Analysis und Stochastik im Schulunterricht **VU 2, 702770**
Mechthild Thalhammer **WS 2020/21**

Integralrechnung

Quelle. Skriptum von Peter Wagner [1] zur Vorlesung *Mathematik A*.

Kapitel III. Integralrechnung

Kapitel III.10. Das Integral

Vgl. auch Kapitel III.13. Anwendungen des Integrals

Vgl. auch Kapitel III.14. Uneigentliche Integrale

[1] Siehe http://mat1.uibk.ac.at/wagner/skripten.html

Theoretischer Hintergrund.

(1) *Ziel.* Einführung des bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

für eine (stückweise) stetige Funktion $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(i) *Zerlegung, Feinheit, Stützstellen.* Eine Menge mit der Eigenschaft

$$Z = \left\{x_0, x_1, \dots, x_k\right\}, \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b,$$

heißt eine Zerlegung von $[a, b]$. Die Feinheit von Z ist definiert durch (Länge des größten Teilintervalles)

$$\varphi(Z) = \max\left\{x_i - x_{i-1} \,\middle|\, 1 \leq i \leq k\right\} \in \mathbb{R}_{>0}\,.$$

Eine Menge mit der Eigenschaft

$$\Xi = \left\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\right\}, \qquad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad 1 \leq i \leq k,$$

bezeichnet man als Stützstellen (zur Zerlegung Z).

(ii) *Darboux- und Riemannsummen.* Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ besitzt auf den zu einer Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ des Definitionsbereiches gehörigen Teilintervallen Minimal- und Maximalwerte

$$\min\left\{f(x) \,\middle|\, x \in [x_{i-1}, x_i]\right\}, \quad \max\left\{f(x) \,\middle|\, x \in [x_{i-1}, x_i]\right\}, \quad 1 \leq i \leq k\,.$$

Die Summen

$$UD(Z) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1}) \min\left\{f(x) \,\middle|\, x \in [x_{i-1}, x_i]\right\},$$
$$OD(Z) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1}) \max\left\{f(x) \,\middle|\, x \in [x_{i-1}, x_i]\right\},$$

heißen untere bzw. obere Darbouxsumme von f zur Zerlegung Z. Allgemeiner heißt eine Summe der Form

$$R(Z, \Xi) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1})\, f(\xi_i)$$

eine Riemannsumme von f zur Zerlegung Z und den Stützstellen Ξ.

(iii) *Spezialfall.* Wählt man speziell äquidistante Unterteilungen, so folgt

$$Z = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}, \qquad x_i = a + i\,\tfrac{b-a}{k}, \quad 0 \le i \le k, \qquad \varphi(Z) = \tfrac{b-a}{k},$$

$$UD(Z) = \tfrac{b-a}{k} \sum_{i=1}^{k} \min\bigl\{f(x)\,\big|\, x \in [x_{i-1}, x_i]\bigr\},$$

$$OD(Z) = \tfrac{b-a}{k} \sum_{i=1}^{k} \max\bigl\{f(x)\,\big|\, x \in [x_{i-1}, x_i]\bigr\}.$$

(iv) *Abschätzung.* Offensichtlich gilt (Stützstellen $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ für $1 \le i \le k$)

$$\min\bigl\{f(x)\,\big|\, x \in [x_{i-1}, x_i]\bigr\} \le f(\xi_i) \le \max\bigl\{f(x)\,\big|\, x \in [x_{i-1}, x_i]\bigr\}, \quad 1 \le i \le k,$$

und folglich

$$\begin{aligned} UD(Z) &= \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1}) \min\bigl\{f(x)\,\big|\, x \in [x_{i-1}, x_i]\bigr\} \\ &\le R(Z, \Xi) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1})\, f(\xi_i) \\ &\le OD(Z) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1}) \max\bigl\{f(x)\,\big|\, x \in [x_{i-1}, x_i]\bigr\}. \end{aligned}$$

Aus der Beschränktheit der Darbouxsummen $UD(Z)$ und $OD(Z)$ (für $\varphi(Z) \to 0$, s.u.) folgt damit auch die Beschränktheit von Riemannsummen.

(v) *Resultat.* Es bezeichne $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $(Z^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen mit

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\bigl(Z^{(n)}\bigr) = 0$$

sowie $(\Xi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Stützstellen zur Zerlegung $Z^{(n)}$. Dann konvergieren die Darbouxsummen und zugehörigen Riemannsummen gegen denselben Grenzwert. Diesen Grenzwert bezeichnet man als bestimmtes Integral von f (mit Integrationsintervall $[a, b]$)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} UD\bigl(Z^{(n)}\bigr) = \lim_{n\to\infty} R\bigl(Z^{(n)}, \Xi^{(n)}\bigr) = \lim_{n\to\infty} OD\bigl(Z^{(n)}\bigr).$$

(vi) *Zusammenhang mit Flächen.* Die vom Graphen einer Funktion f und der x-Achse begrenzte Fläche ist durch ($f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig)

$$\int_a^b \bigl|f(x)\bigr|\,\mathrm{d}x$$

gegeben.

(vii) *Linearität des Integrals.* Die Linearität (Additivität, Homogenität) von Summen ($f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $c \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1}) \big(f + g\big)(\xi_i) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) + \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1}) g(\xi_i),$$

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1}) \big(cf\big)(\xi_i) = c \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i),$$

überträgt sich auf das bestimmte Integral

$$\int_a^b \big(f + g\big)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b \big(cf\big)(x)\,\mathrm{d}x = c \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(viii) *Monotonie, Positivität, Dreiecksungleichung.* Es gilt ($f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig)

$$\forall x \in [a, b]: \quad f(x) \le g(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Insbesondere folgt

$$\forall x \in [a, b]: \quad 0 \le f(x) \le c \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le c\,(b - a)$$

und weiters

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x.$$

(ix) *Zerlegung des Integrationsintervalles.* Es gilt

$$a < b < c: \quad \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Außerdem setzt man

$$b < a: \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(x) *Erweiterung.* Erweiterung des Resultates auf stückweise stetige Funktionen.

(2) *Ziel.* Einführung des unbestimmten Integrals

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

und Herleitung eines Zusammenhanges mit dem bestimmten Integral (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

(i) *Resultat (Haupsatz der Differential- und Integralrechnung).* Im Folgenden bezeichne $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige (und damit Riemann-integrierbare) Funktion. Mittels des bestimmten Integrals definiert man die Funktion

$$F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Dann ist F auf (a, b) differenzierbar mit Ableitung

$$F' = f \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x}\,, \quad x \in (a, b)\,.$$

Denn: Aufgrund der Stetigkeit von f gilt (wobei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $|\xi - x| < \delta$ mit $\delta > 0$ geeignet gewählt)

$$\begin{aligned}
&\frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x} - f(x) = \frac{\int_a^\xi f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\,(\xi - x)}{\xi - x} = \frac{\int_x^\xi \big(f(t) - f(x)\big)\,\mathrm{d}t}{\xi - x} \\
&\quad\Longrightarrow \quad \left|\frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x} - f(x)\right| \leq \max_{t \in [x,\xi] \text{ bzw. } [\xi,x]} \big|f(t) - f(x)\big| < \varepsilon \\
&\quad\Longrightarrow \quad \lim_{\xi \to x} \left(\frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x} - f(x)\right) = 0\,.
\end{aligned}$$

♢

(ii) *Stammfunktion, unbestimmtes Integral.* Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt eine differenzierbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft (auf (a, b))

$$F' = f$$

eine Stammfunktion von f. Die Menge aller Stammfunktionen bezeichnet man als unbestimmtes Integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \big\{F : [a, b] \to \mathbb{R} \,\big|\, F' = f \text{ auf (a,b)}\big\}\,.$$

(iii) *Resultat (Haupsatz der Differential- und Integralrechnung).* Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine Konstante. Mit einer bekannten Stammfunktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \big\{F + C : C \in \mathbb{R}\big\}$$

und weiters

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

Denn: Für zwei Stammfunktionen gilt (eine Funktion deren erste Ableitung gleich Null ist, ist konstant)

$$F_1' = f = F_2' \quad \Longrightarrow \quad (F_1 - F_2)' = 0 \quad \Longrightarrow \quad F_1 - F_2 = C\,.$$

Für die spezielle Wahl

$$F_0(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad F_0(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0\,, \quad F_0(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

folgt für jede andere Stammfunktion F wegen $F = F_0 + C$ (d.h. $F(x) = F_0(x) + C$ für jedes $x \in [a, b]$)

$$F(a) = F_0(a) + C = C\,, \quad F(b) = F_0(b) + C = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + F(a)\,,$$

die Behauptung

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)\,.$$

Beispiele. Vgl. Technik des Integrierens

(1) Bestimmtes Integral von konstanten Funktionen (mittels Definition)

(2) Bestimmtes Integral der Exponentialfunktion (mittels Definition)

(3) Grundintegrale

(4) Partielle Integration

(5) Substitionsregel (Transformationsformel)

(6) Partialbruchzerlegung

(7) Quadratisches Ergänzen

(8) Substitution mittels trigonometrischen Funktionen