

1.5 Mehrgitterverfahren

Mehrgitterverfahren (*multigrid methods*) wurden vor etwa 25 Jahren entdeckt. Es handelt sich um iterative Verfahren, die *strukturierte* Gleichungssysteme mit N Unbekannten mit $\mathcal{O}(N)$ Operationen lösen. (Die bis dahin bekannten iterativen Löser benötigten typischerweise $\mathcal{O}(N^{3/2})$ Operationen.)

Beispiel. Bei einer 3-D Berechnung mit $1000 \times 100 \times 1000$ Gitterpunkten ergibt sich $N = 10^8$. Somit beträgt das Beschleunigungspotential der neuen Verfahren $\sqrt{N} = 10000$ (also z.B. 1 Minuten Rechenzeit anstatt 166 Stunden).

1.5.1 1-D Modellproblem

Wir untersuchen das 1-D Modellproblem

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0, 1); \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Seine schwache Formulierung lautet: Finde $u \in \mathcal{V}^0 = H_0^1(0, 1)$, sodass für alle $v \in \mathcal{V}^0$ gilt

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

Wir zerlegen das Intervall in $N + 1$ äquidistante Teile mit der Gitterweite $h = 1/(N + 1)$ und den Stützstellen $x_j = jh$. Weiters wählen wir lineare Ansatzfunktionen

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h} & \text{für } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \frac{x_{j+1} - x}{h} & \text{für } x \in [x_j, x_{j+1}]. \end{cases}$$

Damit ergibt sich für die unbekannt Knotenverschiebungen aus dem Verfahren von Ritz-Galerkin das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{b}$ mit

$$a_{ij} = a_{ji} = \int_0^1 \psi_i'(x)\psi_j'(x) dx \quad \text{und} \quad b_i = \int_0^1 f(x)\psi_i(x) dx.$$

Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{A} hat die Bandstruktur

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(In Raumdimension 2 lautet die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{A}$. In Raumdimension 3 hat sie eine entsprechende Gestalt.)

1.5.2 Analyse der Jacobi-Iteration

Wir schreiben $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{C}$, wobei \mathbf{D} die Diagonale von \mathbf{A} bezeichnet. Die Jacobi-Iteration lautet

$$\mathbf{D}\mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{w}^{(k)} + \mathbf{b},$$

beziehungsweise

$$\mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{w}^{(k)} - \underbrace{\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{b})}_{\text{Defekt von } \mathbf{w}^{(k)}}.$$

Die gedämpfte Jacobi-Iteration lautet

$$\mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{w}^{(k)} - \vartheta \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{b}), \quad 0 < \vartheta \leq 1.$$

Im Beispiel ist $\mathbf{D}^{-1} = \frac{h}{2} \mathbf{I}$. Mit $\omega = \vartheta/2$ lautet obige Iteration somit

$$\mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{w}^{(k)} - \omega h (\mathbf{A}\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{b}), \quad 0 < \omega \leq 1/2.$$

Wir machen nun eine *diskrete* Fourieranalyse. Die Eigenwerte μ_j und die dazugehörigen Eigenvektoren \mathbf{v}_j von \mathbf{A} lauten

$$\mu_j = \frac{4}{h} \sin^2(jh\pi/2), \quad \mathbf{v}_j = \sqrt{2h} \left[\sin(nj\pi h) \right]_{n=1}^N = \sqrt{2h} \begin{bmatrix} \sin(j\pi h) \\ \sin(2j\pi h) \\ \vdots \\ \sin(Nj\pi h) \end{bmatrix},$$

wobei $j = 1, \dots, N$. Die Überprüfung erfolgt durch Nachrechnen mittels Sumsensätze der Winkelfunktionen

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\mathbf{v}_j)_n &= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin((n-1)j\pi h) \\ \sin(nj\pi h) \\ \sin((n+1)j\pi h) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{h} \left(-2 \sin(nj\pi h) (\cos(j\pi h) - 1) \right) \\ &= \frac{2}{h} \sin(nj\pi h) \cdot (2 - 2 \cos^2(j\pi h/2)) \\ &= \frac{4}{h} \sin^2(j\pi h/2) [\sin(nj\pi h)] = (\mu_j \mathbf{v}_j)_n. \end{aligned}$$

Hier wurde insbesondere die Relation

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1 = 1 - 2 \sin^2 \varphi$$

verwendet.

Die Iterationsmatrix \mathbf{H} der gedämpften Jacobi-Iteration lautet

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \omega h \mathbf{A}.$$

Diese Matrix hat die selben Eigenvektoren wie \mathbf{A} , ihre Eigenwerte lauten jedoch

$$\lambda_j = \lambda_j(\omega) = 1 - \omega h \mu_j = 1 - 4\omega \sin^2(j\pi h/2), \quad j = 1, \dots, N.$$

Abbildung 1 zeigt oben die ersten vier (niederfrequenten) Eigenvektoren und unten die letzten vier (hochfrequenten) Eigenvektoren von \mathbf{H} .

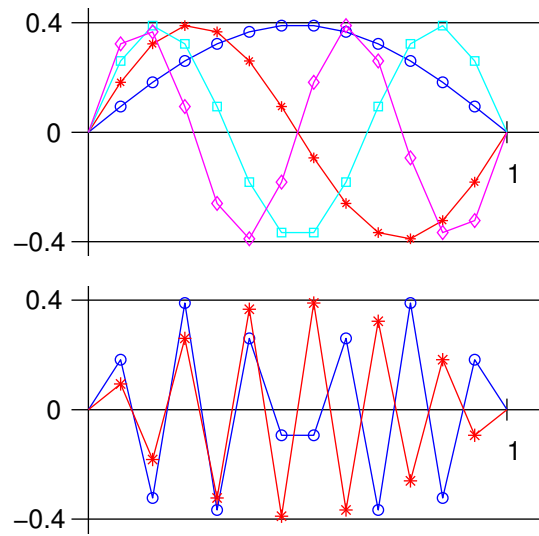


Abbildung 1: Eigenvektoren von \mathbf{H} für den Fall $N = 13$. Das obere Bild zeigt die niederfrequenten Vektoren \mathbf{v}_1 (blau; Kreise), \mathbf{v}_2 (rot; Sterne), \mathbf{v}_3 (cyan; Quadrate) und \mathbf{v}_4 (magenta; Rauten). Das untere Bild zeigt die hochfrequenten Vektoren \mathbf{v}_{11} (blau; Kreise) und \mathbf{v}_{12} (rot; Sterne).

In Abb. 2 werden die Eigenwerte des ungedämpften Jacobi-Verfahrens ($\omega = 1/2$) und des mit $\omega = 1/4$ gedämpften Verfahrens als Funktion von $x = jh$, $0 < x < 1$ dargestellt.

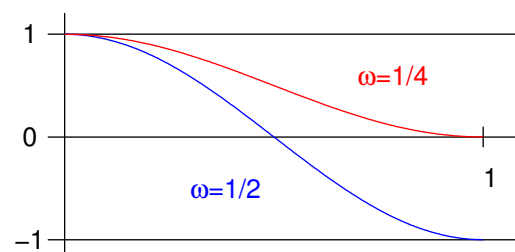


Abbildung 2: Eigenwerte der Iterationsmatrix \mathbf{H} : $1 - 4\omega \sin^2(x\pi/2)$.

Wir betrachten nun die Fehler der Jacobi-Iteration, dargestellt in der Basis

der Eigenvektoren. Sei

$$\mathbf{w}^{(0)} - \mathbf{w} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \mathbf{v}_j.$$

Wegen $\mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{H}\mathbf{w}^{(k)} + \mathbf{b}$ und $\mathbf{w} = \mathbf{H}\mathbf{w} + \mathbf{b}$ gilt

$$\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w} = \mathbf{H}(\mathbf{w}^{(0)} - \mathbf{w}) = \mathbf{H} \sum_{j=1}^N \alpha_j \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^N \alpha_j \mathbf{H}\mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^N \alpha_j \lambda_j \mathbf{v}_j$$

und allgemein

$$\mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{w} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \lambda_j^k \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^N \beta_j \mathbf{v}_j, \quad k \geq 0.$$

Diese Formel zusammen mit Abb. 2 zeigt für $\omega = 1/4$ folgendes:

- Für niedrige Frequenzen (d.h. kleines j) gilt $\beta_j \approx \alpha_j$.
- Für hohe Frequenzen gilt: $|\beta_j| \ll |\alpha_j|$.

Die hochfrequenten Fehler werden bei $\omega = 1/4$ somit ausgezeichnet gedämpft. Man sagt, dass das Verfahren eine sehr gute *Glättungseigenschaft* (*smoothing property*) besitzt.

Bemerkung. Die Analyse in 2-D und 3-D erfolgt ähnlich. In 2-D lauten die Eigenwerte und Eigenvektoren der Steifigkeitsmatrix $\mu_j + \mu_k$ und $\mathbf{v}_j \otimes \mathbf{v}_k$ für $1 \leq j, k \leq N$ mit μ_j und \mathbf{v}_j aus dem 1-D Fall.

1.5.3 Zwei-Gitter-Verfahren

Gesucht ist eine Lösung \mathbf{w} des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{b} \quad (\text{zur Gitterweite } h).$$

Ausgehend von einem Starwert $\mathbf{w}^{(0)}$ führen wir einige gedämpfte Jacobi-Iterationen aus und erhalten \mathbf{w}^* , dessen Fehler $\mathbf{v} = \mathbf{w}^* - \mathbf{w}$ *glatt* ist (d.h. keine hochfrequenten Anteile besitzt). Offensichtlich ist \mathbf{v} gerade die gesuchte *Korrektur* zur exakten Lösung. Man beachte, dass \mathbf{v} i.a. sehr gross ist.

Für den Defekt \mathbf{d} der "Näherung" \mathbf{w}^* gilt

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{w}^* - \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{w}^* - \mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{v}.$$

Somit erfüllt die gesuchte Korrektur eine Gleichung vom selben Typ wie die ursprüngliche Gleichung.

Entscheidende Idee. Die glatte Funktion \mathbf{v} kann auch auf einem *gröberen* Gitter gut approximiert werden.

Sei $\hat{h} = 2h$ und $\hat{\mathbf{A}}$ die zugehörige Steifigkeitsmatrix für das gröbere Gitter. Das gröbere Gitter hat um den Faktor 2^d weniger Gitterpunkte, wobei $d = 1, 2, 3$ die Raumdimension bezeichnet. Man löst

$$\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{d}},$$

wobei $\hat{\mathbf{d}}$ die *Restriktion* (Einschränkung) von \mathbf{d} auf das gröbere Gitter ist

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathcal{R}\mathbf{d}.$$

Beispiele.

(i) Die *triviale* Restriktion lautet

$$\mathcal{R}\mathbf{d}(x) = \mathbf{d}(x) \quad \text{für } x = 2jh \text{ (auf dem groben Gitter)}.$$

Hier wurde die intuitive Kurzschreibweise $\mathbf{d}(kh) = d_k$ für Gitterfunktionen verwendet. Die obige Bedingung lautet daher $\hat{d}_j = d_{2j}$.

(ii) Eine bessere Restriktion erhält man mit

$$\mathcal{R}\mathbf{d}(x) = \frac{1}{4}(\mathbf{d}(x-h) + 2\mathbf{d}(x) + \mathbf{d}(x+h))$$

für $x = 2jh$ auf dem groben Gitter.

Denken wir uns für den Moment die Gleichung auf dem groben Gitter exakt gelöst, also

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{A}}^{-1}\hat{\mathbf{d}}.$$

Die gesuchte Korrektur ist offenbar nur auf dem groben Gitter definiert. Um eine Näherung an \mathbf{v} zu erhalten, muss man sie auf das feine Gitter fortsetzen. Diesen Prozess nennt man *Prolongation*

$$\mathbf{v}^* = \mathcal{P}\hat{\mathbf{v}}.$$

Im folgenden verwenden wir lineare Interpolation als Prolongation

$$\mathcal{P}\hat{\mathbf{v}}(x) = \begin{cases} \hat{\mathbf{v}}(x) & \text{für } x = j\hat{h} = 2jh, \\ \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{v}}(x) + \hat{\mathbf{v}}(x)) & \text{für } x = (2j+1)h, \end{cases}$$

vgl. auch Abb. 3.

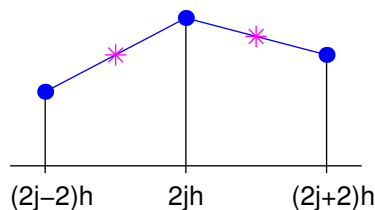


Abbildung 3: Prolongation durch lineare Interpolation.

Mit Hilfe der Prolongation der Grobgitterkorrektur ergibt sich die verbesserte Näherungslösung zu

$$\mathbf{w}_{\text{neu}} = \mathbf{w}^* - \mathbf{v}^*.$$

Algorithmus (Zwei-Gitter-Verfahren). Gegeben sei $\mathbf{w}^{(k)}$.

- (i) Glättungsschritt: Man berechnet \mathbf{w}^* mittels einiger gedämpfter Jacobi-Iterationen.
- (ii) Grobgitterkorrektur:
 Berechne Defekt am feinen Gitter $\mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{w}^* - \mathbf{b}$
 Restriktion des Defekts auf das grobe Gitter $\hat{\mathbf{d}} = \mathcal{R}\mathbf{d}$
 Löse Gleichung auf grobem Gitter $\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{A}}^{-1}\hat{\mathbf{d}}$
 Prolongation auf das feine Gitter $\mathbf{v}^* = \mathcal{P}\hat{\mathbf{v}}$
 Korrektur am feinen Gitter $\mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{w}^* - \mathbf{v}^*$.

1.5.4 Konvergenz des Zwei-Gitter-Verfahrens

Wir untersuchen obiges Zwei-Gitter-Verfahren für $\omega = 1/4$. Die Zwei-Gitter-Iteration lautet

$$\mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{M}\mathbf{w}^{(k)} + \mathbf{N}\mathbf{b}$$

mit der Iterationsmatrix

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathcal{P}\hat{\mathbf{A}}^{-1}\mathcal{R}\mathbf{A})\mathbf{H}^\nu$$

bei ν gedämpften Jacobi-Iterationen. Man hat Konvergenz, falls $\rho(\mathbf{M}) < 1$.

Satz. (a) Der Spektralradius der Iterationsmatrix $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\nu)$ erfüllt

$$\rho(\mathbf{M}) \leq \max\{x(1-x)^\nu + x^\nu(1-x); 0 \leq x \leq 1/2\} =: \rho_\nu < 1.$$

(b) Für die Spektralnorm $\|\mathbf{M}\| = \sqrt{\rho(\mathbf{M}^T\mathbf{M})}$ gilt

$$\|\mathbf{M}\| \leq \max\left\{\sqrt{2x^2(1-x)^{2\nu} + 2x^{2\nu}(1-x)^2}; 0 \leq x \leq 1/2\right\} =: \zeta_\nu < 1.$$

Eine einfache Rechnung ergibt die nachstehende Tabelle:

ν	1	2	3	4
ρ_ν	1/2	1/4	1/8	0.083
ζ_ν	1/2	1/4	0.15	0.116

Man zeigt weiters, dass für $\nu \rightarrow \infty$ gilt:

$$\rho_\nu \approx \frac{1}{e\nu}, \quad \zeta_\nu \approx \frac{1}{2\nu}.$$

Beweis. Einfaches (aber langwieriges) Nachprüfen. Man verwendet dazu die angepasste Basis \mathbf{v}_j von Eigenvektoren. \square

Wahl von ν . Der Aufwand für 2ν Glättungen ist in etwa doppelt so hoch wie für ν Glättungen. Somit sind *zwei* Iterationen mit ν Glättungsschritten besser als *eine* Iteration mit 2ν Glättungsschritten, falls

$$\zeta_\nu^2 \leq \zeta_{2\nu} \approx \frac{\zeta_\nu}{2}, \quad \text{d.h. } \zeta_\nu \lesssim \frac{1}{2}.$$

In der Praxis heisst das: Man verwendet 2 gedämpfte Jacobi-Iterationen.

1.5.5 Mehrgitterverfahren

Man wählt Gitterweiten

$$h_0 = H, \quad h_1 = \frac{H}{2}, \quad h_2 = \frac{H}{4}, \quad \dots, \quad h_\ell = \frac{H}{2^\ell}$$

und sucht für die feinste Gitterweite die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{A}_\ell \mathbf{w}_\ell = \mathbf{b}_\ell.$$

(Der Index ℓ deutet hier an, dass dieses Gleichungssystem zur Gitterweite h_ℓ gehört.)

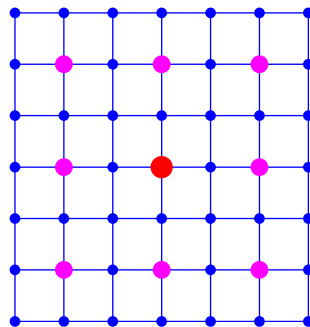


Abbildung 4: Drei ineinander geschachtelte Gitter mit 1, 9 und 49 Punkten.

Wendet man ein Zwei-Gitter-Verfahren an, so benötigt man die Lösung von

$$\mathbf{A}_{\ell-1} \mathbf{w}_{\ell-1} = \mathbf{d}_{\ell-1}$$

(Defektkorrektur am Grobgitter). Diese Gleichung löst man wieder iterativ mit dem Zwei-Gitter-Verfahren und erhält ein neues Gleichungssystem

$$\mathbf{A}_{\ell-2} \mathbf{w}_{\ell-2} = \mathbf{d}_{\ell-2}$$

auf einem noch gröberen Gitter, usw. Auf dem größten Gitter löst man das System direkt (im Extremfall eine einzige Gleichung!). Je nachdem, ob man jeweils eine oder zwei Zwei-Gitter-Iterationen pro Niveau ausführt, spricht man von einem V-Zyklus bzw. von einem W-Zyklus, vgl. Abb. 5.

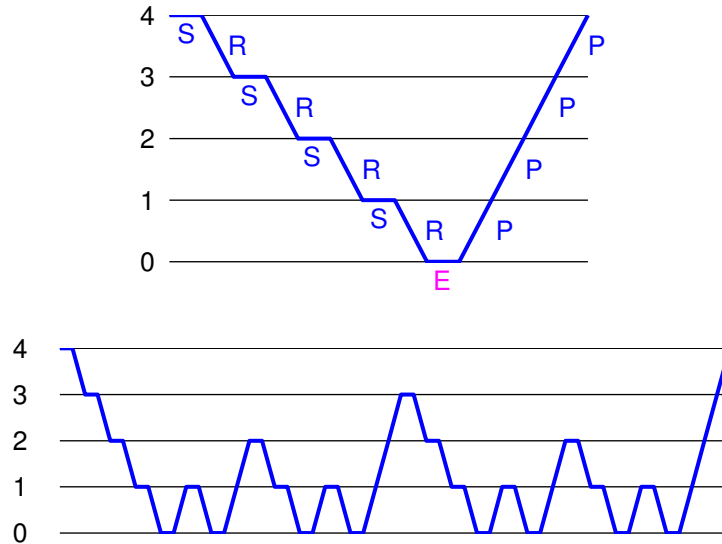


Abbildung 5: V-Zyklus (oben) und W-Zyklus (unten) einer Mehrgitteriteration. Hierbei bedeutet S Glättung, R Restriktion, E Auswertung und P Prolongation (nach Hackbusch, 1985).

Algorithmus. $\text{MGM}(\ell, \mathbf{w}, \mathbf{b})$

Falls $\ell = 0$, setze $\mathbf{w} = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{b}$.

Sonst: \mathbf{w}^* = Ergebnis von ν Jacobi-Iterationen zum Startwert \mathbf{w}

$\mathbf{d} = \mathcal{R}(\mathbf{A}_\ell \mathbf{w} - \mathbf{b})$

$\mathbf{v} = 0$

für $j = 1, \dots, \gamma$: $\text{MGM}(\ell - 1, \mathbf{v}, \mathbf{d})$

$\mathbf{w} = \mathbf{w}^* - \mathcal{P}\mathbf{v}$

Beim V-Zyklus ist $\gamma = 1$, beim W-Zyklus ist $\gamma = 2$.

Aufwand des Verfahrens. Sei N die Anzahl der Gleichungen am feinsten Gitter. Glättung, Restriktion und Prolongation sind $\mathcal{O}(N)$ Operationen mit kleiner $\mathcal{O}(\dots)$ -Konstante, falls man mit *sparse matrix* Techniken arbeitet. Die Anzahl der Gleichungen nimmt pro Niveau etwa um den Faktor 2^{-d} ab, wobei d die Raumdimension bezeichnet. Weiters wird am Niveau ℓ das Niveau k gerade $\gamma^{\ell-k}$ ($1 \leq k \leq \ell$) aufgerufen. Somit ist der Gesamtaufwand der Iteration

$$C \left(N + \gamma \frac{N}{2^d} + \gamma^2 \frac{N}{2^{2d}} + \dots + \gamma^{\ell-1} \frac{N}{2^{(\ell-1)d}} \right) + C_0 = \mathcal{O}(N).$$

Die neue Konstante lautet abhängig von d und γ :

	$\gamma = 1$	$\gamma = 2$
$d = 1$	$2C$	ℓC
$d = 2$	$\frac{4}{3}C$	$2C$
$d = 3$	$\frac{8}{7}C$	$\frac{4}{3}C$

Das Multigridverfahren ist somit in beliebigen Raumdimensionen ein $\mathcal{O}(N)$ -Prozess.

Varianten.

andere Glättungsiterationen (meist Gauss-Seidel);
 Nachglätten (d.h. weitere Glättungsschritte nach der Grobgitterkorrektur);
 andere Restriktionen und Prolongationen.

Probleme.

Unregelmässige Gitter.

1.6 Gebietszerlegungen

Gebietszerlegungen basieren auf dem Prinzip *divide et impera* (teile und herrsche). Darauf beruhende Verfahren werden häufig in der 2-D und 3-D Strömungsmechanik verwendet.

Zerlegt man den Grundbereich in s Teilbereiche und numeriert man zunächst der Reihe nach die inneren Knoten der Teilbereiche und am Schluss die Knoten auf den (gemeinsamen) Rändern, so besitzt die Steifigkeitsmatrix eine Blockstruktur

$$\mathbf{Aw} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & & & \mathbf{E}_1 \\ & \mathbf{B}_2 & & \mathbf{E}_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mathbf{B}_s & \mathbf{E}_s \\ \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \dots & \mathbf{G}_s & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_s \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_s \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}.$$

Man beachte, dass die ersten s Diagonalblöcke \mathbf{B}_j entkoppelt sind (und damit unabhängig auf einem Parallelrechner behandelt werden können). Die Abb. 6 zeigt die Situation für $s = 3$.

Wir schreiben für obiges Gleichungssystem kurz

$$\mathbf{Aw} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{E} \\ \mathbf{G} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

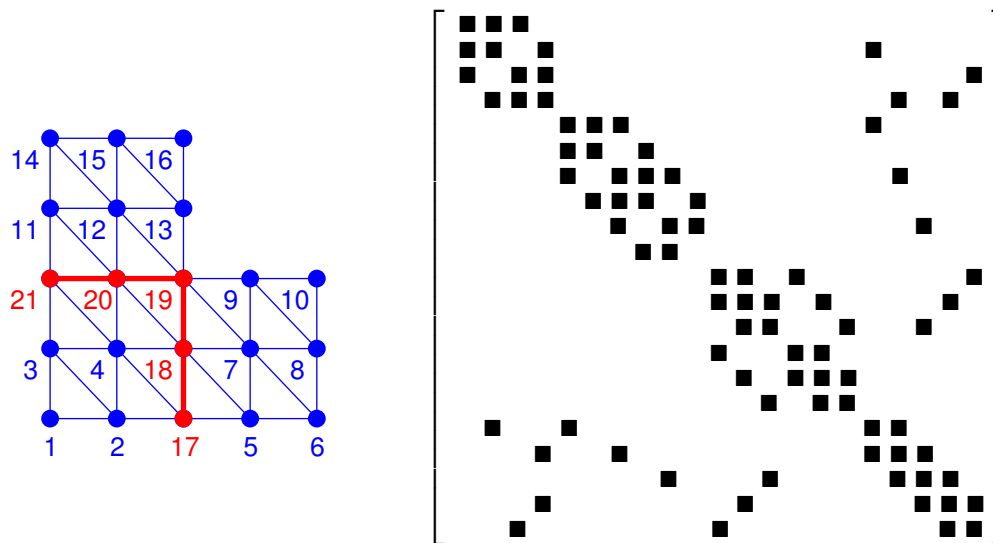


Abbildung 6: Zerlegung eines L-förmigen Gebiets in drei kleinere Gebiete.

1.6.1 Direkte Löser und das Schur-Komplement

Eliminiert man die Unbekannten \mathbf{x} mit Hilfe von

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{E} \\ \mathbf{G} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix},$$

also

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{E}\mathbf{y}),$$

so erhält man das *reduzierte* System

$$(\mathbf{C} - \mathbf{G}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{E})\mathbf{y} = \mathbf{g} - \mathbf{G}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{f}.$$

Die Systemmatrix $\mathbf{S} = \mathbf{C} - \mathbf{G}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{E}$ heisst *Schur-Komplement* bezüglich \mathbf{y} . Sobald man das Schur-Komplement kennt, kann man daraus die Knotenverschiebungen auf den gemeinsamen Rändern berechnen. Anschliessend lassen sich die restlichen Knotenverschiebungen bestimmen.

Algorithmus. löse $\mathbf{B}\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}$ ($\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{E}$)
 löse $\mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$ ($\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{f}$)
 $\tilde{\mathbf{g}} := \mathbf{g} - \mathbf{G}\tilde{\mathbf{f}}$
 $\mathbf{S} := \mathbf{C} - \mathbf{G}\tilde{\mathbf{E}}$
 löse $\mathbf{S}\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{g}}$
 $\mathbf{x} := \tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{E}}\mathbf{y}$

Die Gleichungssysteme mit der Matrix \mathbf{B} kann man *parallel* lösen, da die Matrix \mathbf{B} in kleinere Teilmatrizen zerfällt. Ausserdem hat \mathbf{E} viele Nullelemente.

Das Schur-Komplement \mathbf{S} ist ebenfalls klein. Man hat also die Lösung von einem grossen linearen Gleichungssystem auf die Lösung von mehreren kleinen reduziert.

1.6.2 Das Verfahren von Schwarz

Bei diesem Verfahren zerlegt man zunächst das Gebiet in überlappende Teilgebiete. Der Rand des Teilgebietes Ω_i , der im Teilgebiet j zu liegen kommt, heisse Γ_{ij} . Abb. 7 zeigt eine Zerlegung in drei Teilgebiete.

Das Verfahren von Schwarz lautet nun folgendermassen:

```

Wähle einen Startvektor
Für  $k = 1, 2, \dots$  bis zur Konvergenz
  Für  $i = 1, \dots, s$ 
    Löse das Problem am Gebiet  $\Omega_i$ 
    Korrigiere die Randwerte auf  $\Gamma_{ji}$ 
  EndDo
EndDo

```

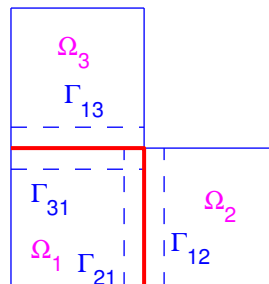


Abbildung 7: Zerlegung eines L-förmigen Gebiets in drei überlappende Teilgebiete.

Wiederum wird anstatt eines grossen linearen Gleichungssystems eine Folge von kleineren Systemen gelöst. Das Verfahren erinnert ein wenig an das Block-Gauss-Seidel Verfahren. Für Details und weiterführende Literatur verweise ich auf das Buch von Saad.

Literatur

- [1] W.L. Briggs, *A Multigrid Tutorial*. SIAM, Philadelphia, 1987.
- [2] W. Hackbusch, *Multigrid Methods and Applications*. Springer, NY, 1985.