Exponentialfunktion und Logarithmus

Literaturquelle. Skriptum von Peter Wagner [1] zur Vorlesung *Mathematik A*.

Kapitel I.2. Funktionen

Kapitel I.2.5. Exponentialfunktion

Kapitel I.2.5.1 Vergleich Potenzen und Exponentialfunktion

Kapitel I.2.5.2 Die Zahl e

Vgl. auch Kapitel II.7. Die Technik des Differenzierens

Vgl. auch Kapitel III.11.2 Partielles Integrieren

Vgl. auch Kapitel III.11.4 Substitution

Vgl. auch Kapitel III.11.9 Hyperbelfunktionen

Vgl. auch Kapitel IV.16.2 Die Funktion e^z

[1] Siehe http://mat1.uibk.ac.at/wagner/skripten.html

Theoretischer Hintergrund.

(1) *Potenzen.* Potenzen a^x werden zunächst für positive Basiswerte[2] und natürliche Zahlen als Exponenten erklärt

$$a > 0\,, \quad x = m \in \mathbb{N}: \qquad a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ Faktoren}}$$

und dann auf ganzzahlige[3] sowie rationale[4] Exponenten erweitert

$$a > 0\,, \quad x = -m \in \mathbb{Z}\,, \quad m \in \mathbb{N}: \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m}\,,$$
$$a > 0\,, \quad x = \tfrac{k}{m} \in \mathbb{Q}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \quad m \in \mathbb{N}: \qquad a^{\frac{k}{m}} = \sqrt[m]{a^k}\,.$$

Für positive Basiswerte und beliebige reelle Exponenten kann

$$a > 0\,, \quad x \in \mathbb{R}: \qquad a^x \in \mathbb{R}$$

mit Hilfe von Grenzprozessen eingeführt werden. Dazu betrachtet man eine (monotone) rationale Folge mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}$ und setzt

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = x\,, \qquad a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}\,.$$

Die Konvergenz der Folge weist man mittels des Satzes von Bolzano–Weierstraß (Monotonie, Beschränktheit) nach, und die Rechenregeln

$$a, \widetilde{a} > 0\,, \quad x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}: \qquad \big(a\widetilde{a}\big)^x = a^x \widetilde{a}^x\,, \quad a^{x+\widetilde{x}} = a^x a^{\widetilde{x}}\,, \quad a^{x\widetilde{x}} = \big(a^x\big)^{\widetilde{x}}\,,$$

folgert man aus den entsprechenden Relationen für rationale Exponenten und mittels Grenzwertsätzen.

(2) *Exponentialfunktionen, Monotonieeigenschaften.* Für Exponenten $0 < a < 1$ bzw. $a > 1$ sind die zugehörigen Exponentialfunktionen streng monoton fallend bzw. steigend (beachte $a^x > 0$, Begründung später)

$$0 < a < 1: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} : x \longmapsto a^x \qquad \text{streng monoton fallend}\,,$$
$$a = 1: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} : x \longmapsto 1 \qquad \text{konstant}\,,$$
$$a > 1: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} : x \longmapsto a^x \qquad \text{streng monoton steigend}\,,$$

vgl. Illustration der Funktionsgraphen.

[2] Allgemeiner ist auch $a \in \mathbb{R}$ zulässig.

[3] Für Exponenten $x \in \mathbb{Z}$ sind Basiswerte $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zulässig.

[4] In Abhängigkeit vom jeweiligen Exponenten $x = \frac{k}{m} \in \mathbb{Q}$ sind beispielsweise auch Basiswerte $a \in \mathbb{R}$ mit $a^k > 0$ zulässig.

Die (natürliche) Exponentialfunktion. Wählt man als Basis speziell die Eulersche Zahl

$$\mathrm{e} \approx 2.71828182845904523536028747135266249775724709369 99\,,$$

so ergibt sich die (natürliche) Exponentialfunktion (streng monoton steigend)

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} : x \longmapsto \mathrm{e}^x\,,$$

charakterisiert durch die Eigenschaft

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} \mathrm{e}^x = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1\,.$$

Aufgrund der Relation (Begründung später)

$$a > 0\,, \quad x \in \mathbb{R}: \quad a^x = \mathrm{e}^{\ln a^x} = \mathrm{e}^{x \ln a}$$

ist es ausreichend, die natürliche Exponentialfunktion und ihre Inverse, den natürlichen Logarithmus zu betrachten.

(3) *Vorbemerkungen (Konstruktion der Eulerschen Zahl und Exponentialfunktion).* Die Eulersche Zahl wird üblicherweise als Grenzwert der Folge

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n$$

eingeführt, und allgemeiner erklärt man Werte der Exponentialfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto \mathrm{e}^x$ als Grenzwerte von Folgen reeller Zahlen

$$x \in \mathbb{R}: \qquad \mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n.$$

Nachweis der Konvergenz. Um zu zeigen, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$x \in \mathbb{R}: \qquad a_n = \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

gegen eine positive reelle Zahl konvergiert, nützt man den Satz von Bolzano–Weierstraß.

- Für den Spezialfall $x = 0$ folgt sofort

$$x = 0: \quad a_n = 1\,, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 1\,.$$

- *Monotonie.* Für $x \neq 0$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend, sofern der Index $n \in \mathbb{N}$ in Abhängigkeit von x groß genug gewählt ist

$$x \neq 0, \quad n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > -x: \qquad a_n = \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n < a_{n+1} = \left(1 + \tfrac{x}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Das Miteinbeziehen negativer Werte $x < 0$ und die unterschiedliche Anzahl an Faktoren macht den Nachweis der Monotonie etwas diffiziler. Geeignetes Umformen und Anwenden der Identität $\frac{1}{n+1} = n\,\frac{1}{n(n+1)} = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ führt auf

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \left(1 + \tfrac{x}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n \\
&= \left(1 + \tfrac{x}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \tfrac{x}{n+1}\right)\left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n + \left(1 + \tfrac{x}{n+1}\right)\left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n - \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n \\
&= \left(1 + \tfrac{x}{n+1}\right)\Big(\left(1 + \tfrac{x}{n+1}\right)^n - \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n\Big) + \tfrac{x}{n+1}\left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n \\
&= \left(1 + \tfrac{x}{n+1}\right)\Big(\left(1 + \tfrac{x}{n+1}\right)^n - \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n\Big) + n\left(\tfrac{x}{n} - \tfrac{x}{n+1}\right)\left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n \\
&= \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n \Big(\left(1 + \tfrac{x}{n+1}\right)\Big(\left(1 + \tfrac{x}{n+1}\right)^n \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^{-n} - 1\Big) + n\left(\tfrac{x}{n} - \tfrac{x}{n+1}\right)\Big).
\end{aligned}$$

Mittels geometrischer Reihe

$$\begin{gathered}
q = \left(1 + \tfrac{x}{n+1}\right)\left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^{-1}, \\
q - 1 = \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^{-1}\Big(\left(1 + \tfrac{x}{n+1}\right) - \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)\Big) = -\left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^{-1}\left(\tfrac{x}{n} - \tfrac{x}{n+1}\right), \\
\left(1 + \tfrac{x}{n+1}\right)^n \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^{-n} - 1 = q^n - 1 = (q-1)\left(q^{n-1} + \cdots + q + 1\right),
\end{gathered}$$

folgt weiters

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n \Big(\left(1 + \tfrac{x}{n+1}\right)(q-1)\left(q^{n-1} + \cdots + q + 1\right) + n\left(\tfrac{x}{n} - \tfrac{x}{n+1}\right)\Big) \\
&= \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n \left(\tfrac{x}{n} - \tfrac{x}{n+1}\right)\Big(n - \left(1 + \tfrac{x}{n+1}\right)\left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^{-1}\left(q^{n-1} + \cdots + q + 1\right)\Big) \\
&= \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n \left(\tfrac{x}{n} - \tfrac{x}{n+1}\right)\Big(n - \left(q^n + \cdots + q\right)\Big).
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt $n > -x$ und insbesondere $1 + \frac{x}{n} > 0$, $1 + \frac{x}{n+1} > 0$ sowie $q > 0$. Damit erhält man

$$a_{n+1} - a_n > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\tfrac{x}{n} - \tfrac{x}{n+1}\right)\Big(n - \left(q^n + \cdots + q\right)\Big) > 0\,.$$

Mittels Fallunterscheidung und wegen $q = 1 - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}\left(\frac{x}{n} - \frac{x}{n+1}\right)$ folgt schließlich die Behauptung

$$a_{n+1} - a_n > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} n - \left(q^n + \cdots + q\right) > 0\,, & \tfrac{x}{n} - \tfrac{x}{n+1} > 0 \text{ bzw. } q < 1\,, \\ n - \left(q^n + \cdots + q\right) < 0\,, & \tfrac{x}{n} - \tfrac{x}{n+1} < 0 \text{ bzw. } q > 1\,. \end{cases}$$

- *Konvergenz für $x < 0$.* Wie zuvor gezeigt, sind die Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für geeignet gewählte Indizes positiv und außerdem durch Eins beschränkt[5]

$$x < 0, \quad n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > -x: \qquad 0 < a_n = \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n < 1\,.$$

[5] Bemerkung: Für $0 < \alpha < \beta$ folgt $0 < \alpha^2 < \alpha\beta < \beta^2$ und allgemein $0 < \alpha^n < \beta^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß konvergiert die Folge und es gilt (Anwendung des Einschließungskriteriums und da die Folge streng monoton wachsend ist, ist auch ihr Grenzwert positiv)

$$x < 0: \qquad 0 < \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n \leq 1\,.$$

- *Hilfsresultat.* Aus den obigen Überlegungen ergit sich

$$x \in \mathbb{R}: \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \tfrac{x}{n}\right)^n \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \tfrac{x^2}{n^2}\right)^n = 1\,.$$

Setzt man nämlich $x = -y^2 < 0$, so konvergiert die zugehörige Folge gegen einen positiven Grenzwert $c > 0$

$$x = -y^2 < 0: \qquad 0 < c = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \tfrac{y^2}{n}\right)^n,$$

d.h. ab einem gewissen Index befinden sich alle Folgenglieder in einer Umgebung von $c > 0$, etwa

$$\forall n \geq N: \qquad \tfrac{1}{2}c < \left(1 - \tfrac{y^2}{n}\right)^n < \tfrac{3}{2}c\,,$$

und inbesondere gilt dies für Indizes der Form n^2

$$\forall n \geq N: \qquad \tfrac{1}{2}c < \left(1 - \tfrac{y^2}{n^2}\right)^{n^2} = \left(\left(1 - \tfrac{y^2}{n^2}\right)^n\right)^n < \tfrac{3}{2}c\,.$$

Wurzelziehen und das Einschließungskriterium führen damit auf die Behauptung (Umbenennung $y \leftrightarrow x$)

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\tfrac{1}{2}c} \leq \lim_{n\to\infty} \left(1 - \tfrac{y^2}{n^2}\right)^n \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\tfrac{3}{2}c} = 1\,.$$

- *Konvergenz für $x > 0$.* Aus der Konvergenz der Folge für $x < 0$ und dem Hilfsresultat folgt nun mittels Grenzwertsätzen die Konvergenz der Folge für positive Werte

$$\begin{aligned} x > 0: \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} \left(1 - \tfrac{x^2}{n^2}\right)^n \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \tfrac{x^2}{n^2}\right)^n \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}\,. \end{aligned}$$

- *Erweiterung.* Mit Hilfe des Einschließungskriteriums zeigt man auch (Grenzwert einer Folge $\leftrightarrow$ Grenzwert der entsprechenden Funktion)

$$\mathrm{e} = \lim_{\xi\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{\xi}\right)^{\xi}.$$

- *Zusammenhang mit* e^x. Es benötigt weitere Überlegungen, um die Identität

$$x \in \mathbb{R}: \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n\right)^x$$

  zu rechtfertigen. Für positive Werte $x > 0$ geht man zunächst von Folgen (definiert für $n \in \mathbb{N}$) auf die entsprechenden Funktionen (definiert für $\xi \in \mathbb{R}$) über und verwendet die Substitution $\xi = \frac{n}{x} \to \infty$ für $n \to \infty$

$$x > 0: \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n = \lim_{\xi\to\infty} \left(1+\tfrac{1}{\xi}\right)^{\xi x} = \left(\lim_{\xi\to\infty} \left(1+\tfrac{1}{\xi}\right)^{\xi}\right)^x = \mathrm{e}^x,$$

  vgl. Erweiterung. Falls $x < 0$ bzw. äquivalent dazu $-x > 0$ nützt man das Hilfsresultat und das obige Resultat für positive Werte

$$x < 0: \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\tfrac{x^2}{n^2}\right)^n \frac{1}{\left(1-\tfrac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\tfrac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}^x.$$

(4) *Eulersche Zahl und Exponentialfunktion.* Die Eulersche Zahl ist als Grenzwert der reellen Folge

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \approx 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999$$

erklärt, und die (natürliche) Exponentialfunktion ist gegeben durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} : x \longmapsto \mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} \left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n.$$

Illustration. Die Konvergenzgeschwindigkeit der Folge ist gering, eine gute Approximation etwa an die Eulersche Zahl benötigt die Wahl $n \gg 100$. Eine bessere Alternative beruht auf der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion.

(5) *Monotonie und Logarithmus.* Die (natürliche) Exponentialfunktion ist streng monoton steigend und somit injektiv sowie surjektiv auf $\mathbb{R}_{>0}$

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} : x \longmapsto \mathrm{e}^x.$$

Damit existiert ihre Inverse, die (natürliche) Logarithmusfunktion

$$\ln : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \ln x,$$

welche ebenfalls streng monoton steigend ist. Insbesondere gilt

$$\exp \circ \ln = \mathrm{id} \quad \text{auf } \mathbb{R}_{>0}, \qquad \ln \circ \exp = \mathrm{id} \quad \text{auf } \mathbb{R},$$

und somit erhält man aus den oben angegebenen Rechenregeln für Potenzen die entsprechenden Rechenregeln (Rechenregeln für Exponentialfunktion, Anwendung des Logarithmus, Umformulierung)

$$
\begin{gathered}
x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}: \qquad \mathrm{e}^{x+\widetilde{x}} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\widetilde{x}}\,, \quad \mathrm{e}^{x\widetilde{x}} = \left(\mathrm{e}^{x}\right)^{\widetilde{x}}\,, \\
y, \widetilde{y} > 0\,, \quad x = \ln y \in \mathbb{R}\,, \quad \widetilde{x} = \ln \widetilde{y} \in \mathbb{R}\,, \quad y = \mathrm{e}^{x}\,, \quad \widetilde{y} = \mathrm{e}^{\widetilde{x}}\,, \\
\ln y + \ln \widetilde{y} = x + \widetilde{x} = \ln \mathrm{e}^{x+\widetilde{x}} = \ln\left(\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\widetilde{x}}\right) = \ln\left(y\widetilde{y}\right), \\
\widetilde{x}\ln y = x\widetilde{x} = \ln \mathrm{e}^{x\widetilde{x}} = \ln\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{\widetilde{x}} = \ln y^{\widetilde{x}}\,,
\end{gathered}
$$

und folgende spezielle Werte der Logarithmusfunktion

$$
\begin{gathered}
\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0\,, \quad \mathrm{e}^{0} = 1\,, \quad \mathrm{e}^{\ln \mathrm{e}} = \mathrm{e}\,, \\
\lim_{x\to 0_+} \ln x = -\infty\,, \quad \ln 1 = 0\,, \quad \ln \mathrm{e} = 1\,.
\end{gathered}
$$

(6) *Hilfsresultat.* Nützliche Hilfsresultate zum Nachweis der Stetigkeit der Exponentialfunktion und zur Bestimmung der ersten Ableitung sind

$$
\begin{gathered}
x \in (-1,1): \quad 1 + x \leq \mathrm{e}^{x} \leq \frac{1}{1-x}\,, \\
\lim_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right) = 0\,, \\
\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x} = 0\,.
\end{gathered}
$$

- Um zu zeigen, daß die Werte der Exponentialfunktion bei Null die Abschätzung

  $$x \in (-1,1): \quad 1 + x \leq \mathrm{e}^{x} \leq \frac{1}{1-x}$$

  erfüllen, nützt man die Darstellung

  $$\mathrm{e}^{x} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^{n}$$

  und die Eigenschaft, daß die Folge für $x \neq 0$ und Indizes $n > -x$ streng monoton steigend ist

  $$x \neq 0\,, \quad n > -x: \qquad \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^{n} < \left(1 + \tfrac{x}{n+1}\right)^{n+1} < \cdots \leq \lim_{n\to\infty}\left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}^{x}\,.$$

  Für $-1 < x < 1$ bzw. äquivalent dazu $-1 < -x < 1$ ist die Bedingung $n > -x$ für $n \geq 1$ erfüllt und somit gilt

  $$x \in (-1,1): \qquad 1 + x < \lim_{n\to\infty}\left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}^{x}\,.$$

Andererseits folgt damit auch

$$y \in (-1,1)\,, \quad -y = x \in (-1,1): \qquad 1-y = 1+x < \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-y} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^y < \frac{1}{1-y}\,.$$

Gleichheit $1+x \leq \mathrm{e}^x \leq \frac{1}{1-x}$ gilt speziell für $x=0$. Vgl. Illustration.

- Die erhaltene Abschätzung für Werte der Exponentialfunktion impliziert

$$\begin{aligned} x \in (-1,1): \quad & 1+x \leq \mathrm{e}^x \leq \frac{1}{1-x} \\ & \Longleftrightarrow \quad x \leq \mathrm{e}^x - 1 \leq \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x} \\ & \Longrightarrow \quad \begin{cases} 1 \leq \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} \leq \dfrac{1}{1-x}\,, & \text{falls } 0 < x < 1\,, \\ \dfrac{1}{1-x} \leq \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} \leq 1\,, & \text{falls } -1 < x < 0\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Mittels Einschließungskriterium erhält man die angegebenen Grenzwerte.

(7) *Stetigkeit der Exponentialfunktion.* Die Stetigkeit der Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ folgt sofort aus dem angegebenen Hilfsresultat (Substitution $\eta = \xi - x$ und $\mathrm{e}^x \to 1$ für $x \to 0$)

$$x \in \mathbb{R}: \qquad \lim_{\xi \to x} \mathrm{e}^\xi = \mathrm{e}^x \lim_{\xi \to x} \mathrm{e}^{\xi - x} = \mathrm{e}^x \lim_{\eta \to 0} \mathrm{e}^\eta = \mathrm{e}^x\,.$$

(8) *Differenzierbarkeit und erste Ableitung von Exponentialfunktion und Logarithmus.* Ähnlich wie zuvor kann man die Bestimmung der ersten Ableitung der Exponentialfunktion in einem beliebigen Punkt auf die Bestimmung der Ableitung in Null zurückführen (Substitution $\eta = \xi - x$ und $\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} \to 1$ für $x \to 0$)

$$x \in \mathbb{R}: \qquad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{e}^x = \lim_{\xi \to x} \frac{\mathrm{e}^\xi - \mathrm{e}^x}{\xi - x} = \mathrm{e}^x \lim_{\xi \to x} \frac{\mathrm{e}^{\xi - x} - 1}{\xi - x} = \mathrm{e}^x \lim_{\eta \to 0} \frac{\mathrm{e}^\eta - 1}{\eta} = \mathrm{e}^x\,.$$

Die Regel zur Bestimmung der ersten Ableitung der Inversen führt auf

$$x > 0: \qquad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \tfrac{1}{x}\,.$$

(9) *Potenzreihendarstellungen für Exponentialfunktion und Logarithmus.* Mittels Taylorreihenentwicklungen erhält man die bekannte Potenzreihendarstellung (Entwicklungspunkt Null bzw. Eins)

$$x \in \mathbb{R}: \qquad \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}\, x^k = 1 + x + \tfrac{1}{2}\, x^2 + \tfrac{1}{6}\, x^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big)\,,$$

$$x \in \mathbb{R}_{>1}: \qquad \ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{k+1}}{k}\, (x-1)^k = (x-1) - \tfrac{1}{2}\,(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}\,(x-1)^3 + \mathcal{O}\big(x^4\big)\,.$$

Die Potenzreihe des Logarithmus kann man mittels geometrischer Reihe begründen ($x \leftrightarrow 1-x$, Fortsetzung auf $\mathbb{R}_{>1}$)

$$
\begin{aligned}
|x|<1: \qquad & \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \,, \\
|x|<1: \qquad & -\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-\xi}\,\mathrm{d}\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k+1}\, x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k}\, x^k \,, \\
0<1-x<2: \qquad & \ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{k+1}}{k}\,(x-1)^k \,.
\end{aligned}
$$

(10) *Integrierbarkeit, Stammfunktion.* Als stetige Funktionen ist die Exponentialfunktion insbesondere (Riemann) integrierbar mit Stammfunktionen

$$\int \exp = \big\{ \exp + C : C \in \mathbb{R} \big\} \,.$$

Beachte auch, daß ($0<a<b$)

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| \Big|_a^b \,,$$

denn mittels Fallunterscheidung folgt

$$
\begin{aligned}
x>0: \qquad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln|x| &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \begin{cases} \ln x \,, & x>0 \,, \\ \ln(-x) \,, & x<0 \,, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{x} \,, & x>0 \,, \\ -\dfrac{1}{-x} \,, & x<0 \,, \end{cases} \\
&= \frac{1}{x} \,.
\end{aligned}
$$

(11) *Lineare Differentialgleichungen.* Wesentlicher Anwendungen betreffen die Lösung linearer Systeme von gewöhnliche Differentialgleichungen. Dabei nützt man, daß die Lösung der skalaren linearen Differentialgleichung

$$
\begin{cases} y'(t) = \lambda\, y(t) \,, \quad t \in \mathbb{R} \,, \\ y(t_0) = y_0 \,, \end{cases}
$$

die Darstellung

$$y(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)\lambda}\, y_0 \,, \qquad t \in \mathbb{R} \,,$$

besitzt.

(12) *Erweiterung der Exponentialfunktion auf komplexe Argumente.* Um die Exponentialfunktion auf komplexe Argumente zu erweitern, verwendet man die ursprüngliche Einführung als Grenzwert einer Folge

$$z \in \mathbb{C}: \qquad \mathrm{e}^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{z}{n}\right)^n .$$

- Mittels Transformation in Polarkoordinaten erhält man im Speziellen

$$z = \mathrm{i}\,y = r\left(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\right) \text{ mit } y > 0\,, \quad r = y\,, \quad \varphi = \tfrac{\pi}{2}\,, \quad \cos\varphi = 0\,, \quad \sin\varphi = 1\,,$$
$$\left|1 + \mathrm{i}\,\tfrac{y}{n}\right| = \sqrt{1 + \tfrac{y^2}{n^2}}\,, \quad \arg\left(1 + \mathrm{i}\,\tfrac{y}{n}\right) = \arctan\left(\tfrac{y}{n}\right),$$
$$\left(1 + \mathrm{i}\,\tfrac{y}{n}\right)^n = \left(\sqrt{1 + \tfrac{y^2}{n^2}}\right)^n \left(\cos\left(\arctan\left(\tfrac{y}{n}\right)\right) + \mathrm{i}\sin\left(\arctan\left(\tfrac{y}{n}\right)\right)\right)^n .$$

Geeignete Umformungen und Abschätzungen zeigen in diesem Fall (Folge monoton wachsend, Einschließungskriterium)

$$1 \le \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{1 + \tfrac{y^2}{n^2}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\left(1 + \tfrac{y^2}{n^2}\right)^{n^2}} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\mathrm{e}^{y^2}} = 1$$
$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{1 + \tfrac{y^2}{n^2}}\right)^n = 1$$

sowie beispielsweise mittels Substitution $\eta = \frac{1}{\xi}$, der Regel von de l'Hôpital und der Stetigkeit der trigonometrischen Funktionen

$$\lim_{n\to\infty} n \arctan\left(\tfrac{y}{n}\right) = \lim_{\xi\to\infty} \xi \arctan\left(\tfrac{y}{\xi}\right) = \lim_{\xi\to\infty} \frac{\arctan\left(\frac{y}{\xi}\right)}{\frac{1}{\xi}}$$
$$= \lim_{\eta\to 0} \frac{\arctan(\eta y)}{\eta} = \lim_{\eta\to 0} \frac{y}{1 + \eta^2 y^2} = y\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\cos\left(\arctan\left(\tfrac{y}{n}\right)\right) + \mathrm{i}\sin\left(\arctan\left(\tfrac{y}{n}\right)\right)\right)^n$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\cos\left(n \arctan\left(\tfrac{y}{n}\right)\right) + \mathrm{i}\sin\left(n \arctan\left(\tfrac{y}{n}\right)\right)\right)$$
$$= \cos\left(\lim_{n\to\infty} n \arctan\left(\tfrac{y}{n}\right)\right) + \mathrm{i}\sin\left(\lim_{n\to\infty} n \arctan\left(\tfrac{y}{n}\right)\right)$$
$$= \cos y + \mathrm{i}\sin y\,.$$

Damit folgt

$$y > 0: \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \mathrm{i}\,\tfrac{y}{n}\right)^n = \cos y + \mathrm{i}\sin y\,.$$

- Für negative Werte sind nur kleine Modifikationen nötig, nämlich

$$z = -\mathrm{i}\, y = r\left(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi\right) \text{ mit } y > 0\,, \quad r = y\,, \quad \varphi = -\tfrac{\pi}{2}\,, \quad \cos\varphi = 0\,, \quad \sin\varphi = 1\,,$$

$$\left|1 - \mathrm{i}\,\tfrac{y}{n}\right| = \sqrt{1 + \tfrac{y^2}{n^2}}\,, \quad \arg\left(1 - \mathrm{i}\,\tfrac{y}{n}\right) = -\arctan\left(\tfrac{y}{n}\right),$$

$$\left(1 - \mathrm{i}\,\tfrac{y}{n}\right)^n = \left(\sqrt{1 + \tfrac{y^2}{n^2}}\right)^n \left(\cos\left(\arctan\left(\tfrac{y}{n}\right)\right) - \mathrm{i}\sin\left(\arctan\left(\tfrac{y}{n}\right)\right)\right)^n,$$

die dann auf folgendes Resultat führen

$$y > 0: \qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \mathrm{i}\,\tfrac{y}{n}\right)^n = \cos y - \mathrm{i}\sin y\,.$$

- Insgesamt gilt damit

$$y \in \mathbb{R}: \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \mathrm{i}\,\tfrac{y}{n}\right)^n = \cos y + \mathrm{i}\sin y\,.$$

- Allgemein gilt

$$z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}: \qquad \mathrm{e}^z = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \tfrac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x\left(\cos y + \mathrm{i}\sin y\right).$$

(13) *Hilfsresultat.* Es gilt

$$x > 0: \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x} = 1\,.$$

Denn:

- Speziell für $x = 1$ folgt die Behauptung sofort.
- Für $x > 1$ ist zu zeigen, daß

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq N: \qquad \left|\sqrt[n]{x} - 1\right| < \varepsilon\,.$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $0 < \varepsilon < 1$, woraus

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq N: \qquad \left|\sqrt[n]{x} - 1\right| < \varepsilon \\
&\iff \quad \forall \varepsilon \in (0,1) \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq N: \qquad 1 - \varepsilon < \sqrt[n]{x} < 1 + \varepsilon \\
&\iff \quad \forall \varepsilon \in (0,1) \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq N: \qquad (1-\varepsilon)^n < x < (1+\varepsilon)^n
\end{aligned}$$

folgt. Da wegen $0 < 1 - \varepsilon < 1$ sowie $1 + \varepsilon > 1$ und

$$\lim_{n\to\infty}(1-\varepsilon)^n = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty}(1+\varepsilon)^n = \infty\,,$$

ist die obige Relation für geeignet gewähltes $N \in \mathbb{N}$ erfüllt.

- Für $0 < x < 1$ folgt die Behauptung mittels Substitution $y = \frac{1}{x} > 1$ und der obigen Überlegung sowie Grenzwertsätzen

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{y}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{y}} = 1\,.$$