Folgen

Kapitel I.3.2. Grenzwertsätze

Kapitel I.3.2. Grenzwerte bei Funktionen

Kapitel I.4. Stetigkeit

Kapitel I.4.1. Definitionen und Beispiele

[1] Siehe http://mat1.uibk.ac.at/wagner/skripten.html

Theoretischer Hintergrund.

(1) *Reelle Folge.* Eine reelle Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : n \mapsto a(n)$. Meistens verwendet man die Kurzschreibweise $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wobei $a_n = a(n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Wesentlich ist die Untersuchung des Verhaltens von $(a_n)_{n\geq N}$ für $N \in \mathbb{N}$ *groß*, die ersten Folgenglieder sind dafür meistens unwesentlich (außer etwa bei rekursiv definierten Folgen).

(2) *Grenzwert einer Folge, konvergente bzw. divergente Folge.* Eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert einer reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, genau dann wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq N : \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon .$$

Besitzt eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert $\alpha \in \mathbb{R}$, heißt sie konvergent und man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \qquad \text{oder} \qquad a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha ,$$

ansonsten heißt sie divergent und man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n \text{ existiert nicht} .$$

Eindeutigkeit des Grenzwertes. Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig bestimmt, aus

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \widetilde{\alpha}$$

folgt $\widetilde{\alpha} = \alpha$.
Denn. Für (vorgegebenes) $\varepsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ so, daß für alle natürlichen Zahlen $n \geq N$ sowohl

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon \qquad \text{als auch} \qquad |a_n - \widetilde{\alpha}| < \varepsilon$$

gilt. Mittels Dreieckungleichung folgt

$$0 \leq |\alpha - \widetilde{\alpha}| = |\alpha - a_n + a_n - \widetilde{\alpha}| \leq |a_n - \alpha| + |a_n - \widetilde{\alpha}| < 2\epsilon .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, führt die Annahme $\alpha - \widetilde{\alpha} \neq 0$ auf einen Wiederspruch, und damit ergibt sich $\alpha = \widetilde{\alpha}$. $\diamondsuit$

Divergenz einer Folge gegen $\pm\infty$. Eine divergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt divergent gegen ∞, genau dann wenn

$$\forall M \in \mathbb{N} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq N : \quad a_n > M .$$

Eine divergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt divergent gegen $-\infty$, genau dann wenn

$$\forall M \in \mathbb{N} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq N : \quad a_n < -M .$$

(3) *Grenzwertsätze (Summe, Produkt, Kehrwert).* Für konvergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}(-a_n) = -\lim_{n\to\infty} a_n\,,$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n\,,$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}\,.$$

Sofern $b_n > 0$ für alle $n \geq N$ mit $N \in \mathbb{N}$ (geeignet gewählt), gilt weiters

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{b_n} = \infty\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n > 0\,,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\tfrac{a_n}{b_n} = \infty\,.$$

Denn. Es bezeichne

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n\,,\qquad \beta = \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

Die ersten Behauptungen folgen aus grundlegenden Eigenschaften der Betragsfunktion, der Definition des Grenzwertes, geschicktem Reformulieren und Anwenden der Dreiecksungleichung. Verwende etwa

$$|-a_n-(-\alpha)| = |a_n-\alpha| < \varepsilon\,,$$
$$|(a_n+b_n)-(\alpha+\beta)| = |(a_n-\alpha)+(b_n-\beta)| \leq |a_n-\alpha|+|b_n-\beta| < 2\,\varepsilon\,,$$
$$|a_n b_n - \alpha\beta| = |a_n b_n \mp \alpha b_n - \alpha\beta| = |(a_n-\alpha)\,b_n + \alpha(b_n-\beta)| < (|\alpha|+|b_n|)\,\varepsilon\,,$$
$$\left|\tfrac{1}{a_n}-\tfrac{1}{\alpha}\right| = \left|\tfrac{a_n-\alpha}{a_n\,\alpha}\right| < \tfrac{1}{|a_n|\,|\alpha|}\,\varepsilon\,.$$

Für die letzen beiden Aussagen verwende

$$b_n < \varepsilon \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{b_n} > \tfrac{1}{\varepsilon} > M\,,$$
$$\tfrac{a_n}{b_n} = \tfrac{a_n-\alpha}{b_n} + \tfrac{\alpha}{b_n} > \alpha M - \tfrac{\varepsilon}{b_n}\,.$$
◇

Weitere Grenzwertsätze. Ähnliche Überlegungen wie zuvor zeigen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,\quad \lim_{n\to\infty} b_n \neq -\infty \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \infty\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,\quad \lim_{n\to\infty} b_n > 0 \quad\text{oder}\quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,\quad \lim_{n\to\infty} b_n > 0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\tfrac{a_n}{b_n} = \infty\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n \ \text{existiert},\quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\tfrac{a_n}{b_n} = 0\,.$$

Unbestimmte Fälle. Die folgenden Fälle lassen keine allgemeine Aussage zu

$$\lim_{n\to\infty} a_n * b_n = \infty-\infty,\ \infty\cdot 0,\ \tfrac{\infty}{\infty},\ \tfrac{0}{0}, 1^{\infty}\,.$$

Relation. Erfüllen konvergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Eigenschaft

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq N: \quad a_n \leq b_n\,,$$

so folgt daraus

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

Gilt insbesondere

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq N: \quad a_n < b_n\,,$$

so ist im Allgemeinen jedoch nur die Relation

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

gültig.
Denn. Die Behauptung folgt mittels eines indirekten Beweises. ◊

Einschließungssatz. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n\,.$$

Erfüllt eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Bedingung

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq N: \quad a_n \leq b_n \leq c_n\,,$$

so folgt daraus

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n\,.$$

Denn. Es bezeichne

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n\,.$$

Aus $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ ergibt sich $\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$ und somit gilt

$$\alpha - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \alpha + \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\varepsilon < b_n - \alpha < \varepsilon\,,$$

was die Behauptung zeigt. ◊

(4) *Monotonie, Beschränktheit.* Die für reelle Funktionen eingeführten Begriffe Monotonie und Beschränktheit lassen sich direkt auf reelle Folgen übertragen.

Resultat (Intervallschachtelung). Jede schwach monoton steigende und nach oben beschränkte Folge ist konvergent.
Denn. Betrachte eine monoton steigende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit oberer Schranke $S > 0$. Setze $I_1 = [\ell_1, r_1] = \big[a_1, S\big]$ und definiere durch die Rekursion

$$I_k = [\ell_k, r_k] = \begin{cases} \big[\ell_{k-1}, \frac{1}{2}(\ell_{k-1} + r_{k-1})\big]\,, & \text{falls für alle } n \in \mathbb{N} \text{ die Eigenschaft} \\ & a_n < \frac{1}{2}(\ell_{k-1} + r_{k-1}) \text{ gilt}\,, \\ \big[\frac{1}{2}(\ell_{k-1} + r_{k-1}), r_{k-1}\big]\,, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

eine Folge von (echt) ineinandergeschachtelten abgeschlossenen Intervallen $I_k \subsetneq I_{k-1} \subsetneq \cdots \subsetneq I_1$, deren Länge gegen Null konvergiert

$$r_k - \ell_k = \tfrac{1}{2}\,(r_{k-1} - \ell_{k-1}) = \tfrac{1}{2^{k-1}}\,(r_1 - \ell_1) \xrightarrow{k\to\infty} 0\,.$$

Die Eigeschaften der reellen Zahlen sichern die Existenz einer reellen Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$, die in allen Intervallen enthalten ist. Somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha\,,$$

was die Behauptung zeigt. $\diamondsuit$

(5) *Reellwertige Exponenten.*

Einführung von a^x für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ mittels Folgen.

(6) *Grenzwert von Funktionen.* Zur Vereinfachung betrachte eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: D = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Man definiert (analog zu Folgen)

$$\lim_{\xi\to\infty} f(\xi) = \alpha \quad\Longleftrightarrow\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall \xi \in D \text{ mit } \xi \geq N: \quad |f(\xi) - \alpha| < \varepsilon\,,$$
$$\lim_{\xi\to\infty} f(\xi) = \infty \quad\Longleftrightarrow\quad \forall M > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall \xi \in D \text{ mit } \xi \geq N: \quad f(\xi) > M\,.$$

Zusätzlich macht es Sinn, folgende Definitionen einzuführen (für $x \in D$, aber auch für $f: D = \mathbb{R} \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$).

$$\lim_{\xi\to x} f(\xi) = \alpha \quad\Longleftrightarrow\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \xi \in D \text{ mit } |\xi - x| < \delta: \quad |f(\xi) - \alpha| < \varepsilon\,,$$
$$\lim_{\xi\to x_+} f(\xi) = \alpha \quad\Longleftrightarrow\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \xi \in D \text{ mit } x < \xi < x + \delta: \quad |f(\xi) - \alpha| < \varepsilon\,,$$
$$\lim_{\xi\to x} f(\xi) = \infty \quad\Longleftrightarrow\quad \forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \xi \in D \text{ mit } |\xi - x| < \delta: \quad f(\xi) > M\,,$$
$$\lim_{\xi\to x_+} f(\xi) = \infty \quad\Longleftrightarrow\quad \forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \xi \in D \text{ mit } x < \xi < x + \delta: \quad f(\xi) > M\,.$$

Grenzwertsätze. Ähnlich wie für Folgen lassen sich Grenzwertsätze für Funktionen ableiten.

(7) *Stetigkeit.* Betrachte eine Funktion $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Man definiert

$$f \text{ stetig in } x \in D \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{\xi\to x} f(\xi) = f(x)\,.$$

Eine in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches stetige Funktion $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig (auf D).

(8) *Stetige Fortsetzbarkeit.* Zur Vereinfachung betrachte $f : D = \mathbb{R} \setminus \{x\} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Man definiert

$$f \text{ stetig fortsetzbar in } x \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{\xi \to x} f(\xi) \text{ existiert}.$$

Die Funktion

$$\widetilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \xi \longmapsto \begin{cases} \widetilde{f}(\xi) = f(\xi), & \xi \in D, \\ \widetilde{f}(x) = \lim_{\eta \to x} f(\eta), & \xi = x, \end{cases}$$

heißt dann stetige Forsetzung von f (auf $\mathbb{R}$, insbesondere stetig im Punkt x).

(9) *Stetigkeit und Grenzwerte.* Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{R}}$ eine konvergente Folge (mit Grenzwert in D) und $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Weiters existiere der Grenzwert einer Funktion g in einem Punkt $x \in D$. Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f\big(\lim_{n \to \infty} a_n\big),$$
$$\lim_{\xi \to x} f\big(g(\xi)\big) = f\big(\lim_{\xi \to x} g(\xi)\big).$$

Denn. Es bezeichne

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Verwende

$$|a_n - \alpha| < \delta, \qquad |f(\alpha) - f(a_n)| < \epsilon.$$

Ähnliche Überlegungen ergeben die zweite Aussage. ◇

Beispiele.

(i) Bestimme
$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n}.$$

(ii) Bestimme
$$\lim_{n\to\infty} 3.$$

(iii) Bestimme
$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{n-1}{n+2}.$$

(iv) Bestimme
$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}.$$

(v) Bestimme
$$\lim_{n\to\infty} n.$$

(vi) Für $c \in \mathbb{R}$ bestimme
$$\lim_{n\to\infty} c^n.$$

(vii) Für $d > 0$ bestimme
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{d}.$$

(viii) Bestimme
$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{n}{2n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \tfrac{n^2}{2n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \tfrac{n}{2n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \tfrac{n^3+n}{2n^3-3n^2+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \tfrac{2n+(-1)^n n}{n}.$$

(ix) Bestimme (mittels Stetigkeit der Wurzelfunktion)
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-n}\right).$$

(x) Bestimme
$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{\sin n}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n+5^n}.$$

(xi) Bestimme den Grenzwert der rekursiv definierten Folge
$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}, \quad n \geq 1.$$

(xii) Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ bestimme
$$\lim_{\xi\to\infty} -\xi, \qquad \lim_{\xi\to x} -\xi, \qquad \lim_{\xi\to\infty} \tfrac{1}{\xi}, \qquad \lim_{\xi\to x} \tfrac{1}{\xi}, \qquad \lim_{\xi\to\infty} \sqrt{\xi}, \qquad \lim_{\xi\to x} \sqrt{\xi},$$
$$\lim_{\xi\to\infty} \tfrac{\sqrt{\xi}-1}{\xi-1}, \qquad \lim_{\xi\to x} \tfrac{\sqrt{\xi}-1}{\xi-1}, \qquad \lim_{\xi\to\infty} \arctan\xi, \qquad \lim_{\xi\to x} \arctan\xi.$$

(xiii) Bestimme

$$\lim_{\xi\to 0}\tfrac{1}{\xi}\,, \qquad \lim_{\xi\to 0}\tfrac{1}{|\xi|}\,, \qquad \lim_{\xi\to 0_\pm}\tfrac{1}{\xi}\,.$$

(xiv) Sind folgende Funktionen stetig?

$$\begin{gathered}\mathrm{Id}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad |\cdot|:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}:x\mapsto\tfrac{1}{x}\,,\\ \sin,\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad \operatorname{sign}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad \operatorname{sign}^2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\big(\operatorname{sign}x\big)^2\,.\end{gathered}$$

(xv) Sind folgende Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig fortsetzbar?

$$\begin{gathered}f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}:x\mapsto\tfrac{1}{x}\,, \qquad \operatorname{sign}^2:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}, \qquad f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}:x\mapsto\tfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\,,\\ f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}:x\mapsto\tfrac{\sin x}{x}\,, \qquad f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}:x\mapsto\sin\tfrac{1}{x}\,.\end{gathered}$$