Differentialrechnung

Quelle. Skriptum von Peter Wagner[1] zur Vorlesung *Mathematik A*.

Kapitel II. Differentialrechnung

Kapitel II.6. Die erste Ableitung

Kapitel II.7. Die Technik des Differenzierens

Vgl. auch Kapitel II.8. Anwendungen der ersten Ableitung

Vgl. auch Kapitel II.9. Die zweite Ableitung

[1] Siehe http://mat1.uibk.ac.at/wagner/skripten.html

Theoretischer Hintergrund.

(1) *Spezialfall.* Der Graph einer affin-linearen Funktion der Form (wobei $x_0, a, b \in \mathbb{R}$)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) = a + b\,(x - x_0)$$

ergibt eine Gerade. Die Sekante (manchmal auch als Sekantengerade bezeichnet) durch je zwei Punkte besitzt, unabhängig von den gewählten Punkten $(x, f(x))$ und $(\xi, f(\xi))$, die Steigung

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = b\,.$$

(2) *Bemerkung.* Geeignete Voraussetzungen an den gewählten Definitionsbereich, insbesondere gelte für die betrachteten Argumente $x, \xi \in D$.

Differentialquotient. Für eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die zugehörige Sekante durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(\xi, f(\xi))$ durch

$$s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \eta \longmapsto s(\eta) = f(x) + \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}\,(\eta - x)$$

gegeben (per Konstruktion ergibt sich eine Gerade durch gewählten Punkte und insbesondere gilt $s(x) = f(x)$ sowie $s(\xi) = f(\xi)$). Im Allgemeinen hängt die Sekante und insbesondere ihre Steigung (Differenzenquotient)

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

von den gewählten Punkten ab. Falls der Grenzwert (Differentialquotient, Reduktion von zwei Punkten auf einen Punkt $(x, f(x))$)

$$f'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

existiert, heißt die Funktion differenzierbar in $x \in D$, und der Grenzwert die erste Ableitung der Funktion in $x \in D$. Die zugehörige Gerade durch $(x, f(x))$ mit Steigung $f'(x)$, gegeben durch die Funktion

$$t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \eta \longmapsto t(\eta) = f(x) + f'(x)(\eta - x)$$

bezeichnet man als Tangente (manchmal auch als Tangentengerade) von f in $x \in D$ (auch: an den Graphen von f in $x \in D$).

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$, die in allen Punkten ihres Definitionsbereiches D differenzierbar ist, heißt differenzierbar (in D) und $f' : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f'(x)$ bezeichnet ihre erste Ableitung.

Gebräuchliche Schreibweisen. Gebräuchliche Schreibweisen für die erste Ableitung einer Funktion sind

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\,, \quad f'\,, \quad \dot{f}\,.$$

(3) *Differenzierbarkeit und Stetigkeit.* Eine differenzierbare Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist insbesondere stetig, denn es gilt

$$
\begin{aligned}
x \in D: \qquad \lim_{\xi \to x} f(\xi) &= \lim_{\xi \to x} \big(f(\xi) - f(x) + f(x) \big) \\
&= f(x) + \lim_{\xi \to x} (\xi - x) \, \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \\
&= f(x) + \lim_{\xi \to x} (\xi - x) \, \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \\
&= f(x) + \underbrace{\lim_{\xi \to x} (\xi - x)}_{=0} \, \underbrace{\lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}}_{= f'(x) \in \mathbb{R}} \\
&= f(x) \, .
\end{aligned}
$$

(4) *Differenzierbarkeit und Approximierbarkeit durch eine affin-lineare Funktion.* Eine differenzierbare Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird lokal durch eine affin-lineare Funktion approximiert, d.h. in einer Umgebung eines Punktes $x \in D$ gilt

$$
\begin{aligned}
f(\xi) = f(x) + f'(x)\,(\xi - x) + \varrho(x,\xi) \;\text{ mit }\; \lim_{\xi \to x} \frac{\varrho(x,\xi)}{\xi - x} = 0 \qquad \text{bzw.} \\
f(x+h) = f(x) + f'(x)\, h + \widetilde{\varrho}(x,h) \;\text{ mit }\; \lim_{h \to 0} \frac{\widetilde{\varrho}(x,h)}{h} = 0 \, .
\end{aligned}
$$

Umformulieren der Relation für die erste Ableitung von f in $x \in D$ führt nämlich auf

$$
\begin{aligned}
& f'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \\
\Longrightarrow \quad & 0 = \lim_{\xi \to x} \left(\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} - f'(x) \right) = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x) - f'(x)(\xi - x)}{\xi - x} \\
\Longrightarrow \quad & \text{für } \varrho(x,\xi) = f(\xi) - f(x) - f'(x)(\xi - x) \text{ gilt } \lim_{\xi \to x} \frac{\varrho(x,\xi)}{\xi - x} = 0 \, .
\end{aligned}
$$

(5) *Elementare Differentiationsregeln.*

Summenregel

Produktregel

Quotientenregel

Kettenregel

Regel zur Ableitung der Inversen

Beispiele.

(1) Gib an, in welchen Punkten ihres Definitionsbereiches die Wurzelfunktion differenzierbar ist und bestimme dort ihre Tangente.

(2) Gib ein Beispiel einer stetigen, jedoch nicht differenzierbaren Funktion an.

(3) Vgl. Technik des Differenzierens

Polynomfunktionen

Trigonometrische Funktionen

Exponentialfunktion, Logarithmus