Trigonometrische Funktionen

Literaturquelle. Skriptum von Peter Wagner[1] zur Vorlesung *Mathematik A*.

Kapitel I.2. Funktionen

Kapitel I.2.4. Trigonometrische Funktionen

Kapitel I.2.6. Arcus-Funktionen

Vgl. auch Kapitel II.7. Die Technik des Differenzierens

Vgl. auch Kapitel III.11.4 Substitution

Vgl. auch Kapitel III.11.7 Winkelfunktionen substituieren

Vgl. auch Kapitel III.11.9 Hyperbelfunktionen

Vgl. auch Kapitel IV.16 Die komplexen Zahlen

[1] Siehe http://mat1.uibk.ac.at/wagner/skripten.html

Überblick.

Elementare trigonometrische Funktionen.

- Sinus
$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] .$$

- Cosinus
$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] .$$
Reduktion auf Sinus mittels (Graph: Shift des Sinus um $\frac{1}{2}\pi$ nach links)
$$\cos x = \sin\left(x + \tfrac{1}{2}\pi\right), \quad x \in \mathbb{R},$$
beispielsweise (Merkregel)
$$\cos 0 = 1 = \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right).$$

- Tangens
$$\tan : \left\{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\tfrac{1}{2}\pi, \pm\tfrac{3}{2}\pi, \dots\right\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} .$$

- Cotangens
$$\cot : \left\{x \in \mathbb{R} : \sin x \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots\right\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} .$$

Zugehörige Kehrwertfunktionen.

- Kosekans
$$\csc : \left\{x \in \mathbb{R} : \sin x \neq 0\right\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \csc x = \frac{1}{\sin x} .$$

- Sekans
$$\sec : \left\{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\right\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sec x = \frac{1}{\cos x} .$$

Zugehörige Umkehrfunktionen.

- Natürliche Einschränkung des Sinus (Definitionsbereich so gewählt, daß Sinus streng monoton steigend und damit injektiv, geeignete Einschränkung des Wertebereiches sichert Surjektivität)
$$\sin : \left[-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\right] \longrightarrow [-1,1] .$$
Arcus-Sinus
$$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\right] .$$

- Natürliche Einschränkung des Cosinus (Definitionsbereich so gewählt, daß Cosinus streng monoton fallend und damit injektiv, geeignete Einschränkung des Wertebereiches sichert Surjektivität)
$$\cos : \big[0, \pi\big] \longrightarrow [-1, 1] \,.$$
  Arcus-Cosinus
$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow \big[0, \pi] \,.$$
- Arcus-Tangens
$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \big(-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\big) \,.$$
- Arcus-Cotangens
$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \longrightarrow \big(0, \pi\big) \,.$$

Hyperbelfunktionen.

- Sinus hyperbolicus
$$\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sinh x = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right).$$
- Cosinus hyperbolicus
$$\cosh : \mathbb{R} \longrightarrow \big[1, \infty\big) : x \longmapsto \cosh x = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right).$$
- Tangens hyperbolicus
$$\tanh : \mathbb{R} \longrightarrow \big(-1, 1\big) : x \longmapsto \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} \,.$$
- Cotangens hyperbolicus
$$\coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \big(-\infty, -1\big) \cup \big(1, \infty\big) : x \longmapsto \tanh x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}} \,.$$

Zugehörige Kehrwertfunktionen.

- Kosekans hyperbolicus
- Sekans hyperbolicus

Zugehörige Umkehrfunktionen.

- Area-Sinus hyperbolicus
$$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,.$$

- Natürliche Einschränkung des Cosinus hyperbolicus (Definitionsbereich so gewählt, daß Funktion streng monoton steigend und damit injektiv, geeignete Einschränkung des Wertebereiches sichert Surjektivität)

$$\cosh : [0,\infty) \longrightarrow [1,\infty)\,.$$

  Area-Cosinus hyperbolicus

$$\operatorname{arcosh} : [1,\infty) \longrightarrow [0,\infty)\,.$$

- Area-Tangens hyperbolicus

- Area-Cotangens hyperbolicus

Theoretischer Hintergrund.

(1) *Radiant, Grad.* Winkel werden oft in Grad gemessen, zweckmäßiger ist jedoch die Angabe in Radiant (Umfang des Einheitskreises 2π rad = 360°, Angabe der Länge des Kreisbogens).

(2) *Einführung mittels rechtwinkligem Dreieck.* Üblicherweise werden die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus für Argumente $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (gemessen in Radiant, entspricht Winkeln $0° < \alpha < 90°$) mit Hilfe rechtwinkliger Dreiecke eingeführt

$$\sin x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}, \quad \cos x = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}},$$

vgl. Abbildung (Skriptum, Seite 15). Für die Funktionen Tangens und Cotangens ergeben sich die Relationen

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}.$$

(3) *Spezialisierung mittels Einheitskreis.* Betrachtet man speziell Dreiecke im ersten Quadranten des Einheitskreises, deren Hypothenusen die Länge 1 haben, so ergibt sich

$$\text{1. Quadrant des Einheitskreises,} \quad 0 \le x \le \tfrac{\pi}{2}: \qquad \begin{cases} \sin x = \text{Gegenkathete}, \\ \cos x = \text{Ankathete}, \end{cases}$$

vgl. Abbildung (Skriptum, Seite 16). Weiters kann man die Werte des Tangens und Cotangens ablesen (ähnliche Dreiecke).

Erweiterung auf reelle Argumente. Für Argumente $0 \le x \le 2\pi$ (bzw. $-\pi \le x \le \pi$) werden Sinus und Cosinus durch Spiegelung fortgesetzt, etwa für den Sinus

$$\begin{aligned} \tfrac{\pi}{2} \le y \le \pi, \quad 0 \le \pi - y \le \tfrac{\pi}{2}: &\qquad \sin y = \sin(\pi - y) \quad \text{oder} \\ \tfrac{\pi}{2} \le y = x + \tfrac{\pi}{2} \le \pi: &\qquad \sin y = \sin\big(x + \tfrac{\pi}{2}\big) = \cos x, \\ \pi \le z = x + \pi \le 2\pi: &\qquad \sin z = \sin\big(x + \pi\big) = -\sin x. \end{aligned}$$

Die Erweiterung auf Argumente $x \in \mathbb{R}$ erfolgt schließlich mittels Periodizität, d.h. Sinus und Cosinus sind periodische Funktionen mit Periode 2π, etwa für den Sinus

$$0 \le x < 2\pi, \; y = x + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}: \qquad \sin y = \sin\big(x + 2k\pi\big) = \sin x.$$

(4) *Satz von Pythagoras.* Aus dem Satz von Pythagoras folgt der Zusammenhang (Gleichheit von Funktionen)

$$\sin^2 + \cos^2 = 1,$$

d.h. für alle Argumente $0 < x < \frac{\pi}{2}$ bzw. $x \in \mathbb{R}$ gilt $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$.

Spezielle Funktionswerte. Mittels des Satzes von Pythagoras lassen sich spezielle Werte des Sinus und Cosinus auf einfache Art und Weise berechnen (gleichschenkliges Dreieck für $x = \frac{1}{4}\pi$ und somit $2(\sin x)^2 = 1$, Ergänzung auf gleichwinkliges und damit gleichseitiges Dreieck für $x = \frac{1}{3}\pi$ und folglich $(\sin x)^2 + \frac{1}{4} = 1$).

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}\pi$	1	0

(5) *Gerade, ungerade Funktionen.* Wegen

$$\sin(-x) = -\sin x\,, \quad \cos(-x) = \cos x\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

ist die Sinus- bzw. Cosinusfunktion eine ungerade bzw. gerade Funktion.

(6) *Additionstheoreme.* Additionstheoreme für Sinus und Cosinus ermöglichen die Darstellung von Funktionswerten wie etwa $\sin(x+y), \cos(x+y)$ durch $\sin x, \cos x, \sin y, \cos y$. Aus

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y\,, \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\,, \qquad x, y, \in \mathbb{R}\,,$$

folgt insbesondere

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x\,, \quad \cos(2x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Die Relation für die Sinusfunktion kann durch elementare geometrische Überlegungen (vgl. Skriptum, Seite 17) abgeleitet werden. Das Additionstheorem für die Cosinusfunktion ergibt sich dann mit Hilfe der grundlegenden Relationen $\cos\xi = \sin\left(\xi + \frac{1}{2}\pi\right)$ und $\sin(\xi + \pi) = -\sin\xi$

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \sin\left(x + y + \tfrac{1}{2}\pi\right) \\ &= \sin x \cos\left(y + \tfrac{1}{2}\pi\right) + \cos x \sin\left(y + \tfrac{1}{2}\pi\right) \\ &= \sin x \sin\left(y + \pi\right) + \cos x \cos y \\ &= -\sin x \sin y + \cos x \cos y\,. \end{aligned}$$

Nebenbemerkung. Ein (im Nachhinein) einfacher rechnerischer Nachweis beruht auf der komplexen Exponentialfunktion bzw. der Eulerschen Formel $\mathrm{e}^{i\xi} = \cos\xi + \mathrm{i}\sin\xi$ und verwendet, daß Sinus bzw. Cosinus ungerade bzw. gerade Funktionen sind

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+y)}\right) \\
&= \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\right) \\
&= \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\Big(\big(\cos x + \mathrm{i}\sin x\big)\big(\cos y + \mathrm{i}\sin y\big) - \big(\cos x - \mathrm{i}\sin x\big)\big(\cos y - \mathrm{i}\sin y\big)\Big) \\
&= \sin x \cos y + \cos x \sin y\,.
\end{aligned}$$

(7) *Monotonie und Arcus-Funktionen.* Die Einschränkung der elementaren trigonometrischen Funktionen auf jene Bereiche, wo sie streng monoton und somit injektiv sowie surjektiv sind, sichert die Existenz der inversen Funktionen, der sogenannten Arcus-Funktionen (vgl. oben). Die Monotonieeigenschaften übertragen sich auf die Inverse, etwa folgt für eine streng monoton wachsende Funktion $f : D \to R : x \mapsto y = f(x)$

$$\big(f(x_1) - f(x_2)\big)\big(x_1 - x_2\big) > 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \big(y_1 - y_2\big)\big(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\big) > 0\,.$$

Spezielle Werte des Arcus-Sinus und Arcus-Cosinus sind

$$\begin{gathered}
\arcsin(-1) = -\tfrac{1}{2}\pi\,, \quad \arcsin 0 = 0\,, \quad \arcsin 1 = \tfrac{1}{2}\pi\,, \\
\arccos(-1) = \pi\,, \quad \arccos 0 = \tfrac{1}{2}\pi\,, \quad \arccos 1 = 0\,.
\end{gathered}$$

Dies sieht man aus den Graphen oder beispielsweise mit Hilfe einfacher Überlegungen

$$\begin{gathered}
\text{Einschränkung} \quad \sin : [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi] \to [-1,1]\,, \\
\text{Inverse} \quad \arcsin : [-1,1] \to [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi]\,, \\
\sin\circ\arcsin = \mathrm{id} \text{ auf } [-1,1]\,, \quad \arcsin\circ\sin = \mathrm{id} \text{ auf } [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi]\,, \\
\arcsin(-1) = y \quad\Longleftrightarrow\quad -1 = \sin\big(\arcsin(-1)\big) = \sin y\,, \quad y \in [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi] \quad\Longleftrightarrow\quad y = -\tfrac{1}{2}\pi\,.
\end{gathered}$$

Weitere Beispiele.

$$\arccos\big(-\tfrac{1}{2}\big)\,, \quad \arcsin x + \arccos x\,, \quad \arctan\big(\tan x\big)\,, \quad \arctan x + \arctan y\,.$$

Mittels geeigneter Substitution ergibt sich beispielsweise

$$\begin{gathered}
\arcsin\circ\sin = \mathrm{id} \text{ auf } [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi]\,, \quad \arccos\circ\cos = \mathrm{id} \text{ auf } [0,\pi]\,, \\
x = \sin y = \cos\big(y - \tfrac{1}{2}\pi\big) = \cos\big(\tfrac{1}{2}\pi - y\big)\,, \quad x \in [-1,1]\,, \quad y \in \big[-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\big]\,, \quad \tfrac{\pi}{2} - y \in [0,\pi]\,, \\
\arcsin x + \arccos x = \arcsin\big(\sin y\big) + \arccos\big(\cos\big(\tfrac{1}{2}\pi - y\big)\big) = y + \tfrac{1}{2}\pi - y = \tfrac{1}{2}\pi\,.
\end{gathered}$$

(8) *Abschätzung, Grenzwert.* Es gilt (vgl. Graph)

$$|\sin x| \leq |x|\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Mit Hilfe elementarer geometrischer Überlegungen und der Anwendung des Einschließungssatzes folgert man (beachte $\sin x = x + \mathcal{O}(x^3)$, $\cos x = 1 + \mathcal{O}(x^2)$, vgl. Taylorreihenentwicklung)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0\,.$$

(9) *Stetigkeit der Sinusfunktion.* Um die Stetigkeit der Sinusfunktion $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu zeigen, ist für Elemente $x \in \mathbb{R}$ nachzuweisen, daß Folgendes gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - \xi| < \delta : \quad \big|\sin x - \sin \xi\big| < \varepsilon\,.$$

Mittels der Transformation

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

und Anwendung des Additionstheorems, der obigen Abschätzung $|\sin y| \leq |y|$ sowie $|\sin y| \leq 1$ bzw. $|\cos y| \leq 1$ für $y \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\big|\sin x - \sin \xi\big| &= \big|\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\big| \\
&= \big|\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta - \alpha)\big| \\
&= 2\,\big|\cos \alpha\big|\,\big|\sin \beta\big| \\
&= 2\,\big|\cos \tfrac{x+\xi}{2}\big|\,\big|\sin \tfrac{x-\xi}{2}\big| \\
&\leq \big|x - \xi\big|\,,
\end{aligned}$$

womit die Behauptung für die Wahl $\delta = \varepsilon$ folgt.

Stetigkeit weiterer trigonometrischer Funktionen. Wegen $\cos x = \sin\big(x + \frac{1}{2}\,\pi\big)$ für $x \in \mathbb{R}$ folgt aus der Stetigkeit der Sinusfunktion sofort die Stetigkeit der Cosinusfunktion. Aus grundlegenden Resultaten erhält man damit auch die Stetigkeit der Tangens- bzw. Cotangensfunktion sowie der Arcus-Funktionen (auf dem jeweiligen Definitionsbereich).

(10) *Differenzierbarkeit und erste Ableitung der Sinusfunktion.* Zur Bestimmung der ersten Ableitung der Sinusfunktion verwendet man wiederum das Additionstheorem sowie elementare Grenzwerte (vgl. oben)

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x &= \lim_{\xi\to 0} \frac{\sin(x + \xi) - \sin x}{\xi} \\
&= \lim_{\xi\to 0} \frac{\sin x \cos \xi + \cos x \sin \xi - \sin x}{\xi} \\
&= \sin x \lim_{\xi\to 0} \frac{\cos \xi - 1}{\xi} + \cos x \lim_{\xi\to 0} \frac{\sin \xi}{\xi} \\
&= \cos x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Ableitungen der trigonometrischen Funktionen und ihrer Inversen. Mittels Resultaten zur Differenzierbarkeit wie der Quotientenregel und der Regel zur Ableitung der Inversen zeigt man (auf dem jeweiligen Definitionsbereich)

$$\begin{gathered}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \cos x\,, \quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x = -\sin x\,, \\
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan x = 1 + \big(\tan x\big)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}\,, \quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cot x = -1 + \big(\cot x\big)^2 = -\frac{1}{(\sin x)^2}\,, \\
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \\
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}\,, \quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}\,.
\end{gathered}$$

Höhere Ableitungen von Sinus und Cosinus. Allgemein gilt

$$\begin{gathered}
\tfrac{\mathrm{d}^{2k}}{\mathrm{d}x^{2k}} \sin x = (-1)^k \sin x\,, \quad \tfrac{\mathrm{d}^{2k+1}}{\mathrm{d}x^{2k+1}} \sin = (-1)^k \cos x\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \\
\tfrac{\mathrm{d}^{2k}}{\mathrm{d}x^{2k}} \cos x = (-1)^k \cos x\,, \quad \tfrac{\mathrm{d}^{2k+1}}{\mathrm{d}x^{2k+1}} \cos = (-1)^{k+1} \sin x\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.
\end{gathered}$$

Auswerten beispielsweise bei $x = 0$ führt auf

$$\begin{gathered}
\tfrac{\mathrm{d}^{2k}}{\mathrm{d}x^{2k}}\Big|_{x=0} \sin x = 0\,, \quad \tfrac{\mathrm{d}^{2k+1}}{\mathrm{d}x^{2k+1}}\Big|_{x=0} \sin = (-1)^k\,, \\
\tfrac{\mathrm{d}^{2k}}{\mathrm{d}x^{2k}}\Big|_{x=0} \cos x = (-1)^k\,, \quad \tfrac{\mathrm{d}^{2k+1}}{\mathrm{d}x^{2k+1}}\Big|_{x=0} \cos = 0\,.
\end{gathered}$$

(11) *Potenzreihendarstellungen für Sinus und Cosinus.* Aus den obigen Überlegungen ergibt sich mittels Taylorreihenentwicklungen schließlich die bekannte Potenzreihendarstellung (Entwicklungspunkt Null)

$$\begin{gathered}
\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} = x - \tfrac{1}{6}\, x^3 + \tfrac{1}{120}\, x^5 + \mathscr{O}\big(x^7\big)\,, \\
\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{2k!}\, x^{2k} = 1 - \tfrac{1}{2}\, x^2 + \tfrac{1}{24}\, x^4 + \mathscr{O}\big(x^6\big)\,.
\end{gathered}$$

Dies führt auch (zunächst formal) auf den Zusammenhang von Sinus und Cosinus mit der komplexen Exponentialfunktion (Euler'sche Formel, Formel von Moivre)

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(12) *Integrierbarkeit, Stammfunktion.* Als stetige Funktionen sind Sinus und Cosinus insbesondere (Riemann) integrierbar. Stammfunktionen ergeben sich aus den angegebenen Relationen für die erste Ableitung. Vgl. Skriptum (Technik des Integrierens).

(13) Vorsicht! Klammersetzung ist wesentlich

$$\sin x\,,\quad \sin(2x)\,,\quad \sin\left(x^2\right),\quad \left(\sin x\right)^2,$$

zum besseren Verständnis sollte man in der Schule eventuell keine Kurzschreibweisen verwenden

$$\sin^2 x = \left(\sin x\right)^2.$$